Nachrichtentechnik 2

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1. Bedeutung der WSK Rechnung in Nat (Folie 2)

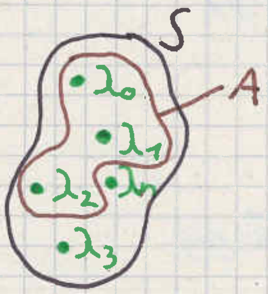
- Nur ein zufälliges Signal enthält Informationen, da ein voraussehbares (d.h. deterministisches) Signal gar nicht mehr übertragen werden muss, da der Empfänger die Information bereits kennt.
- Rauschen ist ein zufälliges (d.h. stochastisches) Störsignal und ist eines der wichtigsten limitierenden Grössen eines Kommunikationssyst.

1.2. Was ist ein Zufallsexperiment (Folie 3)

Ein Experiment wird als Zufallsexperiment bezeichnet, wenn dessen Ausgang zufällig ist. Das Ergebnis ist vorgängig nicht bekannt.

Bsp:
- Wurf einer Münze oder eines Würfels
- Resultate im Sport
- Amplitude einer Rauschspannung

1.3. Ereignisraum, Ereignis, Elementarereignis (Folie 4)



S = Ereignisraum oder Ereignisfeld

A = Ereignis

λ = Elementarereignisse

- Zur mathematischen Behandlung eines Zufallsexperiments müssen dessen möglichen Ereignisse definiert werden. Alle möglichen Ereignisse λ (Elementarereignisse) werden zum Ereignisraum oder Ereignisfeld S zusammengefasst. Aus diesem Ereignisraum oder Ereignisfeld können beliebige Ereignis A hervorgehen.
- Ein Ereignisraum S kann aus Endlich vielen verschiedenen Elementarereignisen λ, abzählbar unendlich vielen Elementarereignisen λ und unendlich vielen verschiedenen Elementarereignisen λ bestehen.
- Jede Teilmenge $A \subseteq S$ bildet ein Ereignis.

  $\underset{\text{Ereignis}}{A} \subseteq \underset{\text{Ereignisraum oder Ereignisfeld}}{S}$
- Das sichere Ereignis S und das unmögliche Ereignis $\emptyset = \{\}$ gehören in der WSK-Rechnung immer zum Ereignisraum oder Ereignisfeld.

1.4. Verknüpfung von Ereignissen (Folie 9)

Komplementäres Ereignis:	$\bar{A} = S/A$
Vereinigung von A und B:	$C = A \cup B$ (oder)
Durchschnitt von A und B:	$C = A \cap B$ (und)
Sicheres Ereignis:	$C = S$
Unmögliches Ereignis:	$C = \emptyset = \{\}$
Disjunkte Ereignisse A, B:	$A \cap B = \emptyset$ (ohne Schnittmenge)
Spezielle Verknüpfungen:	$\bar{S} = \emptyset$; $\bar{\emptyset} = S$
	$S \cup A = S$; $S \cap A = A$
	$A \cup \bar{A} = S$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $\bar{\bar{A}} = A$

?

1.5. Wahrscheinlichkeit von Ereignissen (Folie 10)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Funktion $P(A)$ welche jedem Ereignis $A \subset S$ eine reelle Zahl zuweist, die aussagt wie wahrscheinlich es ist das A eintritt.

Es gelten folgende Axiome: (nach Kolmogoroff)

- $P(A)$ ist zwischen 0 und 1 $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \emptyset$ (unabhängig)
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) \leq P(B)$ falls $A \subset B$ (Teilmenge)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ falls A und B abhängig

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird in der Praxis mit der relativen Auftretungshäufigkeit von Ereignissen verbunden.

1.6. Laplace Experiment (Folie 13)

Ein Experiment mit endlich vielen Elementarereignisen, welche gleich häufig auftreten, nennt man ein Laplace Experiment.

$$\boxed{\begin{array}{l} S = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \\ P(\lambda_i) = \dfrac{1}{n} \end{array}}$$

Bsp: idealer Würfel:

$$P\{1\} = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{6}$$

1.7. Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ (Folie 14)

Die Bedingte Wahrscheinlichkeit ist ein Mass dafür, wie gross die Auftretungshäufigkeit von A ist, unter der Annahme, dass Ereignis B eingetroffen ist.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit das wen A eingetreten ist, B auch eintritt oder umgekehrt.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$ (Durchschnitt)

1.8. Statistisch unabhängige Ereignisse (Folie 15)

Zwei Ereignisse A und B sind dann statistisch unabhängig, wenn man aufgrund des Eintreffens des einen Ereignis keine Schlüsse auf das Auftreten des anderen Ereignis ziehen kann.

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Alle Formeln gelten nur wen statistisch unabhängig.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$ wenn statistisch abhängig

1.9. Die totale Wahrscheinlichkeit (Folie 16)

Eine Menge von n Ereignissen A_i sind paarweise unvereinbar und vollständig abgeschlossen, falls gilt:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (\text{für } i \neq j) \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

Für eine solche vollständig abgeschlossene Menge von n paarweise unvereinbaren Ereignissen A_i gilt der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

1.10. Bayes'sche Formel (Folie 17)

Ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $P(B)$ der Ereignisse A,B bekannt, so kann $P(A|B)$ berechnet werden:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

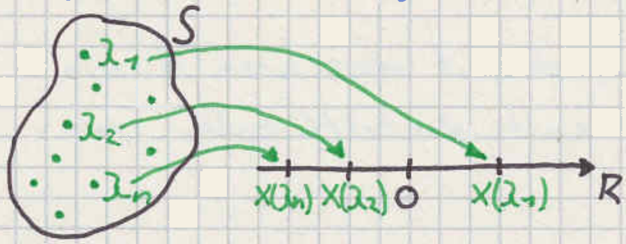
Im Falle einer vollständig abgeschlossenen Menge von n paarweise unvereinbaren Er-Eignissen A_i, gilt folgende Formel

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

2. Zufallsvariablen und WSK-Verteilungen

2.1. Diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen (Folie 2)

Eine Zufallsvariable $X(\lambda)$ ist eine Funktion welche jedem Ereignis des Ereignisraums S eine reelle Zahl zuweist.



S = Ereignisraum / Ereignisfeld

λ = Elementarereignis

Diskrete Zufallsvariablen:

- Eine Zufallsvariable heisst diskret, wenn der Wertebereich von $X(\lambda)$ aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Ereignissen besteht.

Kontinuierliche Zufallsvariablen:

- Eine Zufallsvariable $X(\lambda)$ heisst kontinuierlich, wenn sie beliebige Werte der ganzen reellen Achse oder von Teilintervallen der reellen Achse annehmen kann.

Eine Zufallsvariable $X(\lambda)$ kann auch gleichzeitig diskrete wie kontinuierliche Teile in ihrem Wertebereich haben.
z.B. Amplitudenwert nach einem Limiter

2.2. Verteilungsfunktion $F_x(X)$

Die Verteilungsfunktion ist nur zwischen 0 und 1 definiert!
Sie gibt an mit welcher prozentualen Wahrscheinlichkeit der Wert einer Zufallsvariablen unterhalb eines bestimmten Werts ist.
Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse $P(\lambda)$ kann auch auf die Ereignisse der Zufallsvariablen $X(\lambda)$ angewandt werden.

$$\boxed{F_x(z) = P(X(\lambda) \leq z)}$$

$F_x(z)$ kann kontinuierlich oder diskret sein.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

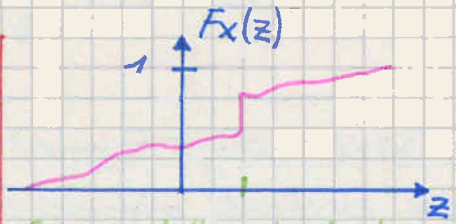
$0 \leq F_x(x) \leq 1$

$F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$ für $x_1 < x_2$

$F_x(-\infty) = 0$

$F_x(+\infty) = 1$

$F_x(a^+) = F_x(a)$ wobei a^+ für $\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon)$ steht



Sprungstellen bedeuten das dieser Wert häufig vorkommt.