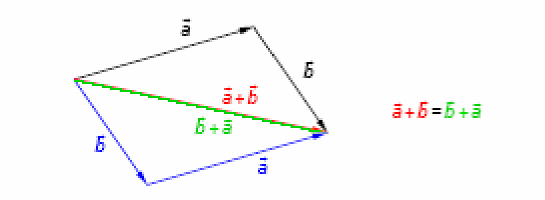
1. Vektoralgebra

Addition:

Die Vektoraddition ist *kommutativ* (lat. *commutare* = vertauschen):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \; .$$

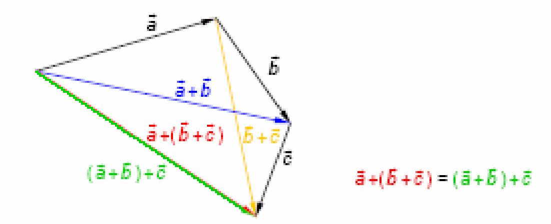
Beweis: „Parallelogrammregel"



Die Vektoraddition ist *associativ* (lat. *associare* = sich verbinden):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =: \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \, .$$

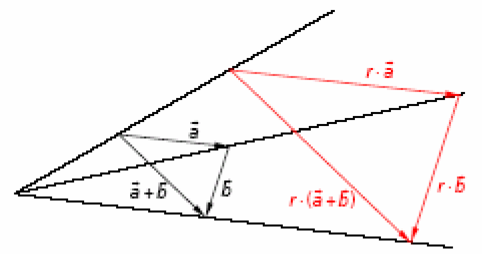
Beweis:



Multiplikation:

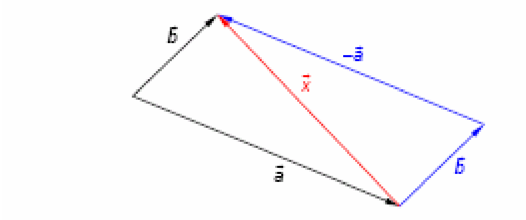
(I) $r \cdot (\vec a + \vec b) = r \cdot \vec a + r \cdot \vec b$
(II) $(r + s) \cdot \vec a = r \cdot \vec a + s \cdot \vec a$
(III) $r \cdot (s \cdot \vec a) = (r \cdot s) \cdot \vec a$

$\Big\} \; r, s \in \mathbb{R}$

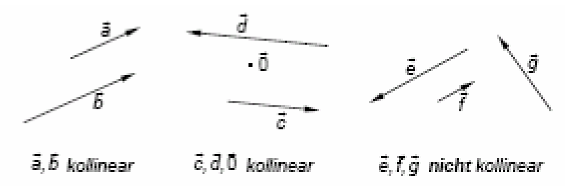
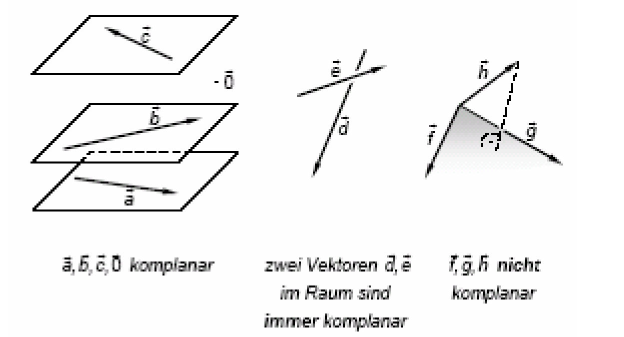
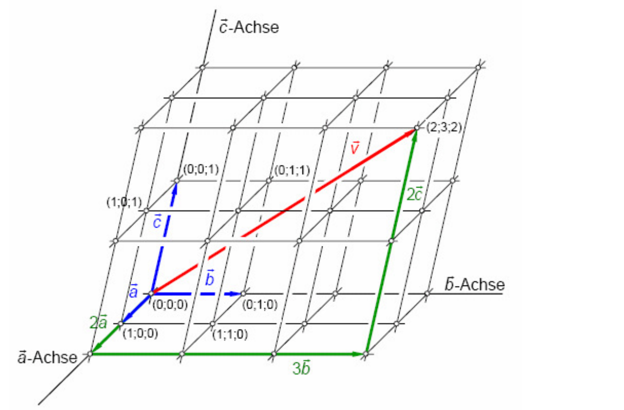


Subtraktion:

Man erhält $\vec x = \vec b - \vec a$ offensichtlich auch durch die Addition $\vec b + (-\vec a)$:



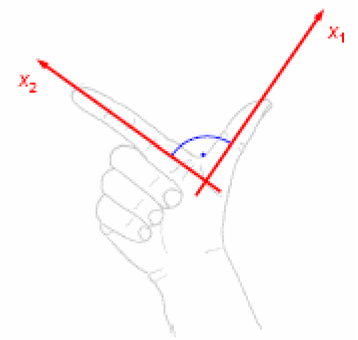
Zerlegungssätze:

2- Achsensystem (Ebene)	3- Achsensystem (Raum)
	
	

Vektoren im kartesischen Koordinatensystem:

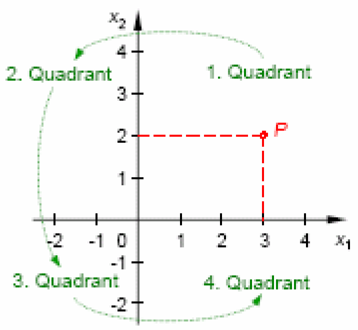
2-dimensional

Ein **zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem** wird gebildet durch zwei orientierte, senkrecht aufeinander stehende Achsen x_1 und x_2, welche in dieser Reihenfolge wie der 1. und 2. Finger der *rechten* Hand ein so genanntes **Rechtssystem** formen:



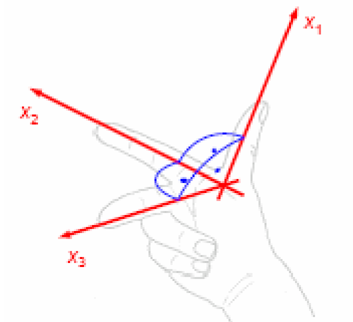
Das Koordinatensystem wird üblicherweise so platziert, dass für den Betrachter die x_1-Achse nach rechts und die x_2-Achse noch oben zeigen, und wird dann noch so parallelverschoben, dass sich möglichst alles im ersten **Quadranten** (mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, lat. *quadrans* = Viertel) abspielt.

Die Längeneinheiten auf den beiden Achsen sind bei kartesischen Koordinatensystemen gleich lang (z. B. je 1 cm).



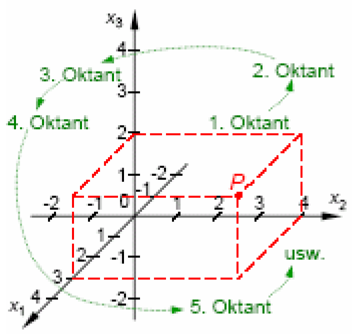
3-dimensional

Ein **dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem** wird gebildet durch drei orientierte, je senkrecht aufeinander stehende Achsen x_1, x_2, x_3, welche in dieser Reihenfolge wie der 1., 2. und 3. Finger der *rechten* Hand ein so genanntes **Rechtssystem** formen:



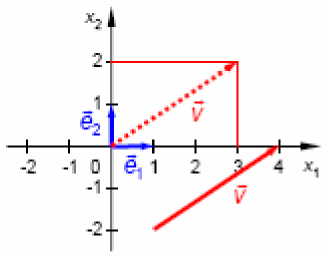
Das Koordinatensystem wird üblicherweise so platziert, dass für den Betrachter die x_1-Achse nach links unten, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben zeigen (Einblick in den 1. **Oktanten** mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, lat. *octans* = Achtel), und wird dann noch so parallelverschoben, dass sich möglichst alles in diesem Oktanten abspielt.

Die Längeneinheiten auf den drei Achsen im Raum sind bei kartesischen Koordinatensystemen gleich lang (z. B. je 1 cm). In einer zweidimensionalen Projektion des Koordinatensystems ist die Einheit auf der x_1-Achse jedoch halb so lang wie diejenige auf der x_2- und x_3-Achse (so genannte **Kavalierperspektive**). Aus praktischen Gründen wählen wir sie hier aber $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots$-mal so lang (= halbe Anzahl an Häuschen*diagonalen*).



Abszisse, Ordinate } Koordinaten $P = (3;\ 2)$	Abszisse, Ordinate, Applikate (oder Kote) } Koordinaten $P = (3;\ 4;\ 2)$

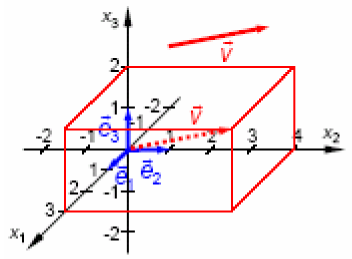
zwei nicht-kollineare Basisvektoren $\vec e_1, \vec e_2$



$\vec v = 3 \cdot \vec e_1 + 2 \cdot \vec e_2$, abgekürzt:

$\vec v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

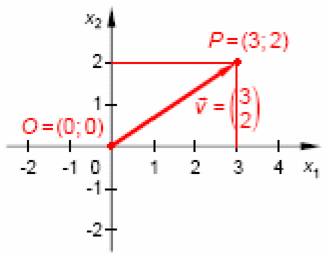
drei nicht-kollineare Basisvektoren $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$



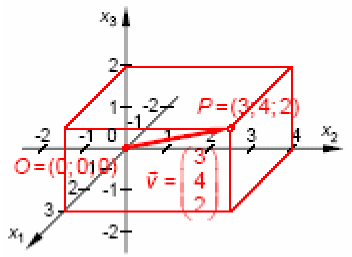
$\vec v = 3 \cdot \vec e_1 + 4 \cdot \vec e_2 + 2 \cdot \vec e_3$, abgekürzt:

$\vec v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ortsvektoren:



$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P = (p_1;\ p_2)$



$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P = (p_1;\ p_2;\ p_3)$

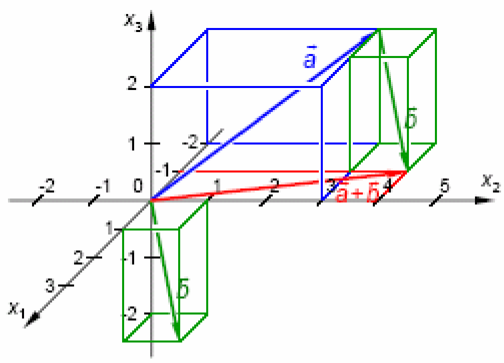
Vektoroperation im Koordinatensystem:

Vektoraddition:

$$\vec a + \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3) + (b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3) =$$

$$= (a_1 + b_1)\vec e_1 + (a_2 + b_2)\vec e_2 + (a_3 + b_3)\vec e_3 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren werden komponentenweise addiert.



$$\vec a + \vec b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 3+1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektormultiplikation:	Beispiel:
$r\cdot\vec{a}=r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=r\cdot(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)$ $=r\cdot a_1\cdot\vec{e}_1+r\cdot a_2\cdot\vec{e}_2+r\cdot a_3\cdot\vec{e}_3=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}$ Vektoren werden komponentenweise skalar multipliziert.	$-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot a_1\\(-1)\cdot a_2\\(-1)\cdot a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$
Vektorsubtraktion:	Beispiel:
Da $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$ ist und Vektoraddition und skalare Vektormulti- plikation komponentenweise erfolgen, gilt: Vektoren werden komponentenweise subtrahiert.	$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\cdot\ \ 1\ -\ \ 0\\-1+2\cdot\ \ 0\ -\ \ 2\\2+2\cdot(-2)-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$

2. Die Gerade

Parametergleichung der Geraden:

X liegt auf der Geraden durch P in Richtung $\vec{v}$.

$\Updownarrow$

$\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{v}$ für ein $r\in\mathbb{R}$ ($\vec{x}=\overrightarrow{OX}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$).

Gegenseitige Lage zweier Geraden:

Für die Geraden $g:\ \vec{x}=\vec{p}+r\vec{v}$ und $h:\ \vec{x}=\vec{q}+s\vec{w}$ gilt:

1) g und h meiden sich, d. h. haben keinen gemeinsamen Punkt.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p}+r\vec{v}=\vec{q}+s\vec{w}$ hat keine Lösung $(r;s)$.

In diesem Fall gilt weiter:

g und h parallel $\Leftrightarrow$ $\vec{v},\vec{w}$ kollinear
g und h windschief $\Leftrightarrow$ $\vec{v},\vec{w}$ nicht-kollinear

2) g und h schneiden sich in einem Punkt.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p}+r\vec{v}=\vec{q}+s\vec{w}$ hat genau eine Lösung $(r;s)$.

3) g und h fallen zusammen, d. h. sind die gleichen Geraden.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p}+r\vec{v}=\vec{q}+s\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r;s)$.

Koordinatengleichung:

Koordinatengleichung:
$X=(x_1;x_2)$ liegt auf der Geraden $\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{v}$. $\Updownarrow$ $(x_1;x_2)$ erfüllt eine Gleichung $a_1x_1+a_2x_2=b$ mit drei (nur von $\vec{p}$ und $\vec{v}$ abhängigen) Konstanten $a_1, a_2, b\in\mathbb{R}$ und $(a_1;a_2)\neq(0;0)$.

Punkt- Steigungsgleichung

$X=(x_1;\, x_2)$ liegt auf der Geraden durch $P=(p_1;\, p_2)$ mit Steigung m.

$$\Updownarrow$$

$(x_1;\, x_2)$ erfüllt die Gleichung $x_2 - p_2 = m\,(x_1 - p_1)$.

Normalengleichung:

$X=(x_1;\, x_2)$ liegt auf der Geraden mit x_2-Achsenabschnitt p_2 und Steigung m.

$$\Updownarrow$$

$(x_1;\, x_2)$ erfüllt die Gleichung $x_2 = m x_1 + p_2$.

2- Punkte- Gleichung:

$X=(x_1;\, x_2)$ liegt auf der Geraden durch $P=(p_1;\, p_2)$ und $Q=(q_1;\, q_2)$.

$$\Updownarrow$$

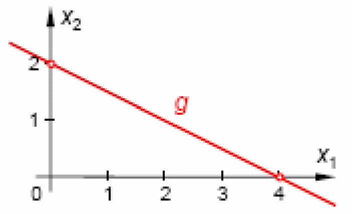
$(x_1;\, x_2)$ erfüllt die Gleichung $(q_1 - p_1)(x_2 - p_2) = (q_2 - p_2)(x_1 - p_1)$.

Achsenabschnittsgleichung:

$X=(x_1;\, x_2)$ liegt auf der Geraden mit x_1-Achsenabschnitt p_1 und x_2-Achsenabschnitt p_2.

$$\Updownarrow$$

$(x_1;\, x_2)$ erfüllt die Gleichung $\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1$.



$g:\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1$

$[\Leftrightarrow\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 2]$

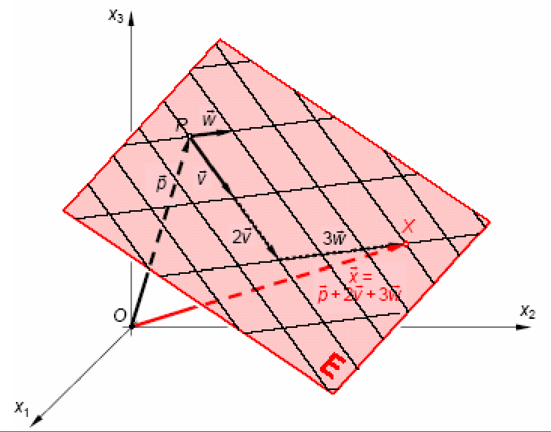
3. Die Ebene

Parametergleichung der Ebene:

X liegt in der durch die nicht-kollinearen Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Ebene durch P.

$$\Updownarrow$$

$\vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w}$ für ein $r, s \in \mathbb{R}$ ($\vec{x} = \overrightarrow{OX}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$).



Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene:

Für die Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{l}$ und die Ebene $E: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ gilt:

1) g ist parallel zu E (und liegt nicht in E).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{l} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat keine Lösungen $(r; s; t)$.

2) g und E schneiden sich in einem Punkt (dem Durchstosspunkt).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{l} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat genau eine Lösung $(r; s; t)$.

3) g liegt in E.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{l} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t)$.

Gegenseitige Lage zweier Ebenen:

Für zwei Ebenen $E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j}$ und $F: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ gilt:

1) E und F sind parallel (und fallen nicht zusammen).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat keine Lösung $(r; s; t; u)$.

2) E und F schneiden sich in einer Geraden.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t; u)$, wobei genau *einer* der Parameter r, s, t, u frei gewählt werden kann.

3) E und F fallen zusammen (d.h. stellen die *gleiche* Ebene dar).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t; u)$, wobei genau *zwei* der Parameter r, s, t, u frei gewählt werden können.

Koordinatengleichung der Ebene:

$X = (x_1; x_2; x_3)$ liegt in der Ebene $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$.

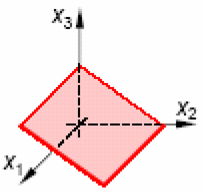
$\Updownarrow$

$(x_1; x_2; x_3)$ erfüllt eine Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit vier (nur von $\vec{p}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ abhängigen) Konstanten $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ und $(a_1; a_2; a_3) \neq$
$\neq (0; 0; 0)$.

a) $a_1 = 0$ (d.h. $a_2x_2 + a_3x_3 = b$)

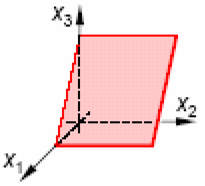
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.

[Da x_1 in der Gleichung nicht auftritt, ist mit jedem Punkt auch gleich eine ganze Parallele zur x_1-Achse durch diesen Punkt Lösung der Koordinatengleichung $a_2x_2 + a_3x_3 = b$.]



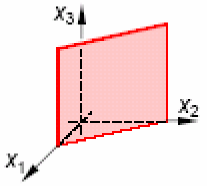
b) $a_2 = 0$ (d.h. $a_1x_1 + a_3x_3 = b$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse.



c) $a_3=0$ (d.h. $a_1x_1+a_2x_2=b$)

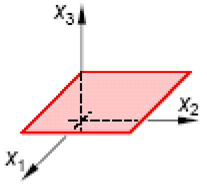
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.



d) $a_1=a_2=0$ (d.h. $a_3x_3=b$)

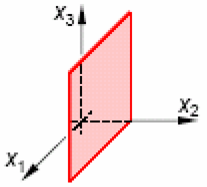
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1x_2-Koordinatenebene.

[Die Ebene ist nämlich gemäss a) und b) parallel zur x_1-Achse *und* x_2-Achse]



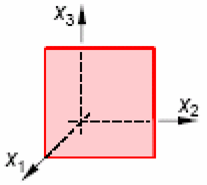
e) $a_1=a_3=0$ (d.h. $a_2x_2=b$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1x_3-Koordinatenebene.



f) $a_2=a_3=0$ (d.h. $a_1x_1=b$)

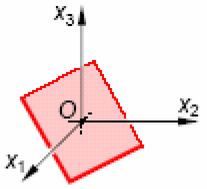
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene.



g) $b=0$ (d.h. $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene enthält den Ursprung O des Koordinatensystems.

$[0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0]$



Achsenabschnittsgleichung:

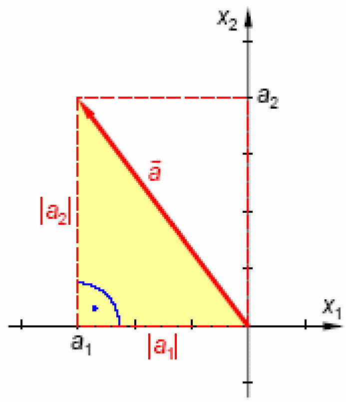
$X=(x_1;x_2;x_3)$ liegt in der nicht durch den Koordinatenursprung O gehenden Ebene mit den drei Achsenabschnitten p_1, p_2, p_3.

$$\Updownarrow$$

$(x_1;x_2;x_3)$ erfüllt die Gleichung $\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\frac{x_3}{p_3}=1$.

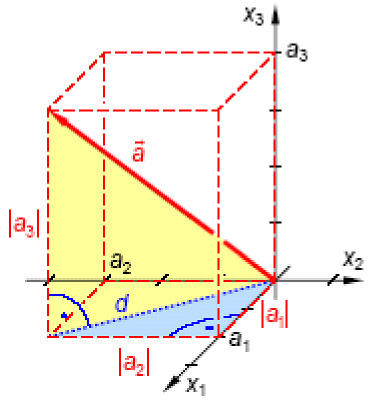
4. Längenmessung

Betrag eines Vektors:



$$|\vec{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



$$|\vec{a}|^2 = d^2 + |a_3|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Einheitsvektoren:

Für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ hat das Vielfache $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ wegen Satz $\boxed{32}$ (I) bzw. (II) die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag

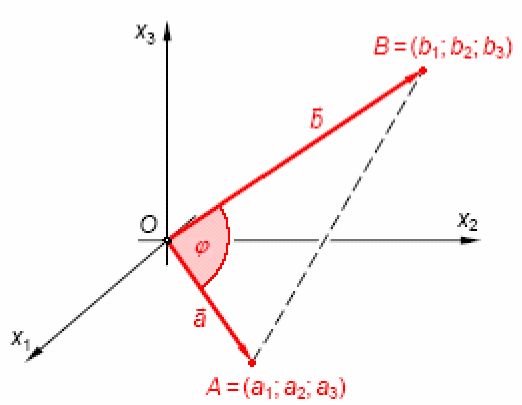
$$\left|\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\right| \overset{(II)}{=} \underbrace{\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right|}_{>0} \cdot |\vec{a}| \overset{(I)}{=} \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1.$$

Man nennt $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ den zu $\vec{a}$ gehörigen **Einheitsvektor** $\vec{e}_{\vec{a}}$.

5. Winkelmessung

Das Skalarprodukt

Winkel zwischen zwei Vektoren:



$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad \text{und schliesslich} \quad \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{mit} \quad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad \text{bzw.} \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gleichgerichtet, d.h. $0° = \sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

b) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ spitz, d.h. $0° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 90°$ $\Leftrightarrow$ $0 < \vec{a} \bullet \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$, d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

d) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ stumpf, d.h. $90° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 180°$ $\Leftrightarrow$ $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| < \vec{a} \bullet \vec{b} < 0$

e) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gegengerichtet, d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180°$ $\Leftrightarrow$ $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \bullet \vec{b}$

Algebraische Eigenschaften des Skalarproduktes:

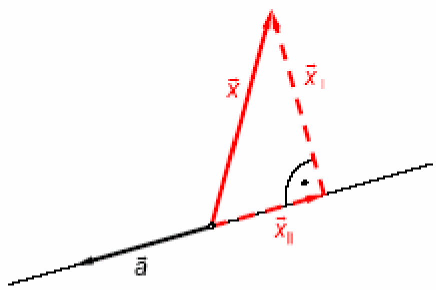
(I) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

(II) $(r \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (r \cdot \vec{b})$ $(r \in \mathbb{R})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

(III) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) + (\vec{b} \bullet \vec{c}) =: \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$ (Distributivgesetz bez. „+“)

Beispiel:

Gegeben sei ein Vektor $\vec{a}\ (\neq \vec{0})$. Es soll ein beliebiger Vektor $\vec{x}$ in einen zu $\vec{a}$ parallelen Vektor $\vec{x}_{\parallel}$ und in einen zu $\vec{a}$ senkrechten Vektor $\vec{x}_{\perp}$ zerlegt werden.

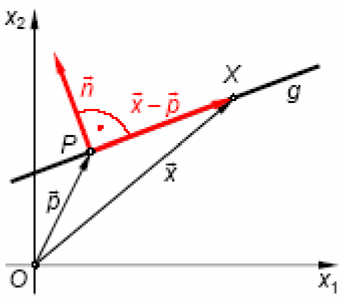


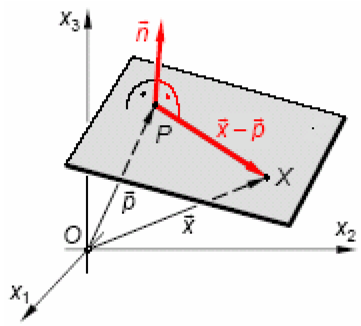
Es sei $\vec{a}\ (\neq \vec{0})$ ein gegebener Vektor. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{x}$ die Zerlegung $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$, wobei

$\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \bullet \vec{e}_{\vec{a}}) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}$ parallel zu $\vec{a}$ und

$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{x} \bullet \vec{e}_{\vec{a}}) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}$ senkrecht zu $\vec{a}$ liegt.

Normalengleichung der Ebene:





Der Punkt X liegt auf der senkrecht auf $\vec{n}$ stehenden Geraden g bzw. Ebene E durch den Punkt P.

$\Updownarrow$

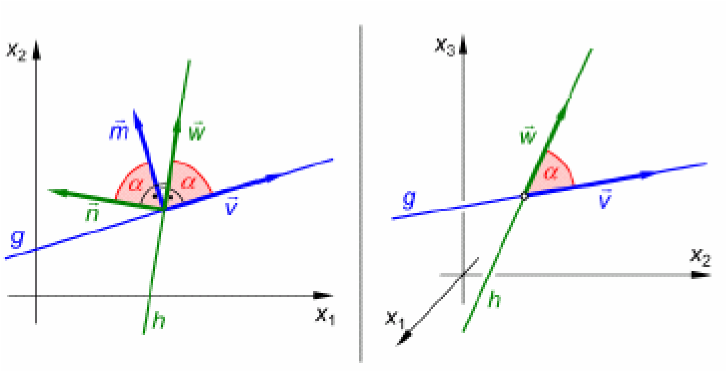
$\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ $\quad (\vec{x} = \overrightarrow{OX},\ \vec{p} = \overrightarrow{OP})$.

Für die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Für die Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Schnittwinkel:

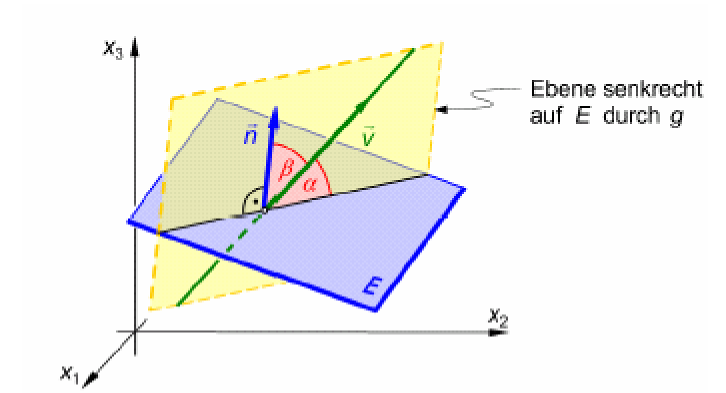
Schnittwinkel zweier Geraden:



Der spitze Schnittwinkel α zweier sich schneidenden Geraden

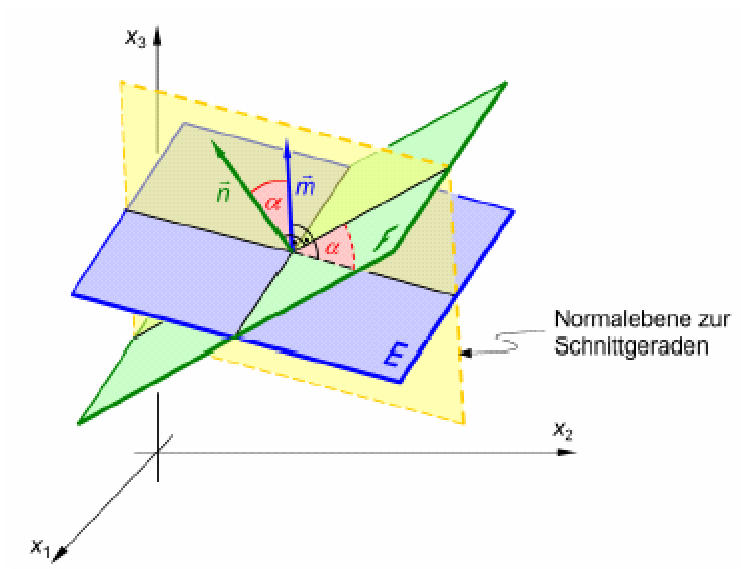
- $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ beträgt $\alpha = \arccos\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}$,
- $g: m_1x_1 + m_2x_2 = b$ und $h: n_1x_1 + n_2x_2 = c$ beträgt $\alpha = \arccos\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$.

Schnittwinkel zweier Geraden und einer Ebene:



Der spitze Schnittwinkel α einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ und einer Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$ beträgt $\alpha = \arcsin\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$.

Schnittwinkel zweier Ebenen:



Der spitze Schnittwinkel α zweier Ebenen $E: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = b$ und $F: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = c$ beträgt $\alpha = \arccos\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$.

Das Vektorprodukt:

Definition:

Um eine Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{v} + s\vec{w}$ einer Ebene einfacher als in Beispiel $\boxed{16}$ in eine Koordinatengleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ umzuformen, müssen wir gemäss Satz $\boxed{32}$ nur einen Vektor $\vec{a}$ kennen, der senkrecht auf der Ebene, d.h. auf $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ steht (b ergibt sich dann durch Einsetzen des Stützpunktes). Auch in der Physik ist das Problem häufig, zu zwei gegebenen Vektoren einen dritten Vektor zu finden, der senkrecht auf den beiden anderen steht (Drehmoment, Lorenz-Kraft, usw.). Wir lösen deshalb dieses Problem ein für alle Mal.

Gegeben seien im dreidimensionalen Koordinatensystem zwei nicht-kollineare Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Für den gesuchten Vektor $\vec{c}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen soll und dessen Betrag durch diese Bedingungen nicht festgelegt, sondern noch frei wählbar ist, gilt

$$\begin{matrix} \vec{a} \bullet \vec{c} = 0 & \Leftrightarrow \\ \vec{b} \bullet \vec{c} = 0 & \Leftrightarrow \end{matrix} \left| \begin{matrix} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix} a_1c_1 & +a_2c_2 & +a_3c_3 = 0 \\ & (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 & +(a_1b_3 - a_3b_1)c_3 = 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} (1') = (1) \\ (2') = a_1 \cdot (2) - b_1 \cdot (1) \end{matrix}$$

Den Wert von c_3 können wir wie erwartet selber festlegen. Um Brüche zu verhindern, setzen wir $c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$. Falls nun $c_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, folgt aus (2') nach Division der Gleichung durch diese Zahl

$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

und aus (1) sodann, falls $a_1 \neq 0$,

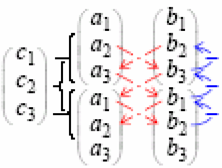
$$c_1 = \frac{-a_2c_2 - a_3c_3}{a_1} = \frac{\cancel{-a_2a_3b_1} + \cancel{a_1}a_2b_3 - \cancel{a_1}a_3b_2 \cancel{+a_2a_3b_1}}{\cancel{a_1}} = a_2b_3 - a_3b_2 \ .$$

Man erhält $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ und kann sich durch Einsetzen in (1) und (2) leicht überzeugen, dass dieser Vektor *immer*, selbst in den Fällen $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ oder $a_1 = 0$ Lösung des Problems ist.

Man nennt diesen Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** (oder auch **Kreuzprodukt**) von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und schreibt dafür kurz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (gelesen „Vektor a Kreuz Vektor b").

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} .$$

Merkregel:



Geometrische Eigenschaften:

(I) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(II) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$, das heisst:

Die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(III) Für nicht-kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ kollinear $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Algebraische Eigenschaften:

(I) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}) =: -\vec{b}\times\vec{a}$ (Anti-Kommutativgesetz)

(II) $(r\cdot\vec{a})\times\vec{b} = r\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(r\cdot\vec{b})$ $(r\in\mathbb{R})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

(III) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c}) =: \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (Distributivgesetz bezüglich
$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c}) =: \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ Vektoraddition „+")

Das lineare Gleichungssystem

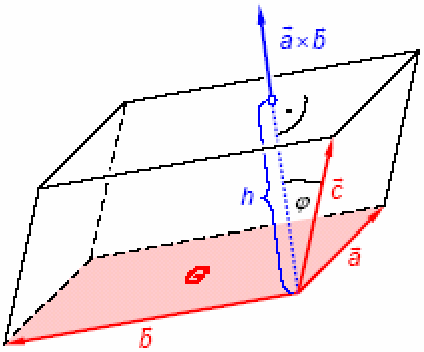
$$\left|\begin{array}{l} a_1x_1+b_1x_2=c_1 \\ a_2x_1+b_2x_2=c_2 \end{array}\right|$$

hat für $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ die Lösung

$$(x_1;\, x_2) = \left(\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ; \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right).$$

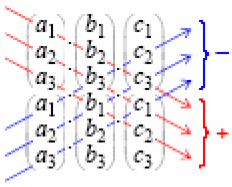
Für $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ hat das Gleichungssystem keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Das Spatprodukt:



$$V = \underbrace{\text{Grundfläche } G}_{|\vec{a}\times\vec{b}|} \cdot \underbrace{\text{Höhe } h}_{|\vec{c}|\cdot|\cos\varphi|} = \left| |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi \right| = |(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}|$$

Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Merkregel:



$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar .