HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

MASCHINENTECHNIK

Vektorgeometrie 1

Kapitel 1-3

Dozent	R. Bernhardsgrütter
Autor / Student	A. Höller
Erstellt am	20. Dezember 2004

Wo find ich was?

Grundlagen

Vektoren Addition, Subtraktion und assoziativ sowie komutativ Gesetz

Graphische Addition und Subtraktion

Vektoren Addition können addiert und subtrahiert (bzw. negativ addiert) werden. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
Die Vektoren Addition ist kommutativ (vertauschbar) sowie assoziativ („verbindbar" → Klammern)

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(I)} & r\cdot(\vec{a}+\vec{b})=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b} \\
\text{(II)} & (r+s)\cdot\vec{a}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{a} \\
\text{(III)} & r\cdot(s\cdot\vec{a})=(r\cdot s)\cdot\vec{a}
\end{array}\right\} \quad r,s\in\mathbb{R}$$

Mathematische Addition und Subtraktion / Vektorenaddition im Koordinatensystem

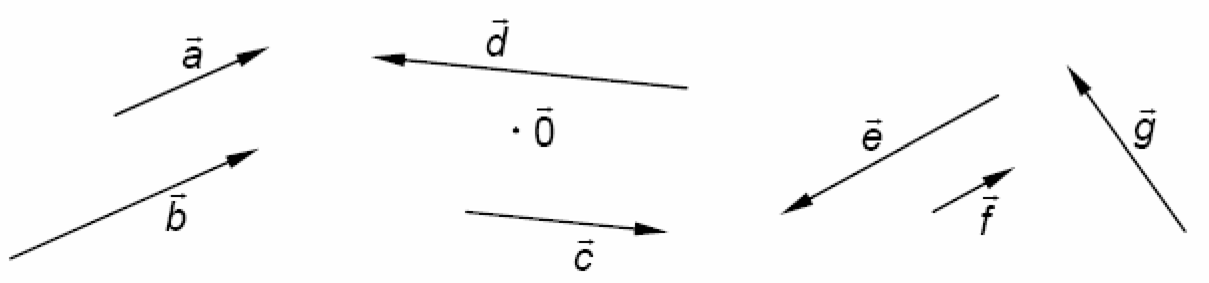
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=$$

$$=(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2+(a_3+b_3)\vec{e}_3=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation von Vektoren im Koordinatensystem

$$r\cdot\vec{a}=r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=r\cdot(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)=r\cdot a_1\cdot\vec{e}_1+r\cdot a_2\cdot\vec{e}_2+r\cdot a_3\cdot\vec{e}_3=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}$$

Zerlegungssätze

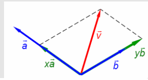


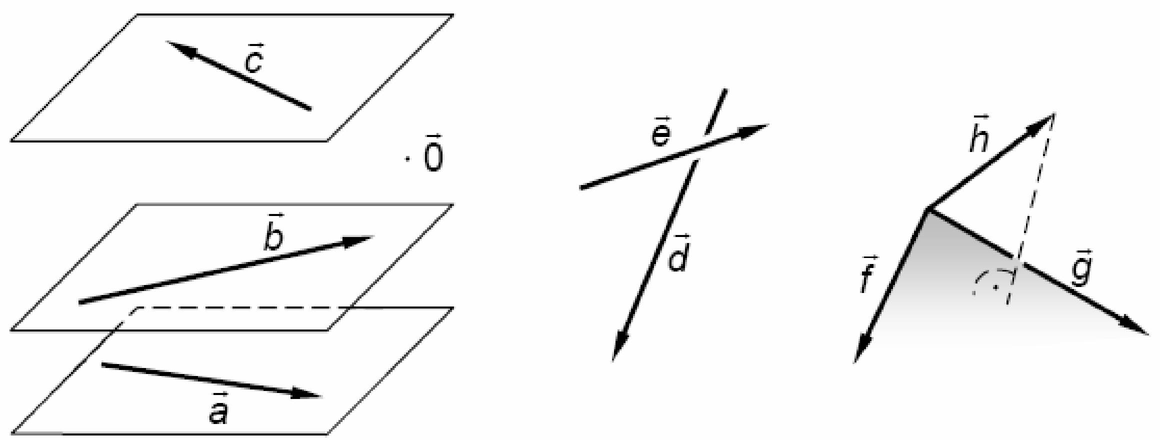
a und b sind **kollinear** c, d und O sind **kollinear** e,f und g sind **nicht kollinear**

$\vec{a}, \vec{b}$ sind zwei *nicht-kollineare* Vektoren einer Ebene.

$$\Updownarrow$$

Jeder Vektor $\vec{v}$ der Ebene kann auf *genau eine* Art als Linearkombination $x\vec{a} + y\vec{b}$ dargestellt werden.



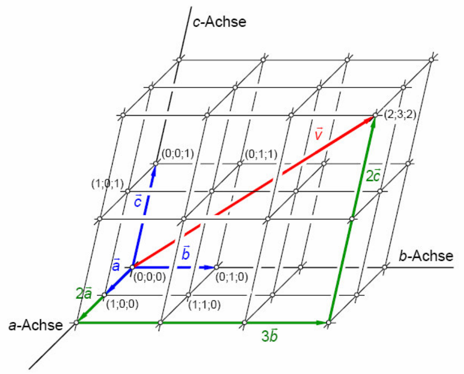


a, b und c sind **komplanar**	zwei Vektoren d und e sind **immer komplanar**	f,g und h sind nicht komplanar (→ **windschief**)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind drei *nicht-komplanare* Vektoren des Raumes.

$$\Updownarrow$$

Jeder Vektor $\vec{v}$ des Raumes kann auf *genau eine* Art als Linearkombination $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ dargestellt werden.



Die Gerade

Parametergleichung für die Gerade: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}$

$\vec{p}$ = Stützvektor; $\vec{v}$ = Richtungsvektor und r ist der Parameter der Geraden (Faktor)

Gegenseitige Lage zweier Geraden

1. die zwei Geraden schneiden sich: Um zu analysieren ob sich zwei Geraden schneiden können die Parametergleichungen gleich gesetzt werden: $\vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}$

2. die zwei Geraden meiden sich: sofern nach der Gleichsetzung der beiden Parameter ein „falscher Wert“ (4=5) resultiert, meiden sich die Geraden.
3. die zwei Geraden liegen aufeinander, sofern nach der Gleichsetzung der beiden Parameter ein „allgemeiner Wert“ (0=0) resultiert, fallen die Geraden zusammen.

Die Ebene

Parametergleichung für die Ebene: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

$\vec{p}$ = Stützvektor; $\vec{v}$ und $\vec{w}$ = Spannvektor, r und s sind die Parameter der Ebene (Faktor)

Gegenseitige Lage zweier Ebenen

1. die beiden Ebenen schneiden sich, die Parametergleichungen gleichsetzten, es bleiben zwei Variablen bestehen → „Schnittmenge“ ist eine Gerade!
2. die beiden Ebenen sind parallel, Das Gleichungssystem hat keine Lösungen! Sprich 0=5.
3. die beiden Ebenen liegen aufeinander; 0=0. Es gibt **unendlich** viele Lösungen!

Quellen

- Skript von R. Bernhardsgrütter