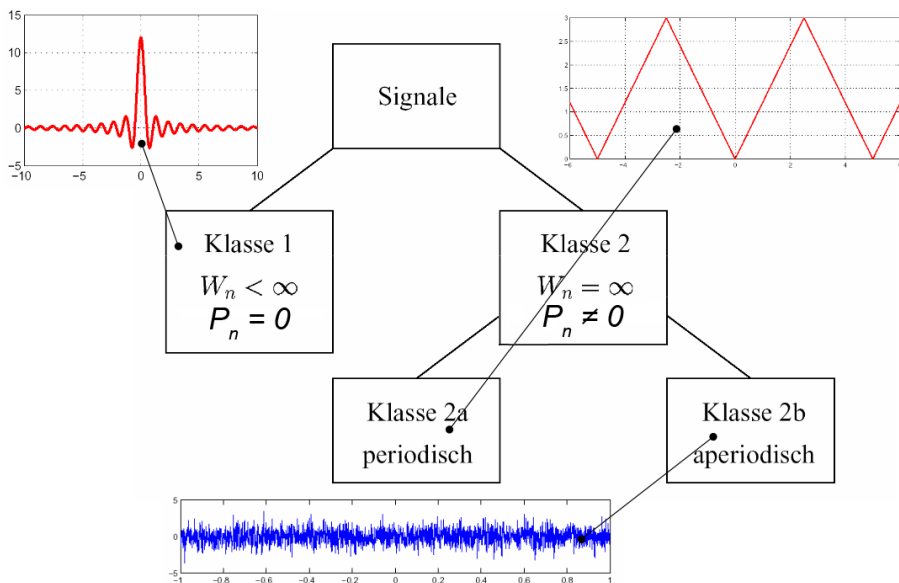


1 Signalbeschreibung **Skript S.1**

1.1 Energie- und Leistungssignale **Skript S.3**



Klasse 1: Energiesignal
 Klasse 2: Leistungssignal

Normierte Signalenergie

$$E_n = W_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

Normierte Signalleistung

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{T} \right) d\omega$$

1.2 Mittelwerte **Skript S.5**

Arithmetischer Mittelwert,
 Gleichwert, Linearer MW

$$X_0 = \bar{X} = X_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

Ist die Fläche unter der Zeitfunktion über eine Periode.

Quadratischer MW, Leistung

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt$$

$$X^n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^n(t) dt \text{ (MW } n. \text{ Ordnung)}$$

Effektivwert

$$X = X_{\text{eff}} = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

Gleichrichtwert

$$X_{|m|} = |\bar{X}| = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$

Arithm. Mittelwert der Zweiweggleichrichterschaltung

Varianz, Standardabweichung

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - X_0)^2 dt = X^2 - X_0^2$$

Mittl. Fehler im Quadrat

1.3 Funktionen

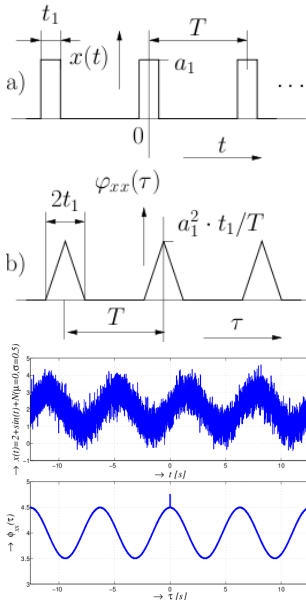
Autokorrelationsfunktion (AKF)

“Wie weit wird die Zukunft von der Vergangenheit geprägt?”

Für **Energiesignale** (Klasse 1):

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt = \varphi_{xx}(-\tau)$$

Skript S.8



Für **periodische Leistungssignale** (Klasse 2a):

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt = \varphi_{xx}(-\tau)$$

Für **nichtperiodische, stochastische Leistungssignale** (Klasse 2b):

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)dt = \varphi_{xx}(-\tau)$$

Eigenschaften

- $\varphi_{xx}(0) = X^2$ (Hat immer Diracstoss bei $\tau = 0$)
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau \pm mT)$, d.h. die AKF ist periodisch mit der gleichen Periode T wie das Signal $x(t)$.
- $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$: d.h. die AKF ist eine **gerade Funktion**
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\tau)|$
- $\varphi_{xx}(\tau) \geq (X_0)^2 - \sigma^2$

$$x(t) = a_k \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{a_k^2}{2} \cos(\omega t)$$

$$x(t) = b_k \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi_{xx}(t) = \frac{b_k^2}{2} \cos(\omega t)$$

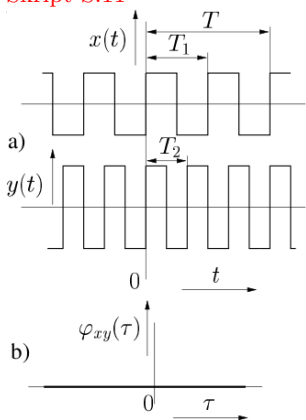
Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

“Wie ähnlich sind sich zwei Signale?” (Matlab: xcorr)

Für **Energiesignale** (Klasse 1):

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$$

Skript S.11



Für **periodische Leistungssignale** (Klasse 2a):

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$$

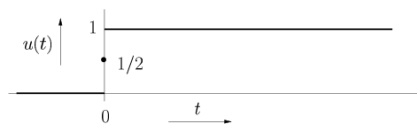
Für **nichtperiodische, stochastische Leistungssignale** (Klasse 2b):

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)dt$$

Bei Signalen mit verschiedenen Frequenzen ist φ_{xy} immer 0!

Sprungfunktion Skript S.16

Einschaltfunktion, Einheitssprung, Heaviside-Funktion (Matlab: `heaviside`)

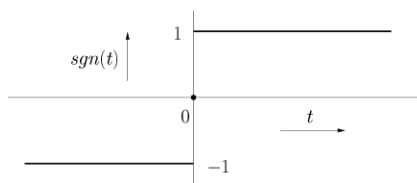


$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L} : u(t) \circ \bullet \frac{1}{s}$$

Signumfunktion Skript S.16

Vorzeichenfunktion (Matlab: `sign`)

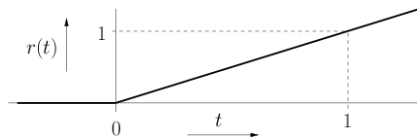


$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : \text{sgn}(t) \circ \bullet \frac{-2j}{\omega}$$

Rampenfunktion Skript S.17

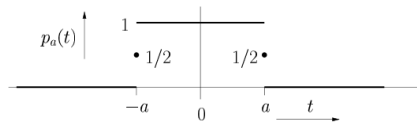
(Matlab: `ramp`)



$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} : r(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2}$$

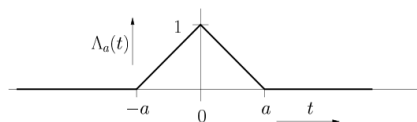
Rechteckimpuls Skript S.17



$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < a \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : p_a(t) \circ \bullet 2a \text{sinc}(a\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega)$$

Dreieckimpuls Skript S.18

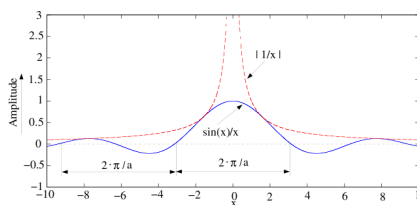


$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{für } |t| \geq a \end{cases}$$

$$\mathcal{F} : \Lambda_a(t) \circ \bullet a \left(\frac{\sin(\frac{a\omega}{2})}{\frac{a\omega}{2}} \right)^2 = a \text{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

Sincfunktion Skript S.18

(Matlab: `sinc`)



$$\text{sinc}_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t} \quad \text{sinc}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t}$$

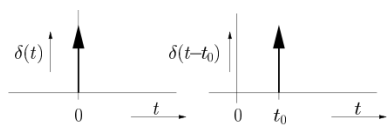
$$\mathcal{F} : \text{sinc}_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{t} \circ \bullet \pi p_\alpha(\omega)$$

$$\mathcal{F} : \text{sinc}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \circ \bullet \frac{\pi}{\alpha} p_\alpha(\omega)$$

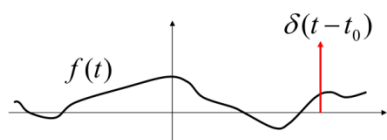
Impulsfunktion Skript S.19

Diracimpuls, Diracstoss, Deltaimpuls (Matlab: `dirac`)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Siebungseigenschaft



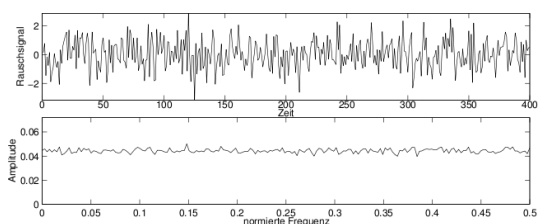
1.	$\delta(at) = \frac{1}{ a } \delta(t)$	Skalierung
2.	$\delta(\frac{t-t_0}{a}) = a \cdot \delta(t-t_0)$	Skalierung und Verschiebung
3.	$\delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0)$	symmetrisch
4.	$\delta(-t) = \delta(t)$	$\delta(t) =$ gerade Funktion
5.	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$	Siebungseigenschaft
6.	$\delta(t-t_0) f(t) = f(t_0) \delta(t-t_0)$	Abstastung
7.	$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t) dt = A$	Spezialfall der Siebungseigenschaft
8.	$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$	Faltung
9.	$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$	Faltung
10.	$\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$	Ableitung des Einheitssprungs
11.	$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$	Definition
12.	$\mathcal{L}, \mathcal{F} : \delta(t) \circ \bullet 1$	Frequenzbereich

Rauschen Skript S.22

(Matlab: `randn`)

Ist die Intensität der Rauschspannung über viele Frequenzdekaden gleich verteilt, so spricht man von weissem Rauschen.

Signal to Noise Ratio: $SNR = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}}$ (rauschfrei $\rightarrow \infty$)



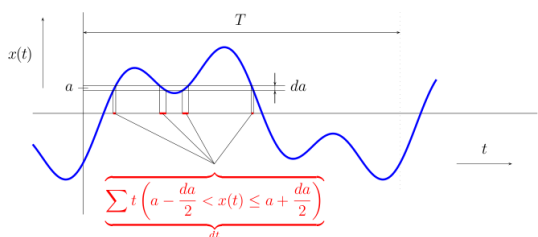
Effektive Rauschspannung / -leistung

$$U_r = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot R}$$

$$P_r = k \cdot T \cdot \Delta f$$

1.4 Amplitudenanalyse Skript S.24

“Zeit während sich Signal in bestimmtem Amplitudenintervall aufhält”



$$p(a) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{\sum t \left(a - \frac{da}{2} < x(t) \leq a + \frac{da}{2} \right)}{T \cdot da} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\partial a / \partial t}$$

$$\int p(a) da = 1$$

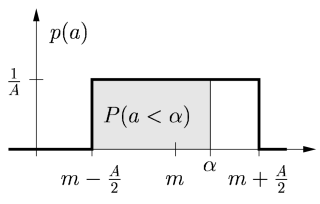
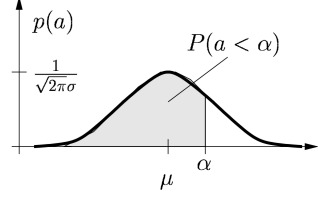
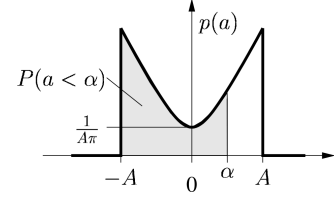
Linearer Mittelwert

$$X_0 = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot p(a) da$$

Mittelwert n. Ordnung

$$X^n = \int_{-\infty}^{\infty} a^n \cdot p(a) da$$

Zusammenstellung verschiedener Verteilungen Skript S.26

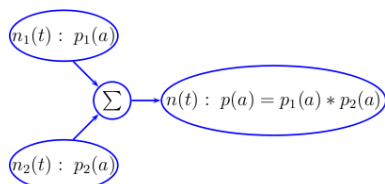
Verteilung	gleichverteilt	gaussförmig	sinusförmig
			
Amplitudendichte $p(a) =$	$\begin{cases} \frac{1}{A} & a - m \leq \frac{A}{2}, \\ 0 & a - m > \frac{A}{2}. \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - a^2}} & a \leq A, \\ 0 & a > A. \end{cases}$
Wahrscheinlichkeit, dass die Amplitude a kleiner gleich α ist $P(a \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} p(a) da =$	$\begin{cases} 0 & \alpha < m - \frac{A}{2}, \\ \frac{\alpha - (m - \frac{A}{2})}{A} & \alpha - m \leq \frac{A}{2}, \\ 1 & \alpha \geq m + \frac{A}{2}. \end{cases}$	$Q\left(\frac{\mu - \alpha}{\sigma}\right)$	$\begin{cases} 0 & \alpha \leq -A, \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{A}\right)\right) & \alpha < A, \\ 1 & \alpha \geq A. \end{cases}$
Mittelwert $X_0 =$	m	μ	0
Varianz $\text{Var}(x) =$	$\frac{A^2}{12}$	σ^2	$\frac{A^2}{2}$
Leistung $X^2 =$	$m^2 + \frac{A^2}{12}$	$\mu^2 + \sigma^2$	$\frac{A^2}{2}$

Faltung Skript S.28

Convolution, "Addition zweier unabhängiger ergodischer Prozesse n_i " (Matlab: conv)

$$p(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\xi) \cdot p_2(a - \xi) d\xi = p_1(a) * p_2(a) = p_2(a) * p_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\xi) \cdot p_1(a - \xi) d\xi$$

Die Breite des Faltungsproduktes entspricht der Summe der Breite der einzelnen Faktoren.



Faltung im Zeitbereich → Multiplikation im Frequenzbereich

$$f(t) * g(t) \circ \bullet \bullet F(s)G(s)$$

Faltung im Frequenzbereich → Multiplikation im Zeitbereich

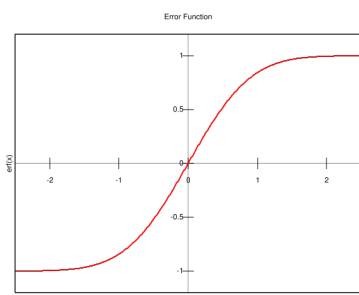
$$F(s) * G(s) \bullet \bullet \bullet \frac{1}{2\pi} f(t)g(t)$$

Q-Funktion Skript S.35

"Wahrscheinlichkeit eines Fehlers" (Matlab: erf, erfc)

Wenn die Resultate einer Messserie mit einer Normalverteilung mit Varianz σ und Erwartungswert 0 auftreten, dann ist $\text{erf}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Messwert zwischen $-a$ und a liegt.

Tabelle Skript S.44



$$Q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$Q(\xi) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

2 Systeme **Skript S.95**

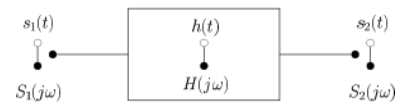
2.1 Begriffe

Bezeichnung	Beschreibung	Bedingung, Erkennung
Wirkungsfreiheit Skript S.95	Eingang des System hochohmig	Kaskadierte Systeme durch Einheitsverstärker verbunden
Statische bzw. dynamische Systeme Skript S.96	Ohne bzw. mit Gedächtnis	Statisch: $u_2(t)$ nur vom Eingangssignal $u_1(t)$ bei t abhängig Dynamisch: $\int dt$; $\frac{d}{dt}$; $f(t \pm t_0)$
Kausale bzw. akausale Systeme Skript S.99	Keine zukünftigen Werte bzw. nicht in "Echtzeit"	Kausal: $f(t - t_0)$; $\int^t f(\tau) d\tau$ ($t_0 > 0$) Statische Systeme sind immer kausal. Akausal: $f(-t)$; $f(t + t_0)$; $\int^{t+t_0} f(\tau) d\tau$
Zeitinvariante bzw. zeitvariante Systeme Skript S.104	Von der Zeit (un-) abhängig	Zeitvariant: $\cos(t)x(t)$; $t^\alpha x(t)$ ($\alpha \neq 0$) Zeitinvariant: $S(x(t - t_0)) = S(x) \cdot x(t - t_0)$
Lineare bzw. nichtlineare Systeme Skript S.105		Nichtlinear: $f^\alpha(t)$; $\alpha + f(t)$ Kennlinie nicht durch Ursprung. Linear: $S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2)$ $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$

2.2 Übertragungsfunktion von LTI-Systemen **Skript S.108**

$$h(t) \circ \bullet H(s)$$

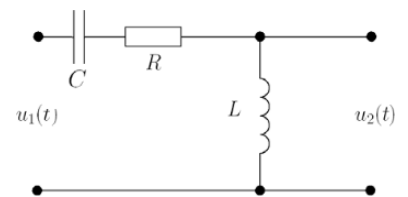
$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) \circ \bullet S_2(s) = H(s)S_1(s)$$



Kaskadierung von wirkungsfreien Systemen: $H_{total}(s) = H_1(s)H_2(s)$ bzw. bei n gleichen Systemen: $H_{total} = (H(s))^n$

Beispiel: Gesucht UTF $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$H(s) = \frac{sL}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{s^2}{\frac{1}{LC} + s\frac{R}{L} + s^2}$$



$$\implies \text{Pole bei } s = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} ; \text{ Doppelte Nullstelle bei } s = 0$$

Differentialgleichung: $\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y = \ddot{x}(t)$

2.3 Berechnung des Amplituden- und Phasengangs aus der Übertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{Amplitudengang}} e^{j \underbrace{\Theta(\omega)}_{\text{Phasengang}}} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} e^{j(\arg(Y(j\omega)) - \arg(X(j\omega)))} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} e^{j[\arctan\left(\frac{\text{Im}\{Y(j\omega)\}}{\text{Re}\{Y(j\omega)\}}\right) - \arctan\left(\frac{\text{Im}\{X(j\omega)\}}{\text{Re}\{X(j\omega)\}}\right)]}$$

2.4 Zusammenhang zwischen Impuls- & Einheitsprungantwort, Endwerte **Skript S.109**

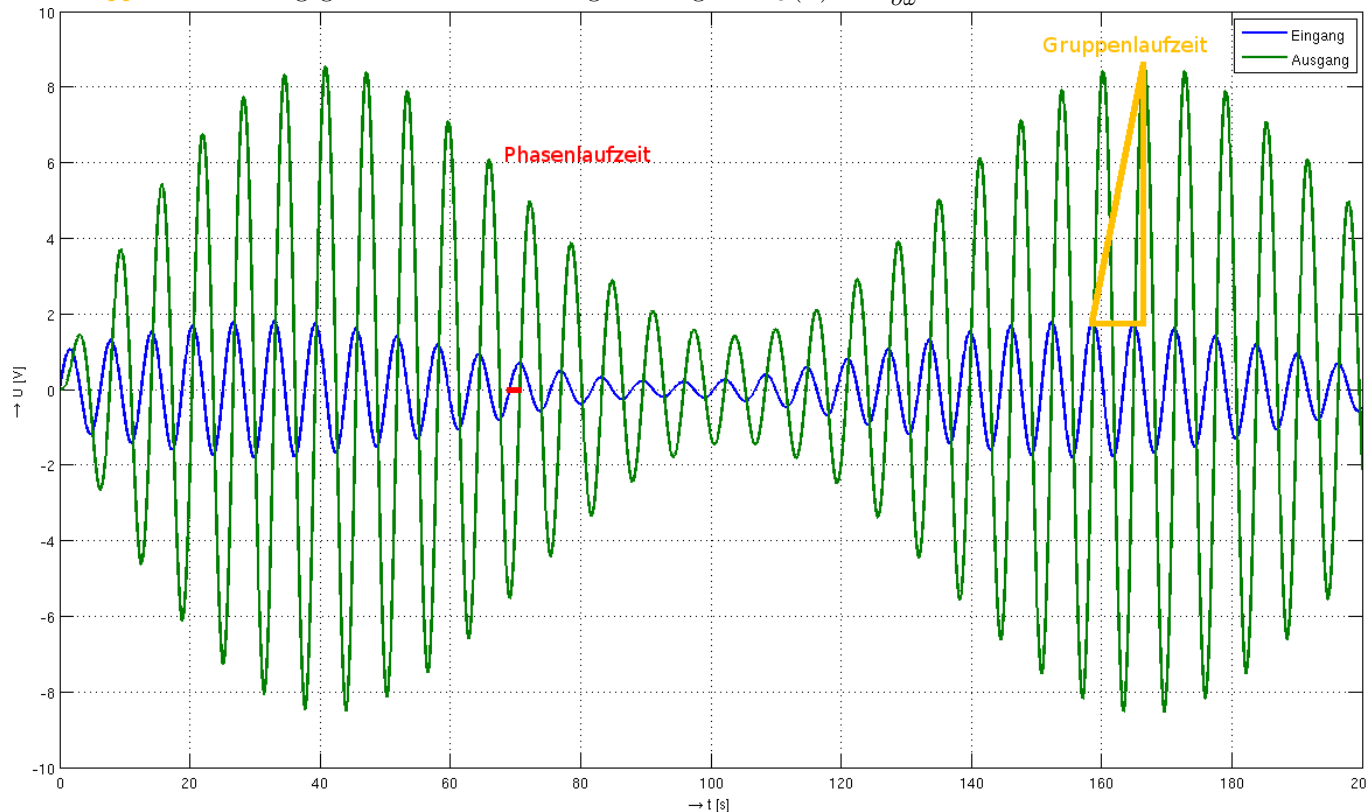
Einheitsprungantwort $g(t)$, Impulsantwort $h(t)$

$$h(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$$

2.5 Phasen- & Gruppenlaufzeit **Skript S.116**

Die **Phasenlaufzeit** ist nur für reine Sinussignale bestimmbar: $\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$

Die **Gruppenlaufzeit** hingegen ist für sämtliche Signale möglich: $\tau_G(\omega) = \frac{-\partial\theta(\omega)}{\partial\omega}$



Eingangssignal $x(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ des Systems $H(s) = \frac{1}{s^2+0.2s+1}$. Bemerkung: $y(t)$ ist grösser als $x(t)$.

2.6 Stabilität von LTI-Systemen

2.6.1 Asymptotische Stabilität **Skript S.112**

Stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ Pole **nur** in der linken s-Halbebene.

Instabil: Mind. ein Pol in der rechten s-Halbebene oder mind. ein **mehrfacher** Pol auf der j -Achse der s-Ebene.

Grenzstabil: mindestens ein **einfacher** Pol auf der j -Achse

2.6.2 Stabilität mit Hurwitz-Polynom **Skript S.113**

Es wird jeweils das Polynom im **Nenner der Übertragungsfunktion** betrachtet: $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

N	$P(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom (stabil)	$P(s)$ ist ein modifiziertes Hurwitz-Polynom (grenzstabil)
1	gilt für alle $P(s)$	$a_0 = 0$
2	gilt für alle $P(s)$	$a_1 = 0$
3	$a_1 a_2 > a_0 a_3$	$a_1 a_2 = a_0 a_3$
4	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_1^2 a_4$	$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) = a_1^2 a_4$
5	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ und $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$	$a_3 a_4 > a_2 a_5$ $(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) = (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2$

- Wenn ein **Koeffizient negativ** ist ($a_x < 0$), dann ist das System **instabil**.
- Wenn **alle Koeffizienten negativ** sind, kann -1 ausgeklammert werden und in den Zähler verschoben werden \Rightarrow **System stabil** oder **grenzstabil** (siehe Punkt 3)
- Wenn ein **Koeffizient nicht vorhanden** ist ($a_x = 0$), dann ist das System evtl. grenzstabil, d.h. es ist eine **Überprüfung mit modifiziertem Hurwitz-Polynom** nötig.

2.7 Klirrfaktor **Skript S.122**

Als Mass für nichtlineare Verzerrungen gilt der *Klirrfaktor*. Betrachtet wird jeweils der Effektivwert am Ausgang

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Teilkirrfaktor (frequenzselektiv)	$k_m = \frac{U_m}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$
Klirrdämpfungsmaß	$a_k = 20 \log\left(\frac{1}{k}\right)$
Teilkirrdämpfungsmaß	$a_k = 20 \log\left(\frac{1}{k_m}\right)$

2.8 Total Harmonic Distortion (THD) **Skript S.122**

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}} \quad \infty > \text{THD} \geq k \geq 0; \quad \text{Für kleine Verzerrungen: THD} \approx k$$