Lagebeziehungen:

Gerade-Gerade:

1. Richtungsvektoren der Geraden vergleichen

Vielfache — nicht Vielfache

/ oder // — X oder / nur in $\mathbb{R}^3$

2. Punktprobe — 2. Gleichsetzen

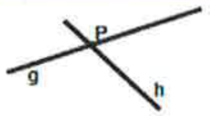
liegt drauf — liegt nicht drauf — lösbar — nicht lösbar

identisch — parallel — schneiden sich — windschief

onderfall: g und h schneiden sich und sind orthogonal.
rüfung auf Orthogonalität: Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist Null.

Schnittpunkte / Schnittgeraden

Schnittpunkt zweier Geraden



Beispiel: g: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ h: $\begin{pmatrix}-1\\7\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\3\end{pmatrix}$

Geradengleichungen gleichsetzen und ausrechnen.

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}12\\6\\3\end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix}3+4s=-1+12t\\4+1s=7+6t\\1=5+3t\end{matrix}\right\} \begin{matrix}s=-5\\t=-\frac{4}{3}\end{matrix}$$

Matrix auflösen. „s" und „t" sind nun bekannt.
„s" oder „t" in eine der Geradengleichungen einsetzen.

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Gerade-Ebene:

Für die Lage einer Gerade g und einer Ebene E sind 3 Fälle möglich:

1. g und E schneiden sich.
2. g und E sind echt parallel.
3. g liegt in E.

Sonderfall:

Die Gerade g schneidet die Ebene E orthogonal. Dies ist der Fall, wenn ein Normalenvektor von E ein Vielfaches eines Richtungsvektors von g ist.

Gerade liegt in Parameter- und Ebene in Koordinatenform vor

Untersuche die Lage der Gerade g und der Ebene E mit

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: 2x_1-x_3=4$$

1. Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{matrix}\text{I} & x_1=2\\ \text{II} & x_2=1+2r\\ \text{III} & x_3=3+1r\end{matrix}$$

2. x_1, x_2 und x_3 in Koordinatenform der Ebene einsetzen.
3. Nach Parameter der Gerade umstellen.

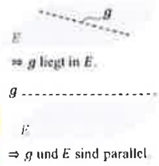
$$\begin{aligned} 2\cdot x_1-x_3&=4\\ \Leftrightarrow\quad 2\cdot2-(3+1r)&=4\\ \Leftrightarrow\quad 4-3-1r&=4\\ \Leftrightarrow\quad r&=-3\end{aligned}$$

Das Ergebnis $r=-3$ setzen wir nun in die Parameterform der Gerade g ein und wir erhalten mit

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}$$

4. Ergebnis interpretieren.

Eindeutige Lösung: r = -3 → Gerade schneidet Ebene
Wahre Aussage: Z.B. 0=0 → Gerade liegt in Ebene
Falsche Aussagen: Z.B. 1=0 → Gerade und Ebene sind parallel



Gerade und Ebene liegen in Parameterform vor

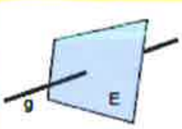
$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\text{I} & 2+r=-3+s\\ \text{II} & -3-r=1-2s-t\\ \text{III} & 2+3r=1-s+2t\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\text{I} & r-s=-5\\ \text{II} & -r+2s+t=4\\ \text{III} & 3r+s-2t=-1\end{matrix}$$

3.1 Parameterformen gleichsetzen.

3.2 LGS aufstellen und lösen.

Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene (beide in Koord. Form)



E: ax + by + cz + d = 0
g: $\vec{w}=\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ } Schnittpunkt?

Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen.

$$a(u_1+tv_1)+b(u_2+tv_2)+c(u_3+tv_3)+d=0$$

„t" als einzige Unbekannte berechnen, und in die Geradengleichung einsetzen. Die Lösung ergibt den Schnittpunkt.

Ebene – Ebene

Für die gegenseitige Lage zweier Ebenen sind 3 Fälle möglic

1. Sie schneiden sich (Schnittgerade).
2. Sie sind echt parallel. $0=4$
3. Sie sind identisch. $0=0$

Sonderfall

Die Ebenen sind orthogonal. Dies ist der Fall, wenn das Skalarprodukt der Normalenvektoren Null ist

Beide Gleichungen in Parameterform

Sind beide Gleichungen in Parameterform gegeben, setzt man die rechten Seiten gleich und erhält ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Variablen.

[illegible]

mit der Lösung $u = [illegible] 3t$. Das bedeutet die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgerade. Zur Bestimmung der Schnittgeraden setzen wir die Lösung in eine der beiden Ebenen ein (hier in E_2).

[illegible]

Beide Gleichungen in Koordinatenform:

E_1: x − y − 4z − 2 = 0
E_2: −2x + y + 2z − 3 = 0

Ebenengleichungen als Matrix schreiben und auflösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & 6 & -7\end{array}\right) \quad z=t$$

$$\begin{aligned}x&=-5-2t\\ y&=-7-6t\\ z&=t\end{aligned}$$

Geradengleichung

$$g=\begin{pmatrix}-5\\-7\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-6\\1\end{pmatrix}$$

Eine in Parameter- und eine in Koordinatenform → Umwandeln → Beide KF ineinander einsetzen

Gegeben seien die Ebenen E_1 in Parameterform und E_2 in Koordinatenform mit

[illegible]

Idee: E_1 umschreiben und in E_2 einsetzen.

[illegible]

Das Ergebnis $r = -2$ in E_1 einsetzen und wir erhalten

[illegible]

eine Schnittgerade g.

Ebene schneidet 2 Geraden nicht:

$\vec{n}_E = g \times h$!

Ebenengleichung

Koordinatengleichung in Parameterform:

geg: $E: 2x + 4y + 3z = 12$

① Spurpunkte bilden:

$2x = 12 \Rightarrow S_1(6, 0, 0)$
$4y = 12 \Rightarrow S_2(0, 3, 0)$
$3z = 12 \Rightarrow S_3(0, 0, 4)$

② Parameterform aufstellen:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_1} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S_1S_2}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S_1S_3}}$$

Parameterform in Koordinatenform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Da $\vec{n}$-Vektor die Parameter für Kgl besitzt, diesen über Kreuzprodukt berechnen (Dazu beide Richtungsvektoren x)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

② Resultat in Kgl einsetzen:

$2x_1 + 0x_2 - 10x_3 = b$

③ Um b zu berechnen, Ortsvektor in Kgl einsetzen:

$2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 10 \cdot 3 = b = 27$

$\underline{\underline{2x_1 + 0x_2 - 10x_3 = 27}}$

Normalenvektor bestimmen:

Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

Koordinatenform: $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Parameterform: $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ (Kreuzprod. der Richtungsv.)

Achsenabschnittsgleichung:

= Spurpunkte: bei $E: 2x + 4y + 3z = 12$

$2x = 12 \rightarrow (6, 0, 0)$
$4y = 12 \rightarrow (0, 3, 0)$
$3z = 12 \rightarrow (0, 0, 4)$

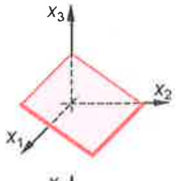
Spezialfälle der KGL:

Diskussion von Spezialfällen der Koordinatengleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$:

a) $a_1 = 0$ (d. h. $a_2x_2 + a_3x_3 = b$)

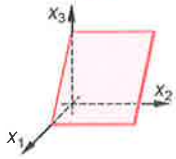
⇔ Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.

[Da x_1 in der Gleichung nicht auftritt, ist mit jedem Punkt auch gleich eine ganze Parallele zur x_1-Achse durch diesen Punkt Lösung der Koordinatengleichung $a_2x_2 + a_3x_3 = b$.]



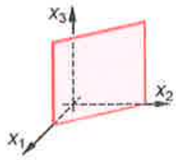
b) $a_2 = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_3x_3 = b$)

⇔ Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse.



c) $a_3 = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_2x_2 = b$)

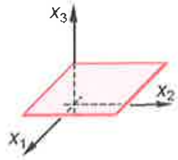
⇔ Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.



d) $a_1 = a_2 = 0$ (d. h. $a_3x_3 = b$)

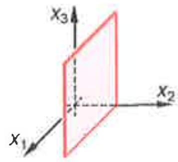
⇔ Die Ebene ist parallel zur x_1x_2-Koordinatenebene.

[Die Ebene ist nämlich gemäss a) und b) parallel zur x_1-Achse *und* x_2-Achse]



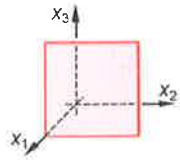
e) $a_1 = a_3 = 0$ (d. h. $a_2x_2 = b$)

⇔ Die Ebene ist parallel zur x_1x_3-Koordinatenebene.



f) $a_2 = a_3 = 0$ (d. h. $a_1x_1 = b$)

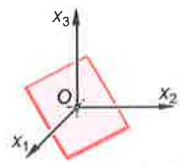
⇔ Die Ebene ist parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene.



g) $b = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$)

⇔ Die Ebene enthält den Ursprung O des Koordinatensystems.

$[a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0]$



Punktprobe Ebene:

① P in E einsetzen (bei KF)
Bei PF, Punkt mit Ebene gleichs.

$$\underbrace{P}_{P} = \underbrace{(\ ) + r(\ ) + s(\ )}_{E}$$

② Zwei Reihen nehmen und GlS und damit Werte für s / t berechn.

③ Werte in dritte Reihe einsetzen
↳ wenn $0 = 0 \rightarrow$ P liegt in Ebene.

Punktprobe Gerade:

geg: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g: \vec{x} = (\ ) + r(\ )$

ges: liegt P in g?

① P mit g gleichsetzen

② Jede Zeile vom GlS nun einzeln überprüfen ob r denselben Wert hat:

$x_1 \mid r = -1$
$x_2 \mid r = 2$ ↯
$x_3 \mid r = 1$

Punkt innerhalb Strecke/Ebene?

① Punktprobe durchführen (Werte für r bzw. u, v)

② Wenn Punkt innerhalb Strecke oder Ebene liegt, prüfen ob bei geraden r bzw. Bei Ebene u, v zwischen $0 < 1$ liegen. Dann innerhalb.

↳ Bsp. Gerade:

Punktprobe:

$x_1 \mid r = -1$
$x_2 \mid r = -1$
$x_3 \mid r = -1$

$\Rightarrow$ liegt auf Gerade, jedoch NICHT innerhalb

Ebene einzeichnen:

① Spurpunkte berechnen

② Resultate für x_1, x_2, x_3 einz.

Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{0} \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = \vec{0}$

(I) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

(II) $(r \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (r \cdot \vec{b})$ $(r \in \mathbb{R})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

(III) $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{b}) + (\vec{a} \bullet \vec{c}) =: \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (Distributivgesetz bez. „+")

Satz 28. $\vec{a}^2 := \vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

Winkel zwischen zwei Vektoren

a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gleichgerichtet, d.h. $0° = \sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

b) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ spitz, d.h. $0° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 90°$ $\Leftrightarrow$ $0 < \vec{a} \bullet \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$, d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

d) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ stumpf, d.h. $90° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 180°$ $\Leftrightarrow$ $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| < \vec{a} \bullet \vec{b} < 0$

e) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gegengerichtet, d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180°$ $\Leftrightarrow$ $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \bullet \vec{b}$

Längenmessung

Betrag aus Pythagoras-Prinzip	Abstand zweier Punkte P Q
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ oder $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\lvert\vec{PQ}\rvert = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$
Man nennt $\frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert} \cdot \vec{a}$ den zu $\vec{a}$ gehörigen **Einheitsvektor** $\vec{e}_{\vec{a}}$	• drei regelmässige Dreiecke [$3 \cdot 60° < 360°$]: Tetraeder • vier regelmässige Dreiecke [$4 \cdot 60° < 360°$]: Oktaeder • fünf regelmässige Dreiecke [$5 \cdot 60° < 360°$]: Ikosaeder • drei regelmässige Vierecke [$3 \cdot 90° < 360°$]: Hexaeder • drei regelmässige Fünfecke [$3 \cdot 108° < 360°$]: Dodekaeder

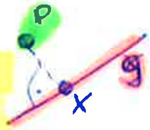
(I) $|\vec{a}| \geqq 0$ ($= 0$ nur für $\vec{a} = \vec{0}$) Satz 25

(II) $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ $(r \in \mathbb{R})$

(III) $|\vec{a} + \vec{b}| \leqq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ („Dreiecksungleichung")

Abst. Punkt-Gerade

geg: g, P ges: X



Lotfusspunkt:

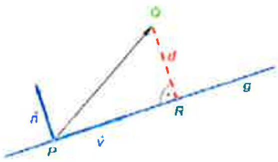
$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{P} \right] \circ \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{RV \text{ von } g} = 0$ Gerade

$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots = 0$

↳ Für Punkt, r in g einsetzen.

Abstände

Abstand Punkt Q – Gerade g (in der Ebene)



$$d = |\vec{RQ}| = \frac{|\vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{n}|}$$

Punkt-Gerade in der Ebene:

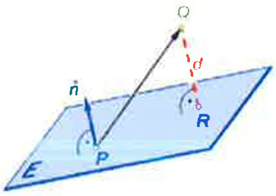
Bei $a_1 x_1 + a_2 x_2 - b = 0$ **(x=q)**

$$d = \frac{|a_1 q_1 + a_2 q_2 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$ q = Punkt

Bei $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ **(x=q)**

$$\sqrt{(\vec{q} - \vec{p})^2 - [(\vec{q} - \vec{p}) \bullet \vec{e}_{\vec{v}}]^2}$$

Abstand Punkt Q – Ebene E (im Raum)



$$d = |\vec{RQ}| = |\vec{PQ} \bullet \vec{e}_{\vec{n}}| = |(\vec{q} - \vec{p}) \bullet \vec{e}_{\vec{n}}| = \frac{|\vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{n}|}$$

Punkt-Ebene im Raum:

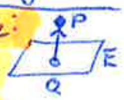
Bei $E: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ **(x=q)**

$$d = \frac{|a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Bei $E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v} + s\vec{w}$ **(x=q)**

$$d = \frac{|(\vec{v} \times \vec{w}) \bullet (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{|[\vec{v}; \vec{w}; \vec{q} - \vec{p}]|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

Abst. Punkt-Ebene:



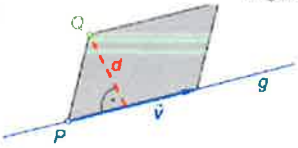
① Gerade aufstellen
→ $g: \vec{x} = (P) + r(\vec{n}_E)$

② Gerade mit Ebene schneiden

③ Resultat ist Punkt Q
↳ Vektor $\vec{PQ}$ bilden

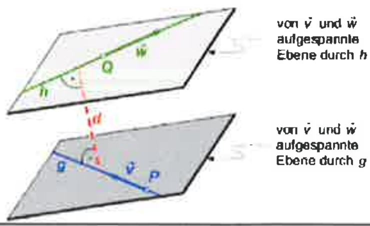
Abstand Punkt Q – Gerade g (im Raum)

d = Höhe des Parallelogramms = $\frac{\text{Fläche des Parallelogramms}}{\text{Länge der Grundlinie}} = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$



$$= |(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{e}_{\vec{v}}|$$

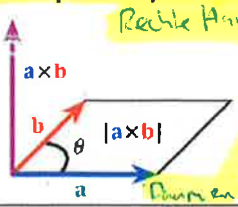
Abstand Gerade g – Gerade h (im Raum)



$$d = \frac{|[\vec{v}; \vec{w}; \vec{q} - \vec{p}]|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Rechte Hand Regel!



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
↳ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ = kollinear

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} AB_1 \\ AB_2 \\ AB_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} AC_1 \\ AC_2 \\ AC_3 \end{pmatrix} \right|$$

Satz 36

(I) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(II) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$, das heisst:

Die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(III) Für nicht-kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$\boxed{\vec{a}^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2}$

Satz 38

(I) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) =: -\vec{b} \times \vec{a}$ (Anti-Kommutativgesetz)

(II) $(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b})$ $(r \in \mathbb{R})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

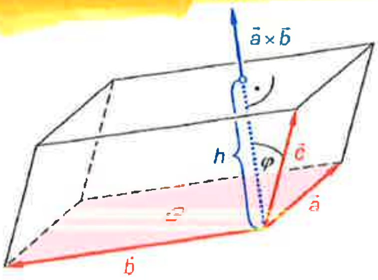
(III) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) =: \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz bezüglich
$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) =: \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ Vektoraddition „+")

Satz 37

$\vec{a}, \vec{b}$ kollinear $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Spatprodukt

Linear abhängig? Komplanar?



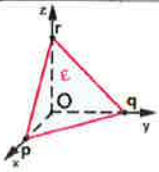
$$V = G\cdot h = \left|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\cos(\varphi)\right|\right| = \left|(\vec{a}\times\vec{b}) * \vec{c}\right|$$

$$= \left|\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right|$$

$$= a_1\cdot b_2\cdot c_3 + a_2\cdot b_3\cdot c_1 + a_3\cdot b_1\cdot c_2 - c_1\cdot b_2\cdot a_3 - c_2\cdot b_3\cdot a_1 - c_3\cdot b_1\cdot a_2$$

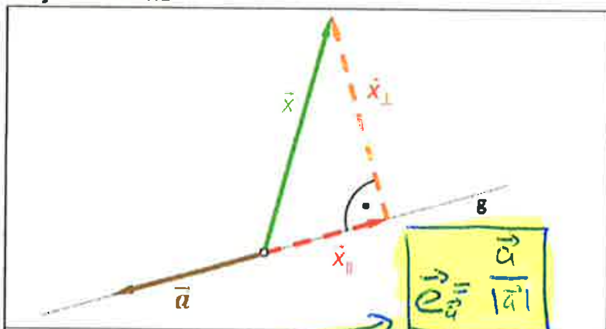
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} > 0 \Rightarrow$ Rechtssystem | $= 0 \Rightarrow$ Komplanar

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} < 0 \Rightarrow$ Linkssystem | $= 0 \Rightarrow$ Linear abhängig

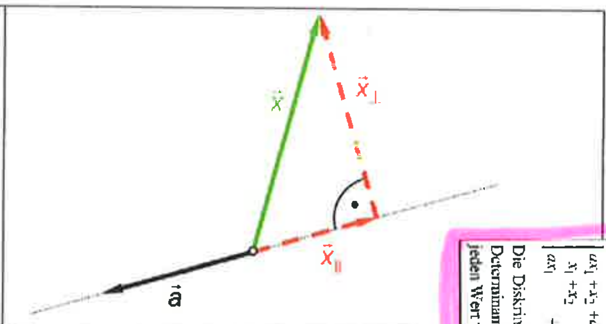


$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\0\\0\end{pmatrix} + m\cdot\begin{pmatrix}-p\\q\\0\end{pmatrix} + n\cdot\begin{pmatrix}-p\\0\\r\end{pmatrix}$$

Projektionssatz



$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



$\vec{x}_\parallel = (\vec{x} \bullet \vec{e}_{\vec{a}})\cdot\vec{e}_{\vec{a}}$ → parallel zu $\vec{a}$

$\vec{x}_\perp = \vec{x} - (\vec{x} \bullet \vec{e}_{\vec{a}})\cdot\vec{e}_{\vec{a}}$ → senkrecht zu $\vec{a}$

wobei

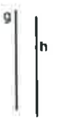
parallel zu $\vec{a}$

senkrecht zu $\vec{a}$

liegt

Parallel oder Senkrecht

Parallele Geraden



Man bestimmt je einen Vektor auf den Geraden. (Vektorform) Wenn das Kreuzprodukt = 0 ist, sind die Geraden parallel.

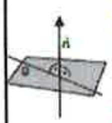
$|\vec{g}\times\vec{h}| = 0$

Senkrechte Geraden

Man bestimmt je einen Vektor auf den Geraden. (Vektorform) Wenn das Skalarprodukt = 0 ist, sind die Geraden senkrecht.

$\vec{g}\bullet\vec{h} = 0$

Gerade und Ebene parallel



Man bestimmt je einen Vektor auf den Geraden. (Vektorform) Wenn das Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor und dem Vektor auf der Geraden = 0 ist, sind Gerade und Ebene parallel.

$\vec{g}\bullet\vec{n} = 0$

Gerade und Ebene senkrecht

Man bestimmt je einen Vektor auf den Geraden. (Vektorform) sowie die Ebene in der Punkt-Normalenform. Wenn das Kreuzprodukt zwischen den Vektoren = 0 ist, steht die gerade senkrecht zur Ebene.

$|\vec{g}\times\vec{n}| = 0$

Zwei senkrechte Ebenen

Wenn das Skalarprodukt der Normalenvektoren = 0 ist, stehen sie Ebenen senkrecht zueinander.

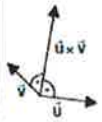
$\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2 = 0$

Zwei parallele Ebenen

Wenn das Kreuzprodukt der Normalenvektoren = 0 ist, sind die Ebenen parallel.

$|\vec{n}_1\times\vec{n}_2| = 0$

Senkrechter Vektor zu zwei Vektoren

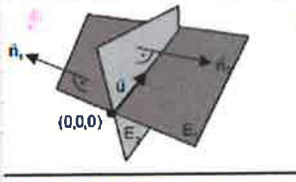


Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren ergibt einen Vektor, der zu beiden senkrecht ist.

Komplanare Vektoren in einer Ebene

Wenn das Kreuzprodukt der Vektoren mit dem Normalenvektor der Ebene = 0 ist, dann liegen die Vektoren in derselben Ebene.

Vektor parallel zur Schnittkante von zwei Ebenen



Wenn man das Kreuzprodukt der Normalenvektoren bildet, so erhält man einen Vektor der parallel zur Schnittkante der beiden Ebenen verläuft.
Wenn beide Ebenen durch den Ursprung verlaufen, so liegt der Vektor genau auf der Schnittkante.

$\vec{u} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2$

Senkrecht zueinander wenn $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$

Cramersche Regel:

Cramersche Regel (Gabriel Cramer, Schweizer Mathematiker 1704-

Das lineare 2×2-Gleichungssystem

$$\left|\begin{matrix}a_1x_1 + b_1x_2 = c_1\\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2\end{matrix}\right|$$

hat für $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ das einzige Lösungspaar

$$(x_1;x_2) = \left(\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}};\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right),$$

für $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = 0$ hingegen keine oder unendlich viele Lösungspaare.

Cramersche Regel: Das lineare 3×3-Gleichungssystem

$$\left|\begin{matrix}a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1\\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2\\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3\end{matrix}\right|$$

besitzt

- im sogenannten regulären Fall $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \neq 0$ (lat. *regularis* = regelgemäss, üblich) das einzige Lösungstrippel

$$(x_1;x_2;x_3) = \left(\frac{\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}};\frac{\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}};\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}\right),$$

- im singulären Fall $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = 0$ *keine* oder *unendlich viele* Lösungstripel (lat. *singularis* = vereinzelt). Genauer:

Ist auch $\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix} = 0$ (die im regulären Fall angegebenen drei Quotienten wären dann alle von der Form $\frac{0}{0}$), so besitzt das Gleichungssystem *beliebig viele* Lösungstripel, sonst (wenn mindestens eine dieser drei Determinanten $\neq 0$ ist) *kein* Lösungstripel.

Für welche reellen Werte von a hat das lineare Gleichungssyste[m]

$$\left|\begin{matrix}ax_1 + x_2 + ax_3 = 0\\ x_1 + x_2 \quad = 0\\ ax_1 \quad + x_3 = 0\end{matrix}\right|$$

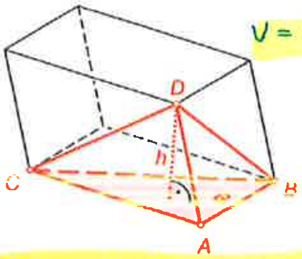
beliebig viele Lösungen?

Nach der Cramerschen Regel (Satz 41) liegt ein Sonderfall (*keine oder unendlich viele* Lösungen) genau dann vor, wenn das aus den drei Kolonnenvektoren des Gleichungssystems gebildete Spatprodukt verschwindet, oder gleichbedeutend: die aus den neun Koeffizienten des Gleichungssystems gebildete Determinante verschwindet. Da die hier gegebenen Gleichungssysteme aber alle verschwindende rechte Seiten haben, ist $(x_1;x_2;x_3) = (0;0;0)$ stets eine Lösung, so dass diese Systeme *mindestens eine* Lösung haben. Eine verschwindende Gleichungssystem-Determinante bedeutet hier somit, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

$$\left|\begin{matrix}ax_1 + x_2 + ax_3 = 0\\ x_1 + x_2 \quad = 0\\ ax_1 \quad - x_3 = 0\end{matrix}\right| \text{ hat } \infty\text{-viele Lösungen} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & 1 & a\\ 1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{vmatrix} = -a^2 + a - 1 = 0.$$

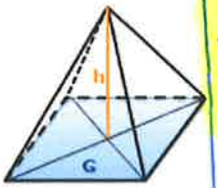
Die Diskriminante $D = 1^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = -3$ dieser quadratischen Gleichung ist negativ, d.h. die Determinante verschwindet *nie*, das Gleichungssystem hat *nie* unendlich viele Lösungen (also für jeden Wert von a stets *eine* oder *keine* Lösung).

Volumenberechnung:



$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$

$Volumen\ V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Fläche:

$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} AB_1 \\ AB_2 \\ AB_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} AC_1 \\ AC_2 \\ AC_3 \end{pmatrix} \right|$

$\hookrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Wann sind 3 Vektoren Komplanar?

Wenn die drei Vektoren komplanar sind, gilt $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, d.h. $\left| \begin{array}{rl} 1 \cdot x - 2 \cdot y = & -3 \\ -2 \cdot x + 2 \cdot y = & 0 \\ 2 \cdot x + 0 \cdot y = & z \end{array} \right|$.

Addieren wir die beiden ersten Gleichungen, erhalten wir $-x = -3$, also $x = 3$. Damit folgt aus der letzten Gleichung $z = 2x = 2 \cdot 3 = 6$. Die drei Vektoren sind genau für $z = 6$ komplanar.

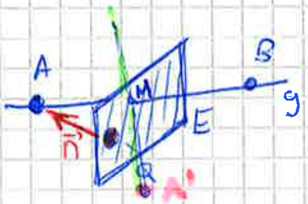
Tabelle mit Werten von Sinus und Cosinus

α	0° bzw. 360°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\alpha - 360°$	360° bzw. 0°	−345°	−330°	−315°	−300°	−285°	−270°	−255°
x	$0 = 2\pi$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$
$x - 2\pi$	$-2\pi = 0$	$-\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{17\pi}{12}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

α	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°
$\alpha - 360°$	−240°	−225°	−210°	−195°	−180°	−165°	−150°	−135°
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
$x - 2\pi$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{13\pi}{12}$	$-\pi$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	−1	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Beachte: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Punkt an Ebene spiegeln:



Gerade AB soll an E gespiegelt werden:

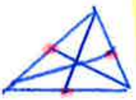
1. Lot fällen Punkt Ebene.
2. Lotgeraden mit Ebene schneiden
3. $|\vec{QA'}| = |\vec{QA}| \Rightarrow \boxed{\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 r \vec{v_g}}$
4. Geradengleichung neue Gerade:
   - 4.1 $g \cap E$ (Für Schnittpunkt M)
   - 4.2 $g: \vec{x} = \vec{OQ} + s\,\vec{QM}$

Schwerpunkt eines Dreiecks ABC

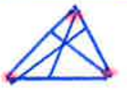
(SP. der Seitenhalb.)

$S = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right) = \left(\frac{-4+4-6}{3}; \frac{-3+1+5}{3}\right) = (-2; 1)$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

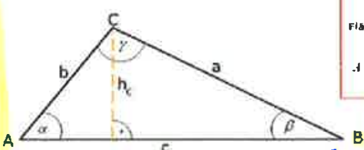


Seitenhalb.



Winkelhalb.

Allgemeines Dreieck

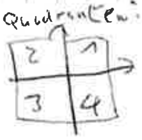


Umfang	$u = a + b + c$
Fläche	$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$
	$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$\vec{a} = \vec{AB}$
$\vec{b} = \vec{AC}$

Schnittwinkel Zweier Geraden	$\sphericalangle BAC$ $\quad \alpha = \arccos \frac{\lvert \vec{v} \cdot \vec{u} \rvert}{\lvert \vec{v} \rvert \lvert \vec{u} \rvert}$	$g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{u}$
Schnittwinkel Geraden/ Ebene	$\alpha = \arcsin \frac{\lvert \vec{v} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{v} \rvert \lvert \vec{n} \rvert}$	Spitzer Schnittwinkel α einer Geraden g und einer Ebene E. $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$
Schnittwinkel Ebene/ Ebene	$\alpha = \arccos \frac{\lvert \vec{m} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{m} \rvert \lvert \vec{n} \rvert}$ ACHTUNG KGL der Ebene →	Spitzer Schnittwinkel α zweier Ebenen E und F. $E: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = b$ $F: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = c$ Oder Schnittwinkel der Normalen. Bei Ebenen: z.B.: $x_{1,2}$-Ebene → $n_{x_{1,2}} = (0,0,1)$; Verwenden der n-Vektoren: $x_{2,3}$-Ebene → $n_{x_{2,3}} = (1,0,0)$; $x_{1,3}$-Ebene → $n_{x_{1,3}} = (0,1,0)$
Schwerpunkt	Schwerpunk S von $\Delta_{ABC} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ Schwerpunkt teilt Seitenhalbierende im Verhältnis1:2	

Quadranten:



Umkreismittelpunkt: (= Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) von A, B, C gleich weit entfernt)

$a_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{90}$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ist gerade Vielfach: 1) RV muss VF sein / 2) OV muss auf gerade liegen (ei. sehn) 3) Parameter $s \neq s^1, s^4$ /4)

Linearkombination:

$\vec{v}$ durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren darstellen:

① Vor Vektoren Parameter r, s, t anfügen → $r(\vec{a}) + s(\vec{b}) + t(\vec{c}) = (\vec{v})$

② GLS nach r, s, t auflösen ⇒ $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ (z.B.)

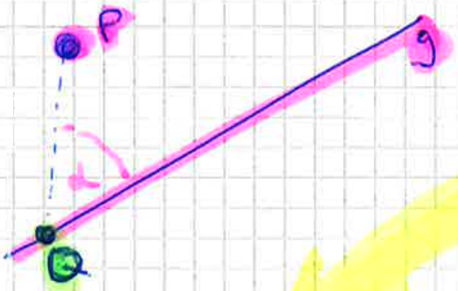
Projektion einer Geraden auf Ebene: (Koordinatenebene)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

x_1x_2-Ebene (x_3 "ausgeblendet")

① Die Geraden gl. ist dieselbe, es werden lediglich die Parameter der ausgeblendeten Ebene $= 0$ gesetzt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt, gerade und Winkel gegeben:



gesucht: Q

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P(0, 9, 3)$

Ansatz:

$$\frac{\vec{QP} \bullet \vec{rv_g}}{|\vec{QP}| \cdot |\vec{rv_g}|} = \cos(\alpha)$$

Dabei ist Q der Geradenpunkt, mit noch unbekanntem r. Deshalb gilt:

$$\vec{QP} = \vec{P} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2-r \\ 1+r \end{pmatrix}$$

nach r auflösen.

Sind die folgenden Aussagen korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Aus $(\vec{a})^2 = 16$ folgt $\vec{a} = \pm 4$.

b) $(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2$

c) Ist $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{c}$, so ist $\vec{b} = \vec{c}$.

d) $\vec{a} \bullet (\vec{b} \bullet \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{b}) \bullet \vec{c}$

e) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

a) Kann nicht richtig sein, denn die linke Seite von $\vec{a} = \pm 4$ ist ein Vektor, die rechte hingegen ein Skalar (d.h. eine Zahl).

b) Im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel: $\left[\binom{1}{0} \bullet \binom{3}{4}\right]^2 = (1 \cdot 3 + 0 \cdot 4)^2 = 3^2 = 9$, wohingegen $\left[\left|\binom{1}{0}\right| \cdot \left|\binom{3}{4}\right|\right]^2 = [1 \cdot 5]^2 = 5^2 = 25$.

c) Ist im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel: $\binom{1}{0} \bullet \binom{1}{0} = 1 \cdot 1 + 0 = \binom{1}{0} \bullet \binom{1}{2}$.

d) Kann schon nur deshalb nicht korrekt sein, weil links ein Vektor ($\vec{a}$) und eine *Zahl* ($\vec{b} \bullet \vec{c}$) – statt ein Vektor – skalar multipliziert werden. Aber selbst $\vec{a} \cdot (\vec{b} \bullet \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wäre im Allgemeinen falsch: Der linke Ausdruck ist ein Vielfaches von $\vec{a}$, der rechte hingegen von $\vec{c}$.

e) Korrekt: $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) \overset{\text{Satz}}{\underset{29}{=}} \vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} - \vec{b} \bullet \vec{b} \overset{\text{Satz}}{\underset{29}{=}} \vec{a} \bullet \vec{a} - \cancel{\vec{a} \bullet \vec{b}} + \cancel{\vec{a} \bullet \vec{b}} - \vec{b} \bullet \vec{b} \overset{\text{Satz}}{\underset{28}{=}} |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.