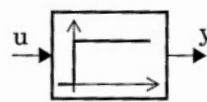
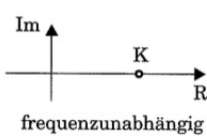
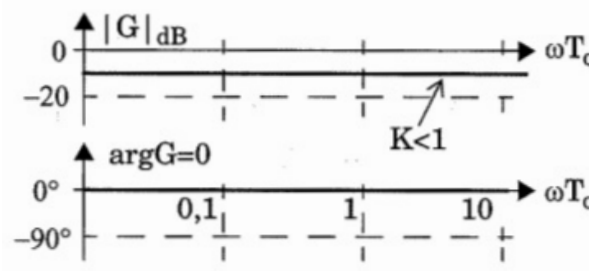
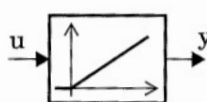
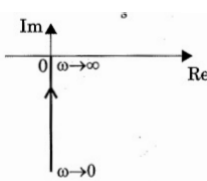
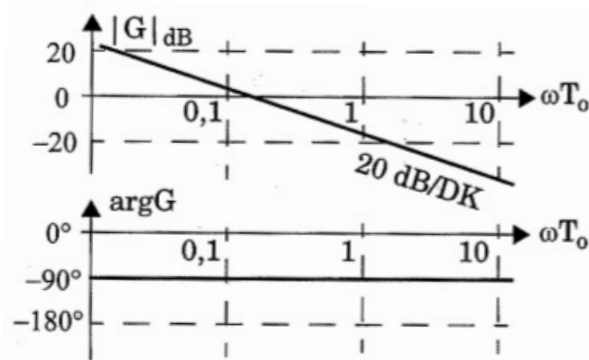
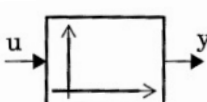
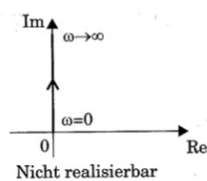
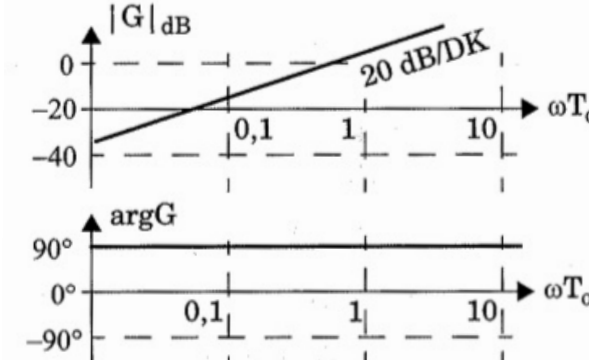
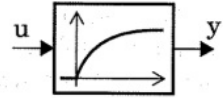
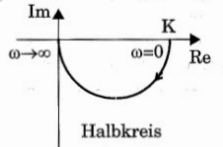
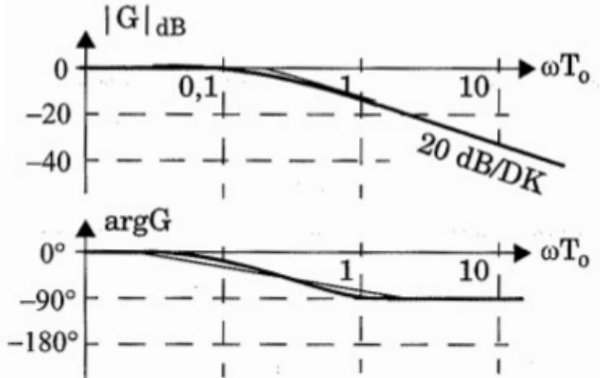
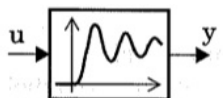
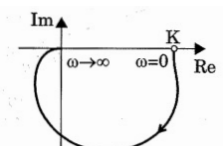
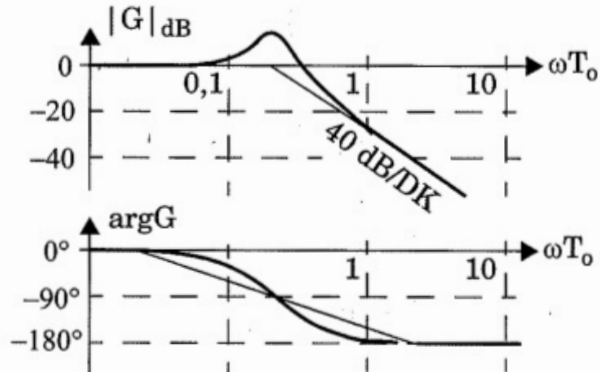
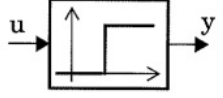
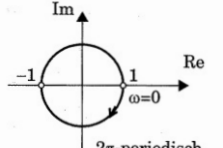
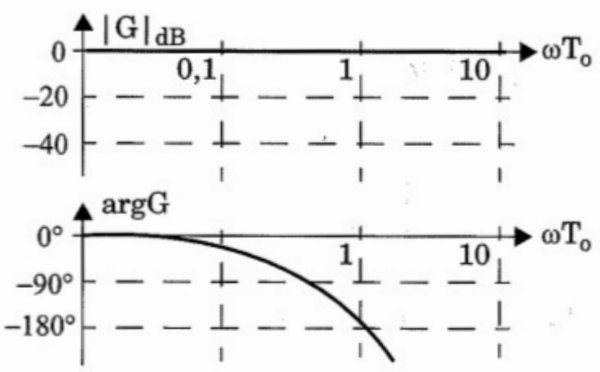


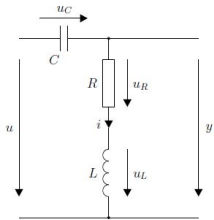
# LTI-Grundglieder

Typ	Symbol	Gleichung, Dgl Sprungantwort Frequenzgang, Betrag und Argument
	Nyquistdiagramm	Bodediagramm
P		$y = Ku$ $u = 1(t)$ $y = K1(t)$ $G(j\omega) = K$ $ G  = K$ $argG = 0$
		
I		$\dot{y} = Ku$ $u = 1(t)$ $y = Kt$ $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ $ G  = \frac{K}{\omega}$ $argG = -\frac{\pi}{2}$
		
D	$K_D$ 	$y = K\dot{u}$ $u = 1(t)$ $y = K\delta(t)$ $G(j\omega) = Kj\omega$ $ G  = K\omega$ $argG = \frac{\pi}{2}$
		

<p><math>PT_1</math></p> 	$T\dot{y} + y = Ku \quad y(0) = 0$ $u = 1(t) \quad y = K \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$ $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \quad  G  = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad \arg G = -\arctan(\omega T)$
	
<p><math>PT_2</math></p> 	$T^2\ddot{y} + 2\zeta T\dot{y} + y = Ku \quad \text{oder} \quad \ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$ $y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \omega_n = \frac{1}{T}$ $y = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \arccos(\zeta)\right) \right]$ $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T)^2 + 2\zeta T(j\omega) + 1} \quad  G  = \frac{K}{\sqrt{[1-(\omega T)^2]^2 + [2\zeta\omega T]^2}}$ $\arg G = -\arctan \frac{2\zeta\omega T}{(j\omega T)^2 + 1} \quad 0 \leq \omega T \leq 1$ $\arg G = \arctan \frac{2\zeta\omega T}{(j\omega T)^2 + 1} - \pi \quad 1 \leq \omega T \leq \infty$
	
<p><math>T_t</math></p> 	$y = \begin{cases} 0 & 0 < t < T_t \\ u(t - T_t) & t \geq T_t \end{cases}$ $u = 1(t) \quad y = 1(t - T_t)$ $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t} \quad  G  = 1 \quad \arg G = -\omega T_t$
	

# Lineare zeitinvariante Systeme (LTI) S20

## Lösen von Differentialgleichungen S25



Zum RLC-Netzwerk soll  $y(t)$  bestimmt werden, wenn das System für negative Zeiten in Ruhe ist und danach ein Schrittsignal angelegt wird. Dabei kann nach 3 Varianten vorgegangen werden:

### 1. Variante: Im Zeitbereich

Durch Maschen- und Knotenregeln und Beschreiben der einzelnen Elemente ergeben sich 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \cdot \dot{u}_C(t) \\ u_L(t) &= L \cdot \dot{i}_L(t) \\ u_R(t) &= R \cdot i(t) \\ u(t) &= u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) \\ y(t) &= u_R(t) + u_L(t) \end{aligned}$$

Durch schrittweises Eliminieren resultiert folgende DGL für die Signale  $u$  und  $y$ .

$$LC \cdot \ddot{y}(t) + RC \cdot \dot{y}(t) + y(t) = LC \cdot \ddot{u}(t) + RC \cdot \dot{u}(t)$$

#### Homogene Lösung

Eingangssignal wird 0 gesetzt, und für  $y(t)$  wird der Ansatz  $y(t) = y_H(t) = C_0 \cdot e^{\lambda t}$  gewählt.

$$\underbrace{[LC \cdot \lambda^2 + RC \cdot \lambda + 1]}_{\text{charakteristisches Polynom}} \cdot C_0 \cdot e^{\lambda t} = 0$$

mit  $\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4 \cdot LC}}{2 \cdot LC}$  folgt, dass  $y_H(t) = C_{0,1} \cdot e^{\lambda_{1t}} + C_{0,2} \cdot e^{\lambda_{2t}}$ .

#### partikuläre Lösung

Die partikuläre Lösung wird ähnlich wie das Eingangssignal gewählt (hier konstant).

### 2. Variante: Im Bildbereich I

Wird die DGL der 1. Variante in den Bildbereich transformiert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} LC \cdot [s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0)] \\ + RC \cdot [s \cdot Y(s) - y(0)] + Y(s) = \\ LC \cdot [s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(0) - \dot{u}(0)] \\ + RC \cdot [s \cdot U(s) - u(0)] \end{aligned}$$

Aufgelöst nach  $Y(s)$  ergibt sich:

$$Y(s) = \frac{s^2 LC + s RC}{\underbrace{s^2 LC + s RC + 1}_{\text{charakteristisches Polynom}}} + \frac{LC[s \cdot y(0) + \dot{y}(0) - s \cdot u(0) - \dot{u}(0)]}{s^2 LC + s RC + 1}$$

die vier benötigten Anfangsbedingungen sind nicht einfach zu ermitteln, da nicht alle eine direkte physikalische Bedeutung haben.

Treten Anfangsbedingungen wie  $\dot{u}(0)$  auf, dann stellen sich auch Bedingungen an die Differenzierbarkeit (gerade bei Schrittsignalen problematisch).

### 3. Variante: Im Bildbereich II

Bei dieser Variante wird nicht die DGL der 1. Variante, sondern die 5 Anfangsgleichungen transformiert:

$$\begin{aligned} I(s) &= C \cdot [s \cdot U_C(s) - u_C(0)] \\ U_L(s) &= L \cdot [s \cdot I(s) - i(0)] \\ U_R(s) &= R \cdot I(s) \\ U(s) &= U_C(s) + U_R(s) + U_L(s) \\ Y(s) &= U_R(s) + U_L(s) \end{aligned}$$

wiederum nach  $Y(s)$  aufgelöst, ergibt sich:

$$Y(s) = \frac{s^2 LC + s RC}{s^2 LC + s RC + 1} U(s) + \frac{[s LC + RC] \cdot u_C(0) + L \cdot i(0)}{s^2 LC + s RC + 1}$$

hier sind nun weniger Anfangsbedingungen notwendig und sie haben eine physikalische Bedeutung. Dabei fällt der zweite Bruch komplett weg, da das System zu Beginn in Ruhe ist.

## Darstellung von UTF S29

Eine Übertragungsfunktion kann auf verschiedene Arten dargestellt werden:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

## Partialbruchzerlegung S31

finden der einzelnen Koeffizienten:

$$\frac{Z(s)}{N(s)} = G(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \frac{c_3}{s - p_3}, c_i = \left. \frac{Z(s)}{dN(s)} \right|_{s = p_i} \quad (1)$$

### Realisierbarkeit

$$\text{Beispiel: } G(s) = \frac{3s^3+13s^2+40s+43}{s^2+3s+2} = \underbrace{\underbrace{3s}_{D\text{-Anteil}} + \underbrace{4}_{P\text{-Anteil}}}_{\text{realisierbar}} + \underbrace{\frac{22s+35}{s^2+3s+2}}_{\text{Tiefpass}}$$

*nichtrealisierbar*

Praktisch bedeutet das, dass bei einem Regler nicht mehr Nullstellen als Pole eingebaut werden dürfen → anstelle eines idealen D-Glieds sollte mit einem DT<sub>1</sub>-Glied gearbeitet werden.

### Lapacetransformation S21

Funktion $f(t)$	Transformierte $F(s)$	Zeitbereich	Bildbereich	Operation im Zeitbereich
$\delta(t)$	1	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	Superposition
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	Differentiation ...
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$f(f)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	... mehrfach angewandt
$t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	Integration
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f(t - T_t) [T_t \text{ reell, } \geq 0]$	$F(s) e^{-T_t s}$	Rechtsverschiebung
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$	Faltung
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) dt$	$\frac{1}{a} \cdot F(\frac{s}{a})$	Skalierung
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$f(a \cdot t) [a \text{ reell, } > 0]$	$F(s+a)$	Dämpfung
$1 - e^{at}$	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$	Anfangswerttheorem
$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$	Endwerttheorem
$e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	Wiederholung	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	z.B. Treppenfunktionen
$e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$			
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$			
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$			

### Stabilität

#### Routh-Kriterium S35

Für die Stabilität eines Systems sind die Pole von  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$  bzw. die Wurzeln des Nennerpolynoms  $N(s)$  entscheidend:

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, a_n > 0. \text{ Mit } G_0 = \frac{Z_0}{N_0}$$

lässt sich das charakteristische Polynom folgendermassen berechnen:

$$G_f = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{Z_0/N_0}{1+Z_0/N_0} \rightarrow N_f = N_0 + Z_0.$$

Eine **notwendige Bedingung** besteht darin, dass alle Koeffizienten positiv sind! Die Normierung  $a_n = 1$  ist dabei weggelassen worden, was die Anwendung des Routhkriteriums vereinfacht.

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad c_2 = \dots$$

$n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\ddots$	$a_2$	$a_0$
$n-1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\ddots$	$a_1$	$a_0$
$n-2$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\vdots$	$b_{n/2}$	0
$n-3$	$c_1$	$c_2$	$\vdots$	$c_{(n-2)/2}$	0	0
$n-4$	$d_1$	$\ddots$	$\ddots$	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	0	0
0	$x_1$	0	0	0	0	0

die Tabelle hat  $n + 1$  Zeilen mit den Indizes  $n \dots 0$ . In den oberen Zeilen werden die Koeffizienten  $a_i$  gefüllt. Je nach Systemordnung kommt  $a_0$  in die erste oder zweite Zeile zu liegen.

### Totzeit, Padé-Approximation

$$\text{UTF mit Totzeit: } K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \cdot e^{-sT_t}$$

$$\text{Totzeit mit Padé approximiert: } e^{sT_t} = e^x|_{x=sT_t} \text{ mit } e^x \approx 1 \approx \frac{2+x}{2-x} \approx \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \approx \dots$$

## Übersicht der Eigenschaften der UTF

### asymptotisch stabil

alle Pole in der LHE

### instabil

weder asymptotisch stabil noch grenzstabil

### minimalphasig

keine Nullstelle in RHE und keine Totzeit

### minimal

keine Pol-Nullstellenkürzungen mehr möglich

### Allpass

$|G(s)|$  ist konstant (normalerweise = 1)

### grenzstabil

kein Pol in der RHE

mindestens ein Pol auf der Imaginärachse

alle Pole auf der Imaginärachse einfache Pole

### stabil

stabil entspricht eigentlich 'asymptotisch stabil'

### realisierbar

$n \geq m$ , also mindestens so viele Pole wie Nullstellen

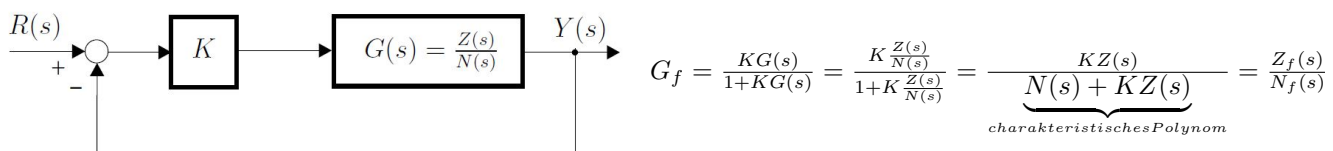
### Ordnung

$n$  entspricht der Anzahl Pole des Systems

## Blockdiagramm-Algebra S47

Vertauschen zweier Blöcke	
Rückwärtsverschieben eines Blocks durch einen Summator	
Vorwärtsverschieben eines Blocks durch einen Summator	
Vorwärtsverschieben eines Blocks durch einen Verzweigungspunkt	
Rückwärtsverschieben eines Blocks durch einen Verzweigungspunkt	

## Reglerentwurf mit Wurzelortskurven S93



## Regeln zum Zeichnen der WOK

### 1. Pol-/Nullstellenplan

Die Pole  $p_k$  werden als **x** in der komplexen Ebene eingezeichnet, die Nullstellen  $z_k (k = 1 \dots m)$  als **o**. Dies sind die Endpunkte von  $m$  Ästen.

### 2. Reelle Achse

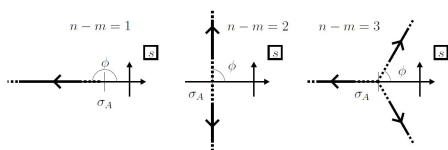
Diejenigen Punkte der reellen Achse welche zu den WOK gehören, haben rechts von sich auf der reellen Achse eine ungerade Anzahl von Polen und Nullstellen. Von 'genug weit' rechts startend bis 'genug weit' links, können nun die WOK eingezeichnet werden. Dabei wechselt der Zustand von *nicht zeichnend* auf *zeichnend* bei jeder Berührung eines Pols oder Nullstelle. Der Anfangszustand ist *nicht zeichnend*.

### 3. Asymptoten: Schnittpunkte und Richtungen

Wenn  $n > m$  gilt, dann streben  $n - m$  Äste der WOK asymptotisch gegen Unendlich. Die  $n - m$  Asymptoten sind Geraden. Der Schnittpunkt liegt bei:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{k=1}^n \Re(p_k) - \sum_{k=1}^m \Re(z_k)}{n - m}$$

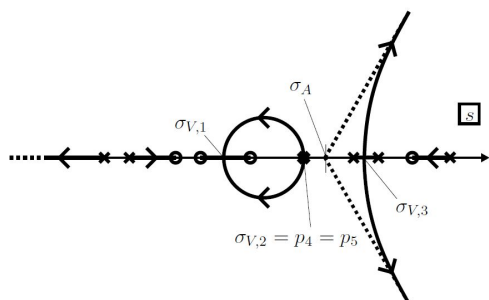
Eine der Asymptoten liegt bei  $\phi = \frac{\pi}{n-m}$ . Die weiteren Asymptoten sind dann gleichmässig um den Winkel  $\frac{2\pi}{n-m}$  versetzt.



4. Verzweigungspunkte, Vereinigungspunkte

Treffen z.B. zwei Äste, von Polen herkommend, aufeinander, so verzweigt sich die WOK. Beim Verzweigungspunkt treten die Äste meist aus der reellen Achse aus. Entsprechend können auch zwei Äste im rechten Winkel auf die reelle Achse zustreben und nach dem Vereinigungspunkt auf dieser weiterlaufen.

Für eine Skizze genügt es meistens, die Verzweigungs- und Vereinigungspunkte in der Mitte der involvierten Pole und Nullstellen zu zeichnen.



$\sigma_{V,1}$  ist dabei ein Vereinigungspunkt,  $\sigma_{V,2}$  und  $\sigma_{V,3}$  sind zwei Verzweigungspunkte.  $\sigma_{V,1}$  und  $\sigma_{V,2}$  sind näherungsweise mit zwei Kreisbögen verbunden. Da  $n - m = 3$  gilt, entstehen drei Asymptoten, deren Schnittpunkt bei  $\sigma_A$  liegt. Um die Werte von  $\sigma_{V,i}$  genau zu bestimmen, kann folgende Formel verwendet werden:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_V - p_k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_V - z_k}$$

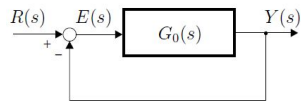
Bedingung: Paarweise verschiedene Nullstellen und paarweise verschiedene Pole

Unbrauchbare Lösungen (z.B.  $\Im(\sigma_{V,i}) \neq 0$ ) müssen aussortiert werden.

Nr.	WOK	Nr.	WOK
1		10	
2		11	
3		12	
4		13	
5		14	
6		15	
7		16	
8			
9			

# Reglerentwurf

## Spezifikationen und Restriktionen S80



$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{1}{s^\nu} \cdot \overset{\text{„Rest“}}{\text{DC-Verstärkung}=1}$$

UTF des offenen Regelkreises:  $G_0(s) = G_R(s)G_S(s)$ . Es wird davon ausgegangen, dass  $G_0$  vollständig gekürzt ist und vom Typ  $\nu$  (das heißt  $\nu$  offene Integratoren) hat. Für

$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{1}{s^\nu} \cdot \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1}, \text{ wobei } b_0 = a_0 = 1$$

den Führungsfehler ergibt sich:  $E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot R(s) = \frac{s^\nu \cdot (a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1)}{s^\nu \cdot (a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1) + K_0 \cdot (b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)} \cdot R(s)$

Vorausgesetzt, dass der Regelkreis stabil ist, kann der **stationäre Endwert**  $e_\infty$  via Endwerttheorem bestimmt werden.

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{\nu+1}}{s^\nu + K_0} \cdot R(s) \right]$$

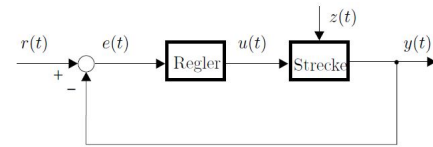
	$r(t) = \varepsilon(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
$\nu = 0$ (Typ 0)	$e_\infty = \frac{1}{1+K_0}$	$e_\infty = \infty$	$e_\infty = \infty$
$\nu = 1$ (Typ 1)	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{1}{K_0}$	$e_\infty = \infty$
$\nu = 2$ (Typ 2)	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{1}{K_0}$

Sprung:  $r(t) = \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{1}{s}$

Rampe:  $r(t) = t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$

Parabel:  $r(t) = \frac{t^2}{2} \circ \bullet \frac{1}{s^3}$

## Optimierung mit Hilfe eines Gütemasses S138



$$J = \int_0^\infty e(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty E(j\omega)E^*(j\omega) d\omega$$

Dieser Ausdruck kann für die Laplacetransformierte  $E(s)$  angewendet werden.

$$E(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1s + a_0}$$

Wenn das Nennerpolynom von  $E(s)$  stabil ist, können die Ausdrücke  $J_1$  bis  $J_4$  berechnet werden.

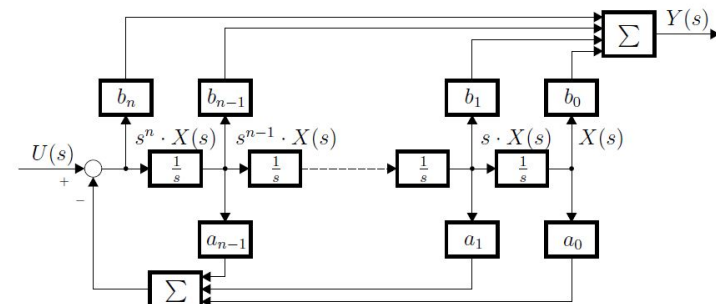
$$J_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1}$$

$$J_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2}$$

$$J_3 = \frac{b_2^2a_0a_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_0^2a_2a_3}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}$$

$$J_4 = \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + (b_2^2 - 2b_1b_3)a_0a_1a_4 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3a_4 + b_0^2(a_2a_3a_4 - a_1a_4^2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)}$$

## Direkte Normalform, Regelungsnormform S55, 147



eine allgemein realisierbare UTF hat die Form:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \text{ wobei } m \leq n \text{ sein muss (d.h. das System mehr Pole als Nullstellen hat).}$$

**Zu beachten ist, dass der Koeffizient  $a_n$  immer auf 1 normiert werden muss!**

Wenn  $m = n$  gilt (das System gleich viele Pole wie NS hat), muss für die **Regelungsnormform** mit der **Polynomdivision** ein konstanter Faktor abgespalten werden.

# allgemeins Gschmois

## dB Rechnen

Lrel. (dB)	Lrel. (NP)	P2/P1	A2/A1
100.000	11.513	10 <sup>10</sup>	10 <sup>5</sup>
90.000	10.362	10 <sup>9</sup>	31622.777
80.000	9.210	10 <sup>8</sup>	10 <sup>4</sup>
70.000	8.059	10 <sup>7</sup>	3162.278
60.000	6.908	10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup>
50.000	5.756	10 <sup>5</sup>	316.228
40.000	4.605	10 <sup>4</sup>	10 <sup>2</sup>
30.000	3.454	10 <sup>3</sup>	31.623
20.000	2.303	10 <sup>2</sup>	10.000
19.085	2.197	81.000	9.000
19.000	2.187	79.433	8.913
18.062	2.079	64.000	8.000
18.000	2.072	63.096	7.943
17.000	1.957	50.119	7.079
16.902	1.946	49.000	7.000
16.000	1.842	39.811	6.310
15.563	1.792	36.000	6.000
15.000	1.727	31.623	5.623
14.000	1.612	25.119	5.012
13.979	1.609	25.000	5.000
13.000	1.497	19.953	4.467
12.041	1.386	16.000	4.000
12.000	1.382	15.849	3.981
11.000	1.266	12.589	3.548
10.000	1.151	10.000	3.162
9.542	1.099	9.000	3.000
9.000	1.036	7.943	2.818
8.000	0.921	6.310	2.512
7.000	0.806	5.012	2.239
6.021	0.693	4.000	2.000
6.000	0.691	3.981	1.995
5.000	0.576	3.162	1.778
4.000	0.461	2.512	1.585
3.010	0.347	2.000	1.414
3.000	0.345	1.995	1.413
2.000	0.230	1.585	1.259
1.000	0.115	1.259	1.122
0.000	0.000	1.000	1.000
-1.000	-0.115	0.794	0.891
-2.000	-0.230	0.631	0.794
-3.000	-0.345	0.501	0.708
-4.000	-0.461	0.398	0.631
-5.000	-0.576	0.316	0.562
-6.000	-0.691	0.251	0.501
-7.000	-0.806	0.200	0.447
-8.000	-0.921	0.158	0.398
-9.000	-1.036	0.126	0.355
-10.000	-1.151	0.100	0.316
-15.000	-1.727	0.032	0.178
-20.000	-2.303	10 <sup>-2</sup>	0.100
-30.000	-3.454	10 <sup>-3</sup>	0.032
-40.000	-4.605	10 <sup>-4</sup>	0.010
-50.000	-5.756	10 <sup>-5</sup>	0.003
-60.000	-6.908	10 <sup>-6</sup>	0.001
-70.000	-8.059	10 <sup>-7</sup>	0.000
-80.000	-9.210	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-4</sup>
-90.000	-10.362	10 <sup>-9</sup>	3.162 · 10 <sup>-5</sup>
-100.000	-11.513	10 <sup>-10</sup>	10 <sup>-5</sup>

linear → dB:  $L_A = 20 \cdot \log\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$

dB → linear:  $A_2 = A_1 \cdot 10^{\frac{L_A}{20}}$

## allgemeines Nyquistkriterium

Die UTF des offenen Regelkreises hat die Form:  
 $G_0(s) = K \cdot \frac{(s-z_1) \dots (s-z_m)}{(s-p_1) \dots (s-p_n)} \cdot e^{-sT_t}$  und ist dabei **vollständig gekürzt**.  
 Anwendung des Kriteriums:

1. Anzahl  $N$  der Pole in der RHE und der imaginären Achse bestimmen.
2. Beide Äste der Nyquistkurve zeichnen.
3. Die Ortskurve muss den Punkt  $-1$  **genau N mal im Gegen-uhreigersinn** umschlingen. Dann ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

## Partialbruchzerlegung

einfacher reel-ler Pol

$$\frac{A_1}{s-p_i} \text{ oder } \frac{A_2}{s}$$

n-facher reel-ler Pol

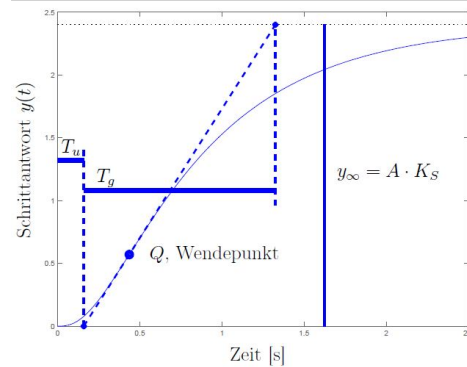
$$\frac{A_1}{(s-p_i)} + \frac{A_2}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-p_i)^n}$$

einfacher komplexer Pol

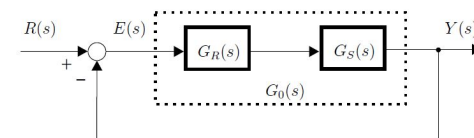
$$\frac{A \cdot s + B}{s^2 + p_i s + q_i}$$

## Ziegler/Nichols S135

Regler	$K_R$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{T_g}{K_S \cdot T_u}$	-	-
PI-Regler	$0.9 \cdot \frac{T_g}{K_S \cdot T_u}$	$3.33 \cdot T_u$	-
PID-Regler	$1.2 \cdot \frac{T_g}{K_S \cdot T_u}$	$2 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$



## Sensitivität S83

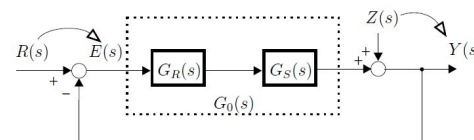


Mit der gezeigten Struktur ergibt sich die Kreisverstärkung  $G_0(s)$  als Produkt **aller** im offenen Regelkreis enthaltenen UTF. Hier ist es ein Zufall, dass  $T(s) = G_0(s)$  ist!

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$





















bei einem idealen Regelkreis wäre  $T(j\omega) = 1$  bzw.  $S(j\omega) = 0$

## Notch-Filter S121

$$G_N(s) = \frac{s^2 T^2 + \zeta_Z s T + 1}{s^2 T^2 + \zeta_N s T + 1} \quad \text{mit } \zeta_N \gg \zeta_Z > 0$$



### Approximation des Bode-Diagramms

UTF $H(s)$	Amplitude $ H(s) $	Phase $\angle(H(s))$
1) Konstanter Faktor $\alpha e^{j\beta}$	 Konst. $20 \log \alpha$	 Konst. $\beta$
2) Pol im Ursprung $\frac{\alpha}{s}$	 Lin. Steigung $-20\text{dB/Dek.}$ $0\text{dB}$ bei $\omega = \alpha$	 Konst. $-\frac{\pi}{2}$
3) Nullstelle im Ursprung $\alpha s$	 Lin. Steigung $+20\text{dB/Dek.}$ $0\text{dB}$ bei $\omega = \frac{1}{\alpha}$	 Konst. $+\frac{\pi}{2}$
4a) Reeller Pol $\frac{1}{s+\alpha}$	 Konst. $-20 \log \alpha$ für $\omega < \alpha$ dann Steigung $-20\text{dB/Dek.}$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\alpha}{10}$ Konst. $-\frac{\pi}{2}$ für $\omega > 10\alpha$
4b) Reeller Pol $\frac{\alpha}{s+\alpha}$	 Konst. $0\text{dB}$ für $\omega < \alpha$ dann Steigung $-20\text{dB/Dek.}$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\alpha}{10}$ Konst. $-\frac{\pi}{2}$ für $\omega > 10\alpha$
5a) Reelle Nullstelle $s + \alpha$	 Konst. $20 \log \alpha$ für $\omega < \alpha$ dann Steigung $+20\text{dB/Dek.}$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\alpha}{10}$ Konst. $+\frac{\pi}{2}$ für $\omega > 10\alpha$
5b) Reelle Nullstelle $\frac{s+\alpha}{\alpha}$	 Konst. $0\text{dB}$ für $\omega < \alpha$ dann Steigung $+20\text{dB/Dek.}$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\alpha}{10}$ Konst. $+\frac{\pi}{2}$ für $\omega > 10\alpha$
6a) Konjugiert-komplexe Pole $\frac{1}{s^2 + s\frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$	 Konst. $-40 \log \omega_p$ für $\omega < \omega_p$ dann Steigung $-40\text{dB/Dek.}$ für $\omega > \omega_p$ ; $-40 \log \omega_p$ Überhöhung zwischen $\frac{\omega_p}{2}, \omega_p$ & $2\omega_p$ Max. $20 \log \frac{q_p}{\omega_p^2}$ bei $\omega = \omega_p$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\omega_p}{10^{2q_p}}$ Konst. $-\pi$ für $\omega > \omega_p 10^{\frac{1}{2q_p}}$ $-\frac{\pi}{2}$ bei $\omega = \omega_p$
6b) Konjugiert-komplexe Pole $\frac{\omega_p^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$	 Konst. $0\text{dB}$ für $\omega < \omega_p$ dann Steigung $-40\text{dB/Dek.}$ für $\omega > \omega_p$ ; $0\text{dB}$ Überhöhung zwischen $\frac{\omega_p}{2}, \omega_p$ & $2\omega_p$ , Max. $20 \log q_p$ bei $\omega = \omega_p$	 Konst. $0$ für $\omega < \frac{\omega_p}{10^{2q_p}}$ Konst. $-\pi$ für $\omega > \omega_p 10^{\frac{1}{2q_p}}$ Bei $\omega = \omega_p$ genau $-\frac{\pi}{2}$
7) Konjugiert-komplexe Nullstellen $s^2 + s\frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2$ bzw. $\frac{s^2 + s\frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2}$	Analog zu 6a, 6b (jedoch Spiegelung an der 0dB-Linie)	Analog zu 6a, 6b (jedoch Spiegelung an der 0 Grad-Linie)
8) Serieschaltung von Systemen erfolgt durch <b>Superposition</b> der einzelnen Bode-Diagramme (Multiplikation von UTFs entspricht Addition im dB-Bereich).		

Werte für  $q_p$  bzw.  $q_z$

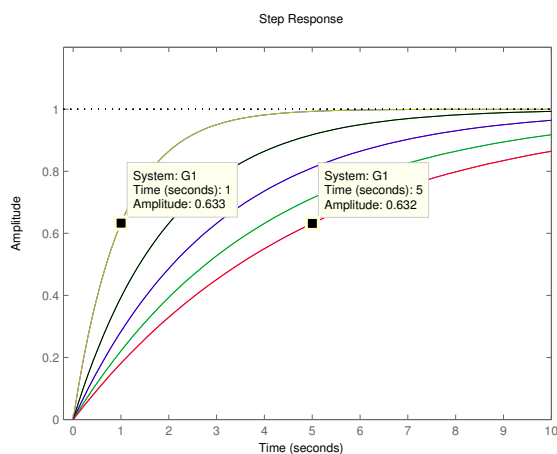
$q$	$10^{\frac{1}{2q_p}}$	$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$	$q$	$10^{\frac{1}{2q_p}}$	$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$	$q$	$10^{\frac{1}{2q_p}}$	$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$	$q$	$10^{\frac{1}{2q_p}}$	$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$	$q$	$10^{\frac{1}{2q_p}}$	$\frac{1}{10^{\frac{1}{2q_p}}}$
1	3.162	0.316	5	1.259	0.794	9	1.136	0.880	13	1.093	0.915	17	1.070	0.935
2	1.778	0.562	6	1.212	0.825	10	1.122	0.891	14	1.086	0.921	18	1.066	0.938
3	1.468	0.681	7	1.179	0.848	11	1.110	0.901	15	1.080	0.926	19	1.062	0.941
4	1.334	0.750	8	1.155	0.866	12	1.101	0.909	16	1.075	0.931	20	1.059	0.944

### Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0°	0	0	1	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180°	$\pi$	0	-1	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

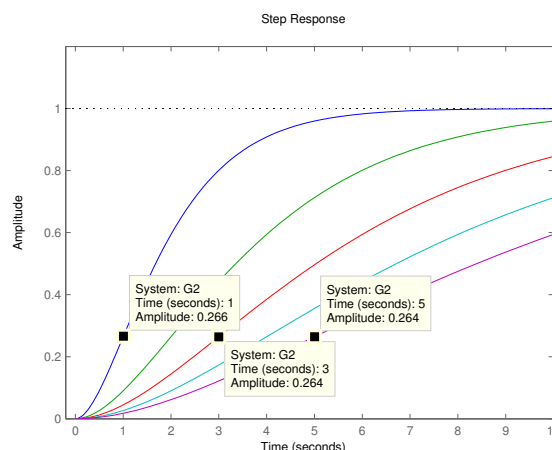
### Sprungantworten

#### PT<sub>1</sub>-Glied



PT<sub>1</sub>-Glied mit der UTF  $G(s) = \frac{K}{sT+1}$ .  $K$  ist konstant 1 und  $T$  von 1 bis 5 variiert.

#### PT<sub>2</sub>-Glied **S39**

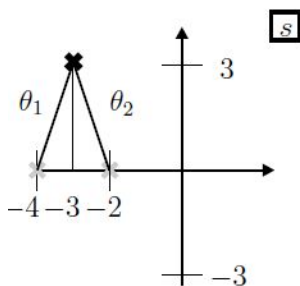


PT<sub>2</sub>-Glied mit der UTF  $G(s) = \frac{K}{(sT)^2 + 2\zeta Ts + 1}$ .  $T$  variiert von 1 bis 5.  $\zeta$  ist konstant 1.

### Wurzeln des char. Polynoms

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

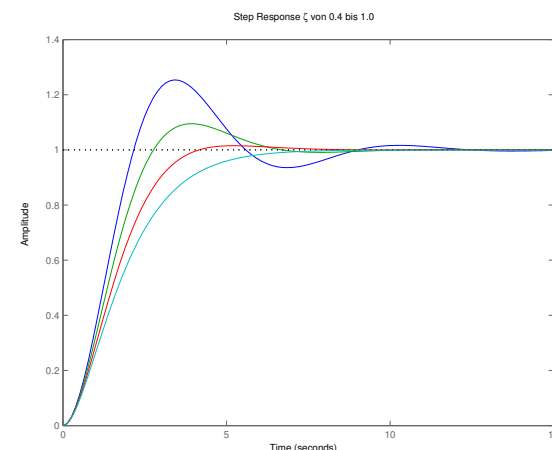
### Wert von $K$ aus WOK bestimmen **S**



Um den Wert  $K$  zu bestimmen, muss *einer* der platzierten Pole betrachtet werden. Der Wert  $K$  berechnet sich aus den Abständen  $\theta_i$  dieses Pols zu allen anderen Polen und den Abständen  $\lambda_i$  dieses Pols zu den Nullstellen von  $G(s)$ .

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n \theta_i}{\prod_{i=1}^m \lambda_i} = \frac{\theta_1 \cdot \theta_2 \dots \theta_n}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_m}$$

Hat die UTF **keine Nullstellen**, so wird das Produkt im Nenner **gleich 1** gesetzt.



$\zeta$  variiert von 0.4 bis 1.0.  $T$  ist konstant 1.

- $\zeta < 0$ : Da  $T$  positiv, ergibt sich ein instabiles System
- $\zeta = 0$ : harmonischer Oszillator mit Polen bei  $\pm j\omega_n$
- $0 < \zeta < 1$ : gedämpfte Schwingung
- $\zeta \geq 1$ : aperiodischer Fall, Faktorisierung möglich  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$ . Für  $\zeta = 1$  ergibt sich  $T_1 = T_2$ , das PT<sub>2</sub>-Glied entspricht zwei identisch in Serie geschalteten PT<sub>1</sub>-Gliedern.