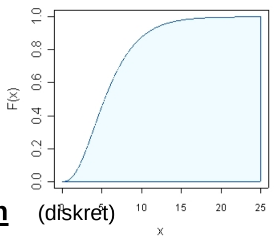
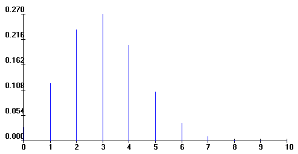
Verteilungsfunktion

1. $0 \le F_X(x) \le 1$
2. $0 \le F_X(x) \le 1$
3. $F_X(-\infty) = 0$
4. $F_X(+\infty) = 1$



Wahrscheinlichkeitsfunktion (diskret)

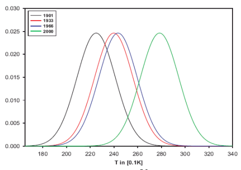
1. $0 \le p_X(x_i) \le 1$
2. $\sum_i p_X(x_i) = 1$



$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p_X(x_i)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

1. $f_X(x) \ge 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$



$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \text{bzw.} \quad F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(\zeta)d\zeta$$

Umwandlungen:

$$P(|X| \le 0.5) = P(-0.5 \le X \le 0.5) = \int\limits_{-0.5}^{0.5} f_X(x)dx$$

Verbundfunktion Joint Distribution Function

Funktion zweier Variablen…

… $F_{XY}(x,y)$, $p_{XY}(x,y)$, $f_{XY}(x,y)$

Statisch unabhängig: $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

(gaussverteilt) $p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Randfunktionen Marginal Distribution Function

Aus den Verbundfunktionen können die eindimensionalen Funktionen z.B. $F_X(x)$ *oder* $F_Y(x)$ zurück gewonnen werden, indem jeweils der ganze Bereich der zu eliminierenden Zufallsvariabel verrechnet wirde

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$

$p_X(x_i) = p_{XY}(x_i, y_i)$ summiert über alle y_i

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

Erwartungswert

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i) \quad \text{diskret}$$

$$\mu_X = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot f_X(x)dx \quad \text{kontinuierlich}$$

Linearität $E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$

*n*te Moment

$$E(X^n) = \sum_i x_i^{\,n} \cdot p_X(x_i) \quad \text{diskret}$$

$$E(X^n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i^{\,n} \cdot f_X(x)dx \quad \text{kontinuierlich}$$

Varianz σ_X^2, Standardabweichung σ_X

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_X(x_i) \quad \text{diskret}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)dx \quad \text{kontinuierlich}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

(k,n) – tes Moment m_{kn}, Korrelation m_{11}

$$m_{kn} = E(X^k Y^n) = \sum_i \sum_j x_i^{\,k} \cdot y_j^{\,n} p_{XY}(x_i, y_j) \quad \text{diskret}$$

$$m_{kn} = E(X^k Y^n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot y^n f_{XY}(x,y)dxdy \quad \text{kontinuierlich}$$

$k = 1, n = 1$ ➔ Korrelation $m_{11} = E(XY)$

$m_{11} = E(XY) = 0$ ➔ X und Y orthagonal

Korvarianz σ_{XY}

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = m_{11} - \mu_X \mu_Y$$

$\sigma_{XY} = 0$ ➔ unkorreliert ➔ $E(XY) = E(X)E(Y)$

Korrelations – Koeffizient ρ_{XY}

$$\rho(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad |\rho_{XY}| \le 1$$

Binominalverteilung

$$F_X(x) = P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$\mu_X = n \cdot p \qquad \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot q$$

Standardbeispiel:

k= Anzahl logisch 1, n-k= Anzahl logisch 0, n= Sequenzlänge, p= W'keit für logisch 1, q=1-p W'keit für logisch 0

Umwandlungen:

$$P(X \ge m) = 1 - P(X \le n - m)$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Poissonverteilung

$$F_X(x) = e^{-\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!} \qquad \mu_X = \sigma_X^2 = \alpha = n \cdot p$$

$$p_X(x) = e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^k}{k!}$$

Standardbeispiel:

k= Anzahl Fehler, n= Sequenz-/ Bitlänge $p << 1$

Normalverteilung (Gaussverteilung)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu_X = \mu \qquad f_{X\max}(\mu_X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad x = \mu_X \pm \sigma_X$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_X$$

Zufallsprozesse

Zufallsprozesse beschreiben nicht eine zufällig ablaufende Zeitfunktion, sondern eine deterministische Zeitfunktion ausgelöst durch ein Ergebnis eines Zufallsexperiments.

1 – dimensional

$$F_{X_k}(x_k;t_k) = P(X_k(t_k) \le x_k) \qquad f_{X_k}(x_k;t_k) = \frac{\partial F_{X_k}(x_k;t_k)}{\partial x_k}$$

2 – dimensional

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)$$

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Statistische Kennwerte

Erwartungswert:

$$\boxed{\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x;t)dx}$$

Autokorrelation:

$$\boxed{R_{XX}(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2}$$

Autokovarianz:

$$\boxed{C_{XX}(t_1,t_2) = E[(X(t_1)-\mu_X(t_1)) \cdot (X(t_2)-\mu_X(t_2))] = R_{XX}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2)}$$

Stationarität

Ein stationärer Prozess verändert seine statistischen Eigenschaften nicht, egal zu welchem Zeitpunkt.

- Streng stationärer Zufallsprozess (*SSS*)
  Unabhängig von der Zeitverschiebung *c*
  $$f(x_1,x_2...,x_n;t_1,t_2...,t_n) = f(x_1,x_2...,x_n;t_1+c,t_2+c...,t_n+c)$$
  $$E[X(t)] = \mu_X$$
  $$R_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1$$
  $$C_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) - \mu_X^2$$

- Schwach stationärer Zufallsprozess (*WSS*)
  sobald
  $$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$ Stationarität 2.Ordnung
  $$E[X(t)] = \mu_X$$
  $$R_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1$$
  $$C_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_{XX}(\tau)$$

Zeitmittelwerte einer Musterfunktion $x_k(t)$

Zeitlicher Mittelwert:

$$\overline{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)dt$$

Zeitlich gemittelte Autokorrelationsfunktion:

$$\overline{R}_{XX} = \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t+\tau)dt$$

Ergodizität S.168

Ein stationärer Prozess ist ergodisch, wenn nicht nur der Erwartungswert der zeitlichen Mittelwerte mit den Scharmittelwerten übereinstimmt, sondern jede einzelne Musterfunktion diese Mittelwerte besitzt.

Ergodisch:

$$\overline{x} = \langle x(t) \rangle = E[X(t)] = \mu_X$$

Ergodisch in Autokorreklation:

$$\overline{R}_{XX}(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Autokorrelation bei WSS Prozessen S.169

$$\boxed{R_{XX}(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]}$$

$$\boxed{R_{XX}(-\tau)=R_{XX}(\tau)\quad |R_{XX}(\tau)|\le R_{XX}(0)\quad R_{XX}(0)=E[X^2(t)]}$$

$$R_{XX}(0)=A_1^2p_1+A_0^2p_0$$

$$R_{XX}(|\tau|>T)=A_1A_1p_1p_1+A_1A_0p_1p_0+A_0A_1p_0p_1+A_0A_0p_0p_0$$

Für bipolares RZ – Signal:

$$R_{XX}(0)=A_{+1}^2p_{+1}+A_0^2p_0+A_{-1}^2p_{-1}$$

$$R_{XX}(|\tau|>T)=A_1A_1A_1p_1p_1p_1+A_1A_1A_{-1}p_1p_1p_{-1}+A_1A_{-1}A_{-1}p_1p_{-1}p_{-1}+A_{-1}A_{-1}A_{-1}p_{-1}p_{-1}p_{-1}$$

Kreuzkorrelation bei WSS Prozessen

$$\boxed{R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]}$$

$$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$$

$$|R_{XY}(\tau)|\le\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}\quad |R_{XY}(\tau)|\le\frac{1}{2}[R_{XX}(0)+R_{YY}(0)]$$

$R_{XY}(\tau)=0$ → 2 Zufallsprozesse sind orthagonal

Autovarianz bei WSS Prozessen

$$C_{XX}(\tau)=E[(X(t)-E[X(t)])\cdot(X(t+\tau)-E[X(t+\tau)])]$$

$$C_{XX}(\tau)=R_{XX}(\tau)-\mu_X^2$$

Kreuzvarianz bei WSS Prozessen

$$C_{XY}(\tau)=E[(X(t)-E[X(t)])\cdot(Y(t+\tau)-E[Y(t+\tau)])]$$

$$C_{XY}(\tau)=R_{XY}(\tau)-\mu_X\mu_Y$$

Spektrale Leistung bei WSS Prozessen

$$S_{XX}(\omega)=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X(\omega)|^2\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[|X(\omega)|^2\right]$$

Wiener – Kinchin – Theorem:

$$\boxed{S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XX}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau}$$ gutes Beispiel S.184 Bipolar NRZ/RZ

$$\boxed{R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(\omega)\cdot e^{+j\omega\tau}d\omega}$$

$S_{XX}(\omega)$ *ist reelwertig und* ≥ 0 $\qquad S_{XX}(-\omega)=S_{XX}(\omega)$

mittlere Leistung $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XX}(\omega)d\omega=R_{XX}(0)=E[X^2(t)]$

Kreuz – Spektraldichte bei WSS Prozessen

Beziehungen zwischen Kreuzkorrelation und Kreuzspektralerleistungsdichte:

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$S_{YX}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\omega$$

$$R_{YX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{YX}(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\omega$$

$$\boxed{R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)\ \Rightarrow\ S_{XY}(\omega)=S_{YX}(-\omega)=S_{YX}^*(\omega)}$$

Leistungsdichtespektrum von $Y(t)$ LTI - Systeme

$$\boxed{S_{YY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YY}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau}$$

$$\boxed{S_{YY}(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot S_{XX}(\omega)}$$

$$\boxed{R_{YY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2\cdot S_{XX}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega}$$

$$\boxed{E[Y^2(t)]=R_{YY}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2\cdot S_{XX}(\omega)d\omega}$$

Rauschen in analogen Systemen

Definitionen:

$S_0=S_X=S_i$ Eingangsleistung $\qquad n(t)$ weisses Rauschen

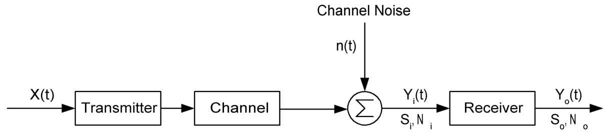
N_0 Eingangsrauschen

$$\boxed{N_o=E[n_o^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta}{2}|H(\omega)|^2d\omega}$$

$$\boxed{S_o=E[X_o^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H_{Kanal}(\omega)|^2|H_{Equlizer}(\omega)|^2S_{XX}(\omega)d\omega}$$

Minimale Sendeleistung: $\boxed{S_T=S_i\cdot 10^{\frac{Dämpfung\ Kanal\ in\ dB}{10}}}$

Rauschen in Basisband: (nach Empfang!)



$X(t)$ ist, mittelwertfrei, stationär, ergodisch, bandbeschränkt

Kanal ist verzerrungsfrei

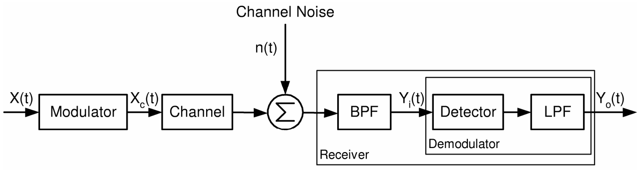
$$\boxed{S_i=\frac{1}{2}S_X^2}\qquad\boxed{N_0=\eta\frac{W}{2\pi}=\eta B}$$

Signal – Geräusch Verhältnis: $\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{S_0}{N_0}=\frac{S_i}{\eta B}=\gamma}$

Rauschen bei Modulation:

nicht mehr Basisband!

Rauschen bei AM:



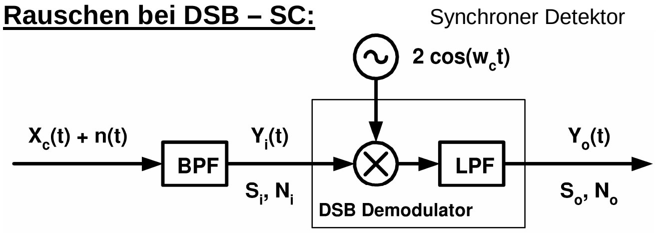
$$\boxed{Y_i(t)=X_c(t)+n_i(t)}$$

$$\boxed{E[n_c^2(t)]=E[n_s^2(t)]=E[n_i^2(t)]=2\eta B}$$

$$\boxed{n_i(t)=n_c(t)\cos(\omega_c t)-n_s(t)\sin(\omega_c t)}$$

Rauschen bei DSB – SC:

Synchroner Detektor



$$Y_i(t)=A_cX_c(t)\cos(\omega_c t)+n_i(t)$$

$$Y_i(t)=(A_cX_c(t)+n_c(t))\cos(\omega_c t)-n_s(t)\sin(\omega_c t)$$

$$\boxed{Y_o(t)=A_cX_c(t)+n_c(t)=X_o(t)+n_o(t)}$$

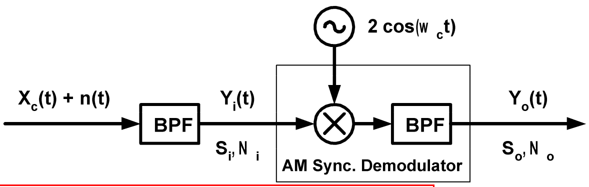
$$\boxed{S_o=E[X_o^2(t)]=E[A_c^2X_c^2(t)]=A_c^2E[X_c^2(t)]=A_c^2S_X}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{A_c^2S_X}{2\eta B}=\frac{\frac{1}{2}A_c^2S_X}{\eta B}=\frac{S_i}{\eta B}=\gamma}$$

Detektor – Gewinn: $\boxed{\alpha_d=\frac{(S/N)_o}{(S/N)_i}=\frac{S_i/(\eta B)}{S_i/(2\eta B)}=2}$

Rauschen bei gewöhnliche AM:

Synchroner Detektor



$$\boxed{Y_i(t)=A_c(1+\mu X(t))\cos(\omega_c t)+n_i(t)}$$

$$\boxed{Y_o(t)=A_c\mu X(t)+n_c(t)=X_o(t)+n_o(t)}$$

$$B_T=2B_m$$

$$\boxed{S_i=\frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2S_X)} \quad \boxed{S_o=A_c^2\mu^2S_X=\frac{2\mu^2S_X}{1+\mu^2S_X}S_i}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{\mu^2S_X}{1+\mu^2S_X}\frac{S_i}{\eta B}=\frac{\mu^2S_X}{1+\mu^2S_X}\gamma} \quad \boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o\le\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\frac{S_i}{\eta B}}$$

Da viel Leistung im Träger (DC – Anteil) steckt ist die gewöhnliche AM um mindestens 3dB weniger geeignet.

Detektor – Gewinn: $\boxed{\alpha_d=\frac{(S/N)_o}{(S/N)_i}=\frac{2\mu^2S_X}{1+\mu^2S_X}\le 1}$

$$\boxed{S_T=S_i\cdot 10^{\frac{\text{Dämpfung Kanal in dB}}{10}}}$$

Rauschen bei PM:

$$D=\Delta f/B_m=\Delta\omega/W_m \qquad B_T=2(k_p+1)B_m$$

Eingangsseitig:

$$\boxed{N_i=2(D+1)B_m\cdot\eta} \quad \boxed{S_i=\frac{A_c^2}{2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{A_c^2}{4(D+1)B_m\cdot\eta}}$$

Ausgangsseitig:

$$\boxed{S_o=k_p^2S_X} \quad \boxed{N_o=\frac{1}{A_c^2}2\eta B} \quad \gamma=S_i\frac{1}{\eta B}=\frac{A_c^2}{2}\frac{1}{\eta B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{k_p^2A_c^2S_X}{2\eta B}=k_p^2S_X\gamma}$$

$$\boxed{S_T=S_i\cdot 10^{\frac{\text{Dämpfung Kanal in dB}}{10}}}$$

Rauschen bei FM:

$$D=\Delta f/B_m=\Delta\omega/W_m \qquad B_T=2(D+1)B_m$$

Ausgangsseitig:

$$\boxed{S_o=k_f^2S_X} \quad \boxed{N_o=\frac{3}{2}\frac{\eta}{A_c^2}\frac{W^3}{2\pi}} \quad \gamma=S_i\frac{1}{\eta B}=\frac{A_c^2}{2}\frac{1}{\eta B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{3A_c^2 2\pi k_f^2S_X}{2\eta W^3}=3\frac{k_f^2S_X}{W^2}\gamma=3D^2S_X\gamma}$$

Rauschen bei DSB-SC und SSB:

DSB: $B_T=2B_m$ SSB: $B_T=B_m$

Ausgangsseitig:

$$\boxed{N_o=2\eta B} \quad \boxed{S_o=A_c^2S_X}$$

$$\gamma=S_i\frac{1}{\eta B}=\frac{A_c^2}{2}\frac{1}{\eta B}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{A_c^2S_X}{2\eta B}=\frac{S_i}{\eta B}=\gamma}$$

Optimaler Detektor

Maximum Likelihood (ML) Detektor

s_1 Signal 1, s_2 Signal 1, H_1 Hypothese 1, H_2 Hypothese 1,

H_1 wenn: $\boxed{f(z|s_1)P(s_1)>f(z|s_2)P(s_2)}$

H_2 wenn: $\boxed{f(z|s_1)P(s_1)<f(z|s_2)P(s_2)}$

Oder mit Likelihood ratio (WSK - Verhältnis)

H_1 wenn: $\boxed{\Lambda(z)=\frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)}>\frac{P(s_2)}{P(s_1)}}$

H_2 wenn: $\boxed{\Lambda(z)=\frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)}<\frac{P(s_2)}{P(s_1)}}$

Vereinfachter Maximum Likelihood

H_1 wenn: $\boxed{\Lambda(z) = \frac{f(z \mid s_1)}{f(z \mid s_2)} > 1}$

H_2 wenn: $\boxed{\Lambda(z) = \frac{f(z \mid s_1)}{f(z \mid s_2)} < 1}$

Falls $f(z \mid s_1)$ symmetrisch zu $f(z \mid s_2)$ bzgl einem λ_0

H_1 wenn: $z > \lambda_0$

H_2 wenn: $z < \lambda_0$

Entscheidungsschwelle:

$\boxed{\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma_{n0}^2}{a_1 - a_2} \cdot \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)}}$ für $P(s_1) \neq P(s_2)$

$\boxed{\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}}$ für $P(s_1) = P(s_2)$

Fehlerwahrscheinlichkeit:

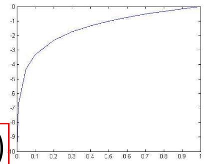
$\boxed{P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right)}$ $\quad \sigma^2 = \frac{\eta T}{2} \quad \frac{a_1 - a_2}{2} = AT$

$\boxed{P_e = p_1 \cdot Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + p_0 \cdot Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$

Signalenergie pro Bit: $E_b = \int_0^T [X(t)]^2 \, dt$

Quellenkodierung

Komprimierung der Daten



Informationsgehalt

$\boxed{I(x_i) = -\log_2 P(x_i)}$ [bit] immer ≥0!

Entropie Quelle (mittlerer Informationsgehalt)

$\boxed{H(X) = E[I(x_i)] = -\sum_i P(x_i) \cdot \log_2 P(x_i)}$

Wird gross, wenn ????
Wird klein, wenn ????

Eigenschaften:

$0 \leq H(X) \leq \log_2 m$ m Anzahl Symbole

$0 \leq H(X) \leq 1$ n Anzahl Codes

Redundanz

$\boxed{R(X) = H_{\max} - H(X) = \log_2 m - H(X)}$

Informationsrate

$\boxed{R = r \cdot H(X)}$ r, Symbolrate [Symbole/s]

Durch Maximierung der Entropie kann bei gegebener Symbolrate die Informationsrate optimiert werden!
Maximierung der Entropie ist Aufgabe der Quellenkodierung!
Quellenkodierung eliminiert Redundanz!

Kanalmatrix

$$|P(Y \mid X)| = \begin{bmatrix} P(y_1 \mid x_1) & P(y_2 \mid x_1) & \cdots & P(y_n \mid x_1) \\ P(y_1 \mid x_2) & P(y_2 \mid x_2) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y_1 \mid x_m) & P(y_2 \mid x_m) & \cdots & P(y_n \mid x_m) \end{bmatrix}$$

Verbundmatrix

$$|P(Y, X)| = \begin{bmatrix} P(y_1, x_1) & P(y_2, x_1) & \cdots & P(y_n, x_1) \\ P(y_1, x_2) & P(y_2, x_2) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y_1, x_m) & P(y_2, x_m) & \cdots & P(y_n, x_m) \end{bmatrix}$$

$$|P(Y, X)| = \begin{bmatrix} p_{y1} \cdot p_{x1} & p_{y2} \cdot p_{x1} & \cdots & p_{yn} \cdot p_{x1} \\ p_{y1} \cdot p_{x2} & p_{y2} \cdot p_{x2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{y1} \cdot p_{xm} & p_{y2} \cdot p_{xm} & \cdots & p_{yn} \cdot p_{xm} \end{bmatrix}$$

Kanalkapazität

$\boxed{C_s = \max I(X;Y)}$ [b/Symbol] $\boxed{C = r \cdot C_s}$ [b/s]

Wenn $C_s > H(X)$ ➔ kann eine Übertragung stattfinden!
Wenn $C > R$ ➔ kann eine Übertragung stattfinden!
Wenn $C > r \cdot H(X)$ ➔ kann eine Übertragung stattfinden!

Kanalarten:

Verlustfreier Kanal: $\boxed{I(X;Y) = H(X)}$ $\boxed{C_s = \log_2 m}$

Deterministischer Kanal: $\boxed{I(X;Y) = H(Y)}$ $\boxed{C_s = \log_2 n}$

Rauschfreier Kanal: $\boxed{I(X;Y) = H(X) = H(Y)}$

$\boxed{C_s = \log_2 m = \log_2 n}$

Binär symetrischer Kanal:

$\boxed{I(X;Y) = H(Y) - (-p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p))}$

$\boxed{C_s = 1 + (1-p_e)\log_2(1-p_e) + p_e \log_2 p_e}$ $p = 1 - p_e$

AWGN Kanal: $\boxed{C_s = \max I(X;Y) = 0{,}5\log_2(1+S/N)}$

$$\boxed{C = 2BC_s = B\log_2(1+S/N)}$$

Codelänge

$$\boxed{L = \sum_i P(x_i)n_i \geq H(X)}$$

Effizienz

$$\boxed{\eta = \frac{H(X)}{L}}$$

fixed length code (length=n): $\boxed{\eta = \frac{H(X)}{\log_2 2^n}}$

Shannon – Fano Codierung

1. Symbole mit absteigender WSK anordnen
2. mit Trennung 2 Teilmengen möglichst gleicher WSK bilden
3. oberer Teilmenge 0, unterer Teilmenge 1 zuordnen
4. Teilmengen weiter unterteilen gemäss Schritt2

Huffmann Codierung

1. Symbole mit absteigender WSK anordnen
2. unterste 2 Symbole als Symbolgruppe zusammenfassen, WSK auch
3. weiter bei 1) bis nur noch 2 Symbolgruppen vorliegen
4. der Symbolgruppe mit grösserer WSK 0, der anderen 1 zuordnen
5. letzten Reduktionsschritt rückgängig machen
6. weiter bei 4) bis für alle Einzelsymbole ein Codewort vorliegt

Kanalkodierung

Erweiterung der Daten z.B. durch Kontrollbit um allfällige Übertragungsfehler zu detektieren

Blockcodes

(n,k) k Eingängen und n Ausgängen

$$2^k = AnzahlDatenworte = gültigeCodeworte$$

$$2^n = möglicheCodeworte$$

Coderate

$$\boxed{R_c = k/n}$$

Galois Feld

M ≡ Menge
\+ ≡ Modulo2 Addition (XOR)
* ≡ Multiplikation (AND)

XOR	AND
$0 \oplus 0 = 0$	$0 \otimes 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$	$0 \otimes 1 = 0$
$1 \oplus 0 = 1$	$1 \otimes 0 = 0$
$1 \oplus 1 = 0$	$1 \otimes 1 = 1$

Linearer Code

Aus C, Codeworte $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$c = a \oplus b = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \ldots, a_n \oplus b_n)$$

Ein Code C ist linear, wenn für alle a, b auch c zu C gehört

Hamming – Gewicht

$\boxed{w(c)}$ ≡ Anzahl Einer im Codewort

Hamming – Distanz

$\boxed{d(a,b)}$ ≡ Anzahl unterschiedlicher Stellen der Codeworte

Beziehung zwischen Hamming – Gewicht / –Distanz

$$w(c) = d(c,0) \qquad d(a,b) = w(a \oplus b)$$

Minimale Hamming – Distanz … (gibt worst case an)

… entspricht dem kleinsten Gewicht aller Codeworte von C

$$\boxed{d_{\min} = \min[d(a,b)]}$$

Bei linearen Codes:

$$d_{\min} = \min[d(a,b)] = \min[w(a \oplus b)] = \min[w(c)]$$

Systematischer Code:

1) linearer Code
2) jedes Datenbit kommt unmodifiziert in irgendeinem Codebit vor

Maximal detektierbare Fehler t_d und korrigierbare Fehler t_c

$$\boxed{t_d = d_{\min} - 1} \qquad \boxed{t_c = 0{,}5(d_{\min} - 1)}$$

Generatormatrix G

d ≡ Datenwort als Zeilenvektor
c ≡ Codewort als Zeilenvektor

$$\boxed{c = d \cdot G}$$

$$\boxed{G = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_k} & \underbrace{\begin{matrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_{1k} & p_{2k} & \cdots & p_{mk} \end{matrix}}_{P^T} \end{bmatrix} = [I_k P^T]}$$

Aus Anzahl der Zeilen ➔ Anzahl Datenbits
Aus Anzahl der Spalten ➔ Anzahl Codebits

- Sobald eine Generatormatrix gebildet werden kann, ist der Code linear!
- Jede Zeile einer Generatormatrix entspricht einem Codewort!
- Länge der Datenworte = Anzahl Zeilen
- Länge der Codeworte = Anzahl Spalten
- Anzahl Datenworte = Anzahl Codeworte = $2^{\text{Anzahl Zeilen}}$

<u>Bilden der Codeworte:</u>

Datenwort d_1, d_2, d_3	Codewort $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6,$
000	000000
001	010111
010	011001
011	001110
100	100101
101	110010
110	111100
111	101011

<u>**Paritätsprüfmatrix** H</u> erkennt Übertragungsfehler

$\boxed{H = [P \quad I_m]}$ P ≡ Paritätsmatrix, m= n-k (d_k und c_n)

$$H^T = \begin{bmatrix} P \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>**Fehlersyndrom:**</u>

$\boxed{s = c_r \cdot H^T}$ ➔ s entspricht der x.Zeile von H^T was uns auf die x.Spalte von c_r führt, welche korrigiert werden muss!

<u>**Perfekter Code:**</u> $\boxed{2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}}$ $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

<u>**Hamming – Schranke:**</u>

$\boxed{2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$ t = Anzahl korrigierbarer Fehler