

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Begriffe

Bei **a-priori** sind die Wahrscheinlichkeiten bereits vor dem ersten Durchführen des Experimentes bekannt. Es kann auch erzwungen werden. Beispiel: Fairer Würfel. Bei **a-posteriori** werden die Wahrscheinlichkeiten ermittelt, indem das Experiment durchgeführt wird.

Wenn 2 Ereignisse **Unabhängig** sind, so verändert das Auftreten eines Ereignis nicht die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignis: $P(B|A) = P(B)$.

Ein **Elementarereignis** ist ein Ereignisraum mit nur einem Ereignis.

1.2 Definition Zufallsexperiment

S	Ereignisraum (Ω)	$\bar{A} = S \setminus A$	Komplementärereignis
n	Anzahl Ereignisse in S	$C = A \cup B$	Ereignisse in A und B
λ_k	Ereignis	$C = A \cap B$	Ereignisse in A oder B
$A \in S$	Teilmenge von S	$C = S$	Sichereres Ereignis
$F_X(x)$	Verteilungsfunktion	$C = \emptyset$	Unmögliches Ereignis
$f_X(x)$	W'keitsdichte-Funktion	$B \subset A$	B ist Teil von A
μ_X	Erwartungswert	$A \cap B = \emptyset$	A und B sind disjunkte
σ_X^2	Varianz		

1.3 Wahrscheinlichkeiten

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(S) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(B) \leq P(A) \quad \text{für } B \subset A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{für disjunkte A und B}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{wenn A und B Unabhängig}$$

1.4 Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{für } x \in (-\infty, \infty), \quad F_X(-\infty) = 0 \quad F_X(\infty) = 1$$

$$P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \geq 0 \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tilde{x}) \cdot d\tilde{x} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$$

1.5 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

$$F_{XY}(x, y) \quad \text{W'keit von 2 ZV}$$

$$p_{XY}(x, y) \quad \text{Verbundsw'keitsf.}$$

$$Z = g(X, Y) \quad \text{Kombinierte ZV}$$

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x_i, Y = y_k)$$

(1) Wenn statistisch Unabhängig:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Randverteilungsfunktion:

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

Verbundsw'keitsfunktion

$$p_X(x) = \sum_{y_k} p_{XY}(x, y_k)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i} p_{XY}(x_i, y)$$

1.5.1 Verbundw'keitsdichtefunktion

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{falls X, Y statistisch Unabhängig}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

1.5.2 Erwartungswert (n-tes Moment) & Varianz

$$\mu_X = E[X] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx = \text{“Wert} \cdot \text{W'keit”}$$

$$\text{Linearität des Erwartungswert} \quad E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[cX] = cE[X]$$

Erwartungswert & Moment

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \sum_i \left(\sum_j g(x_i, y_j) \cdot p_{XY}(x_i, y_j) \right)$$

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) dx \right) dy$$

$$\text{n-tes Moment: } E(X^n) = \sum_i x_i^n \cdot p_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) \cdot dx$$

Varianz

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - \mu_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_X(x_i)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) \cdot dx$$

1.5.3 (k,n)-tes Moment m_{kn} , Korrelation m_{11}

$$m_{kn} = E[X^k Y^n] = \sum_j \left(\sum_i x_i^k y_j^n \cdot p_{XY}(x_i, y_j) \right)$$

$$m_{kn} = E[X^k Y^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n \cdot f_{XY}(x, y) \cdot dx \right) dy$$

Spezialfall: Korrelation $m_{11} = E[XY]$

1.5.4 Kovarianz σ_{XY}

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$$

$$\sigma_{XY} = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = m_{11} - \mu_X \cdot \mu_Y$$

Die zwei Zufallsvariablen X und Y sind **unkorreliert**, falls $\sigma_{XY} = 0$. Statistisch unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert.

1.5.5 Korrelations-Koeffizient $\rho(PX)$

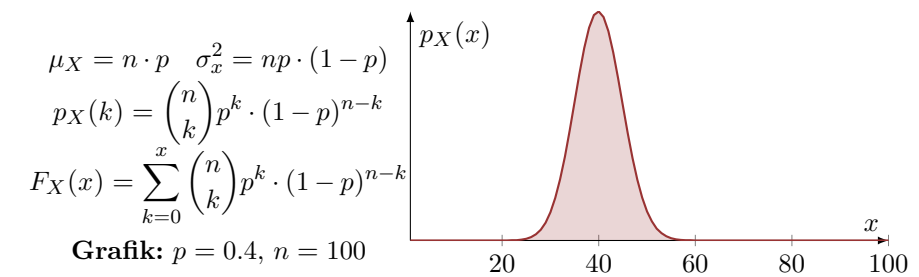
$$\rho(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad |\rho_{XY}| \leq 1$$

1.6 Verteilungen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (\text{TR: ncr})$$

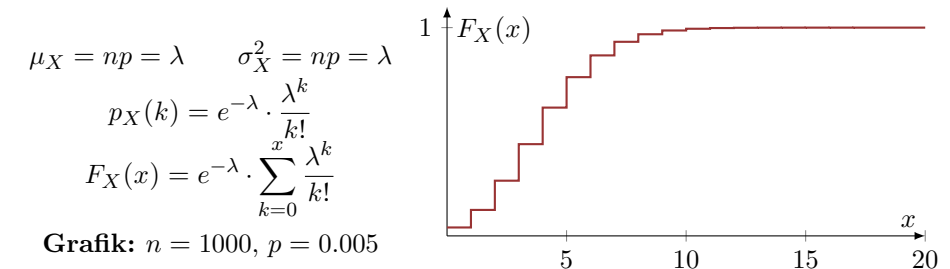
1.6.1 Binomialverteilung

Ein Experiment mit 2 möglichen Ausgängen, welche mit der W'keit p , bzw. $1 - p$ zutreffen, wird n mal wiederholt. Die ZV x ist die Anzahl, wie oft ein Ausgang eintritt.



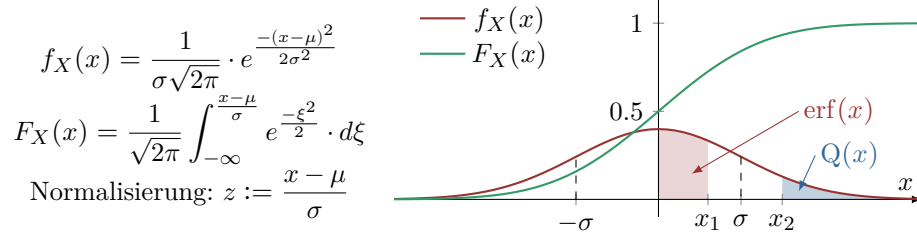
1.6.2 Poissonverteilung

Eintreten eines seltenen Ereignis ($p \ll 1$) innerhalb einer gewissen Zeitspanne. In NaT wird es jedoch meistens in einer gewissen Länge n betrachtet.



1.6.3 Normalverteilung (Gaussverteilung)

Anwendbar bei einer ZV, welche aus vielen Faktoren besteht. Beispiel: thermische Rauschquelle.



$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot d\xi$$

Normalisierung: $z := \frac{x-\mu}{\sigma}$

Q(z) als Skalierung

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

$$F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - Q(z)$$

$$Q(-z) = -Q(z)$$

erf(x) als Matlab-Funktion:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right)$$

2 Zufallsprozesse

- $X(t, \lambda)$ Zufallsprozess
- $X(t, \lambda_i) = x_i(t)$ Musterfunktion
- $X_k(\lambda)$ ZV zum Zeitpunkt t_k
- $F_{X_k}(x_k; t_k)$ Verteilungsfunktion
- $f_{X_k}(x_k; t_k)$ W'keitsdichtefunktion
- $\mu_X(t)$ Erwartungswert von $X(t)$
- $R_{XX}(t_1, t_2)$ Autokorrelation
- $C_{XX}(t_1, t_2)$ Autokovarianz
- $C_{XX}(t_1, t_2) = 0$ ZV sind unkorreliert

$$F_{X_k}(x_k; t_k) = P\{X_k(t_k) \leq x_k\}$$

$$f_{X_k}(x_k; t_k) = \frac{\partial F_{X_k}(x_k; t_k)}{\partial x_k}$$

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\tau = t_1 - t_2$$

2.1 Statische Kennwerte

$$\mu_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x; t) dx$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \cdot f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)$$

2.1.1 Leistung

Leistung P entspricht der Autokorrelation bei $\tau = 0$.

$$P = R_{XX}(0)$$

$$S_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) d\tau$$

DC-Leistung P_{DC} ist nur vorhanden, falls sich an der Stelle $S_{XX}(0)$ eine Dirac-Impulsfunktion befindet.

$$P_{DC} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} S_{XX}(\omega) d\omega$$

2.2 Stationarität

Ein Zufallsprozess ist Stationär, wenn ihre statistischen Eigenschaften zeitlich unverändert bleiben. Man unterscheidet streng und schwach stationäre Prozesse.

2.2.1 Statische Eigenschaften

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$\overline{R_{XX}}(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

$$E[\bar{x}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu_x(t) dt$$

2.2.2 Streng stationärer Zufallsprozess (SSS)

Alle statischen Eigenschaften eines SSS-Prozesses sind unabhängig von einer beliebigen Zeitverschiebung t_c :

$$E[X(t)] = \mu_x \text{ (unabhängig von } t)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau) \text{ (unabhängig von } t)$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau) - \mu_x^2$$

2.2.3 Schwach stationärer Zufallsprozess (WSS)

Ein Zufallsprozess ist schwach stationär, sobald folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
 E[X(t)] &= \mu_x \text{ (unabhängig von } t) \\
 R_{XX}(t_1, t_2) &= R_X(\tau) \text{ (unabhängig von } t) \\
 C_{XX}(t_1, t_2) &= R_X(\tau) - \mu_x^2 = C_{XX}(\tau) \\
 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_X(x_1, x_2; t_1 + t_c, t_2 + t_c)
 \end{aligned}$$

2.2.4 Ergodizität

Ein Stationärer Prozess ist ergodisch, wenn zusätzlich auch jede einzelne Musterfunktion dieselben Zeitmittelwerte besitzt, und wenn diese mit den statischen Kennwerten der Schar übereinstimmt.

$E[X(t)]$	DC-Level
$E[X(t)]^2$	DC-Leistung
$E[X^2(t)]$	Gesamtleistung
$\sigma_X^2(t)$	AC-Leistung
$X(t)$	RMS-Level

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i &= \overline{x_i(t)} = E[x(t)] = \mu_X \\
 E[x(t)] &= \mu_X \\
 E[X(t)] &= \bar{x} = \langle x(t) \rangle \\
 E[X(t)]^2 &= \langle x(t) \rangle^2 \\
 E[X^2(t)] &= R_{XX}(t) = \langle x^2(t) \rangle \\
 \sigma_X^2(t) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \\
 \sigma_X(t) &= \overline{\sigma_X}
 \end{aligned}$$

2.2.5 Eigenschaften von stationären Zufallsprozessen

Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion bei WSS Prozessen:

$$\begin{aligned}
 R_{XX}(-\tau) &= R_{XX}(\tau) \\
 R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \quad |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \\
 R_{XX}(0) &= E[X^2(x)] \\
 R_{XY}(-\tau) &= R_{XY}(\tau) \\
 R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \quad |R_{XY}\tau| \leq \frac{1}{2}(R_{XX}(0) + R_{YY}(0)) \\
 R_{XY}(\tau) &\leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}
 \end{aligned}$$

Auto- und Kreuzkovarianz bei WSS Prozessen:

$$\begin{aligned}
 C_{XX}(\tau) &= R_{XX}(\tau) - \mu_x^2 \\
 C_{XY}(\tau) &= R_{XY}(\tau) - \mu_X \cdot \mu_Y \\
 C_{XY}(\tau) &= 0 \rightarrow \text{Zufallsprozesse sind zueinander unkorreliert}
 \end{aligned}$$

Spektrale Leistung bei WSS Prozessen:

$$\begin{aligned}
 S_{XX}(\omega) &= E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |X(\omega)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E \left[|X(\omega)|^2 \right] \\
 S_{XX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega
 \end{aligned}$$

2.3 Übertragung von Zufallsprozessen über LTI-Systeme

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)du \quad \xrightarrow{X(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{Y(t)}$$

$$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_x(t) \stackrel{\text{WSS}}{=} H(0) \cdot \mu_X$$

$$\begin{aligned}
 R_{YY}(t, t+\tau) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(u_1) \cdot h(u_2) \cdot R_{XX}(t-u_1, t+\tau-u_2) \cdot du_1 du_2 \\
 R_{YY}(\tau) &\stackrel{\text{WSS}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} h(u_1) \cdot h(u_2) \cdot R_{XX}(\tau+u_1-u_2) \cdot du_1 \cdot du_2
 \end{aligned}$$

Wenn $X(t)$ ein WSS-Prozess ist, ist $Y(t)$ auch ein WSS-Prozess.

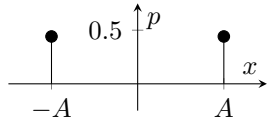
2.3.1 Leistungsdichtespektrum

$$\begin{aligned}
 S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) \\
 R_{YY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \\
 E[Y^2(t)] &= R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

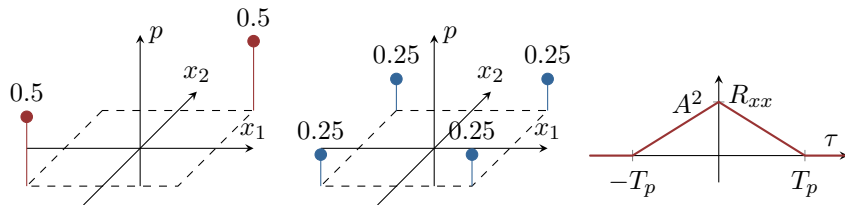
2.4 Spektren von Zufallssequenzen berechnen

1. Stationärer Zufallsprozess wird vorausgesetzt: Musterfunktion darf um eine beliebige Verschiebung Δt verschoben werden. Zu jedem Zeitpunkt ist jede Sequenz denkbar.

2. Eindimensionale (diskrete) Amplitudenverteilung: $p_X(x)$

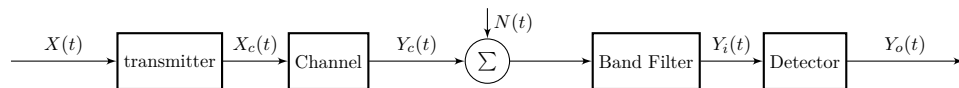


3. Zweidimensionale (diskrete) Amplitudenverteilung: $p_{XX}(x_1, x_2)$. **Rot:** $\tau = 0$, **Blau:** $\tau > T_p$, dazwischen linearer Anstieg. Danach muss die AKF berechnet werden: $R_{XX}(\tau) = \sum_i \sum_j x_i \cdot x_j \cdot p_{XX}(x_i, x_j)$



4. $R_{XX}(\tau) \circ \bullet S_{XX}(\omega) \quad P_X = R_{XX}(0) \quad P_{DC} = \left[\sum_i x_i \cdot p_X(x_i) \right]^2$

3 Rauschen in analogen Kommunikationssystemen:



Das Rauschsignal $N(t)$ ist ein stationärer und ergodischer Zufallsprozess, welcher mit $X(t)$ unkorreliert ist. Ausserdem gilt: $E[N(t)] = 0, \quad E[X(t) \cdot N(t)] = 0$. Der Frequenzgang $S_{nn}(\omega) = \frac{\eta}{2}$.

Das Nachrichtensignal ist ein Zufallsprozess $X(t)$ mit $|X(t)| \leq 1$, bzw. $|x_\lambda(t)| \leq 1$ für alle λ des Ereignisraums s . Die Leistung $S_X = S_X(t) = E[X^2(t)] \leq 1$. Ausserdem ist das Signal $X(t)$ bandbeschränkt mit der Bandbreite B . $S_x = x_{rms}^2$

	Baseband	DSB-SC	AM
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$X(t)$	$X(t) \cdot A_c \cdot \cos(\omega_c t)$	$A_c(1 + \mu X(t)) \cos(\omega_c t)$
Leistung S_i von $X_i(t)$	S_x	$\frac{1}{2} \cdot A_c^2 \cdot S_x$	$\frac{1}{2} A_c^2(1 + \mu^2 S_x)$
Bandbreite von $X_i(t)$	B	$2B$	$2B$
Rauschleistung S_{N_i} von $N_i(t)$	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$
SNR _i	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_x}{4\eta B}$	$\frac{A_c^2(1 + \mu^2 S_x)}{4\eta B}$
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$X(t)$	$A_c \cdot X(t)$	$A_c \cdot \mu \cdot X(t)$
Leistung S_o von $X_o(t)$	S_X	$A_c^2 S_x$	$A_c^2 \cdot \mu^2 \cdot S_X$
Rauschleistung S_{N_o} von $N_o(t)$	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$
SNR _o	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{A_c^2 \mu^2 S_X}{2\eta B}$
SNR _o mit γ	γ	γ	$\frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \cdot \gamma$

	PM	FM
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$A_c \cdot \cos(\omega_c t + k_p \cdot X(t))$	$A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau)$
Leistung S_i von $X_i(t)$	$\frac{1}{2} A_c^2$	$\frac{1}{2} A_c^2$
Bandbreite von $X_i(t)$	$2(D + 1)B$	$2(D + 1)B$
Rauschleistung S_{N_i} von $N_i(t)$	$2(D + 1)\eta B$	$2(D + 1)\eta B$
SNR _i	$\frac{A_c^2}{4(D + 1)\eta B}$	$\frac{A_c^2}{4(D + 1)\eta B}$
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$k_p \cdot X(t)$	$k_f \cdot X(t)$
Leistung S_o von $X_o(t)$	$k_p^2 \cdot S_X$	$k_f^2 \cdot S_X$
Rauschleistung S_{N_o} von $N_o(t)$	$\frac{2}{A_c^2} \eta B$	$\frac{2(2\pi B)^2}{3A_c^2} \eta B$
SNR _o	$\frac{k_p^2 A_c^2 S_x}{2\eta B}$	$\frac{3D^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$
SNR _o mit γ	$k_p^2 \cdot S_x \cdot \gamma$	$3D^2 \cdot S_X \cdot \gamma$

3.1 Rauschen bei Winkelmodulierten Systemen

Bei den PM- / FM-Systemen gilt für das Hubverhältnis $D = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{\delta\omega}{W_m} = \frac{B_c}{2 \cdot B_m} - 1$

$$Y_i(t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(t)) + n_i(t) \quad \text{mit} \quad S_i = \frac{1}{2} A_c^2$$

$$\varphi_{PM} = k_p \cdot X(t) \quad \varphi_{FM}(t) = k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau$$

$$Y_{oPM}(t) = \Theta(t) = k_p X(t) + \frac{n_s(t)}{A_c} \quad Y_{oFM}(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} = k_f X(t) + \frac{n_s(t)}{A_c}$$

3.2 Additive White Gaussian Noise AWGN

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}, \quad R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau), \quad \eta = \frac{\sigma^2}{B}$$

Leistung eines gefilterten AWGN: $S_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} [H_F(\omega)]^2 \cdot d\omega$

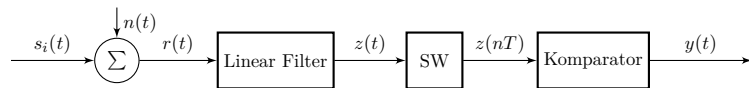
3.3 Farbige Rauschsignale

Pink noise: $S_{XX}(\omega) = c \cdot \frac{1}{\omega}$ Brown noise: $S_{XX}(\omega) = c \cdot \frac{1}{\omega^2}$

Blue noise: $S_{XX}(\omega) = c \cdot \omega$ Purple noise: $S_{XX}(\omega) = c \cdot \omega^2$

4 Optimaler Detektor

Der Empfänger soll so optimiert werden, dass er den übertragenen digitalen Datenstrom die Bitfehlerrate P_e minimiert. Also muss die Signal-Noise-Ratio klein sein. Das Rauschsignal $n(t)$ ist ein Mittelwertfreies AWGN (additive white gaussian noise). der Abtaster erzeugt das diskrete Signal $z(nT) = a_i(nT) + n_0(nT)$ (zu en Zeitpunkten nT).



$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T \text{ for binary 1} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T \text{ for binary 0} \end{cases} \quad r(t) = s_i(t) + n(t)$$

4.1 Detektor

Der Detektor entscheidet durch eine Schätzung, welches Signal höchstwahrscheinlich gesendet wurde. bei Soft-Decision wird anstatt fester Entscheidung eine W'keit für die beiden Symbolwerte bestimmt und verarbeitet.

Hypothese H_1 (falls $z(nT) > \lambda$): s_1 wurde gesendet

Hypothese H_1 (falls $z(nT) < \lambda$): s_2 wurde gesendet

Ein Bitfehler ist, wenn das falsche Bit erkannt wird. Bei Soft-Decision bildet die W'keit ein Anhaltspunkt für mögliche Bitfehler. bei Hard-Decision kann mit folgender Fehlerw'keit gerechnet werden:

$$P_e = P(H_2|s_1) \cdot P(s_1) + P(H_1|s_2) \cdot P(s_2)$$

$$P_e = \frac{1}{2} [P(H_2|s_1) + p(H_1|s_2)], \quad \text{wenn: } P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$$

4.2 Maximum Likelihood Detector

$z(nT)$ sei die Verteilung in Funktion von s_1 und s_2 .

$$\text{Hypothese } H_1 : \Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} > \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

$$\text{Hypothese } H_2 : \Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} < \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

Beim vereinfachten ML Detector wird vorausgesetzt, dass $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$. Somit wird $\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = 1$.

4.3 Beispiel: verrauschtes NRZ-Signal

ein Signal s mit den beiden möglichen Werten $s_1 = a_1, s_2 = a_2$ wird durch ein weisses Rauschen verfälscht:

$$f_{n_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_0}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_{n_0}^2}}$$

$$\Rightarrow f(z|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_0}} \cdot e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_{n_0}^2}}, \quad f(z|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_0}} \cdot e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_{n_0}^2}}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die falsche Hypothese gewählt wird:

$$P(H_1|s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz, \quad P(H_1|s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz$$

Mit den Vereinfachungen, dass $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$ und $\lambda_0 = \frac{a_1+a_2}{2}$, dann ist die Wahrscheinlichkeit P_e , dass die falsche Hypothese gewählt wurde:

$$P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_0}}\right)$$

4.4 Matched Filter

Das Lineare Filter $H(\omega)$ soll die Fehler-WSK zum Zeitpunkt T minimieren.

$$H(\omega) = S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$$

- $H(\omega)$ Übertragungsfunktion des Filters
- $s(t)$ Differenzsignal $s_1 - s_2$
- a_1, a_2 Signalwerte von s_1, s_2
- $S(\omega)$ Spektrale Leistung des Signals
- E_d Energie des Differenzsignals $s(t)$
- P_e Fehlerwahrscheinlichkeit
- λ_0 Optimaler Schwellenwert

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{omax}} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{n_0}^2} = \frac{2E_d}{\eta}$$

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

$$P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_{n_0}^2}{2A} \cdot \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} \text{ wenn } a_1 = -a_2 = A$$

4.4.1 Variante zum matched-Filter: Korrelator

zum Sample Zeitpunkt $t = T$ ist die Antwort $z(t)$ eines Matched Filters und diejenigen eines **Korrelators** identisch. ein Korrelator multipliziert zwei Signale $s(t)$ und $r(t)$ und integriert das Resultat.

$$\underbrace{z(t) = r(t) * h(t)}_{\text{Matched Filter}} = \underbrace{\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Korrelator}} = \int_0^t r(\tau)s(T-(t-\tau))d\tau \stackrel{t=T}{=} \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau$$

5 Informationen

- **Information** (mathematische Betrachtung): Antwort auf eine konkrete Fragestellung. Die Fragen können geschickter gestellt werden, um die Anzahl der Fragen zu minimieren. Fragen sind dann geschickt gewählt, wenn bei wiederholtem Zufallsexperiment im Schnitt die Anzahl Fragen minimal ist. Bei binärer Sichtweise sind Fragen dann optimal, wenn sie **mit 50% Wahrscheinlichkeit** mit Ja oder Nein beantwortet werden. So werden wahrscheinliche Ergebnisse mit wenigen Fragen gefunden.

5.1 Mathematische Beschreibung

$I(X_i)$	Informationsgehalts des Ereignis X_i	$R(X)$	Redundanz der Quelle X
$H(X)$	Entropie des Alphabets einer Quelle X	r	Symbolrate
m	Grösse des Alphabets in anz. Zeichen	R	Informationsrate

$$I(X_i) = -\log_2 P(X_i)$$

$$I(X_i) \geq 0$$

$$I(X_i) > I(X_k), \text{ wenn } P(X_i) < P(X_k)$$

$$I(X_i, X_k) = I(X_i) + I(X_k), \text{ wenn } X_i, X_k \text{ statistisch unabhängig}$$

$$H(X) = E[I(X_i)] = \sum_i P(X_i) \cdot I(X_i) = - \sum_i P(X_i) \cdot \log_2 P(X_i)$$

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 m \quad \text{für binäre Quellen: } 0 \leq H(X) \leq 1$$

$$H_{\text{max}}(X) = \log_2 m$$

$$R(X) = H_{\text{max}}(X) - H(X) = \log_2 m + \sum_i P(X_i) \cdot \log_2 P(X_i)$$

$$R(X) = r \cdot H(X)$$

5.2 Kanaldarstellung

Die Kanalmatrix gibt für jedes gesendete Symbol x_i die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(y_i|y_i)$ an, dass der Empfänger ein y_i dedektiert. m : Anzahl Eingangssymbole, n : Anzahl Ausgangssymbole.

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_1|x_2) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_1|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_m) & P(y_1|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix}$$

Die Verbundmatrix gibt die Wahrscheinlichkeiten von sämtlichen Kombinationen von gesendeten und empfangenen Symbolen X_i und Y_i an.

$$[P(Y, X)] = \begin{bmatrix} P(y_1, x_1) & P(y_2, x_1) & \dots & P(y_n, x_1) \\ P(y_1, x_2) & P(y_2, x_2) & \dots & P(y_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1, x_m) & P(y_2, x_m) & \dots & P(y_n, x_m) \end{bmatrix}$$

Kanalmatrix

Verlustloser Kanal:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deterministischer Kanal:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

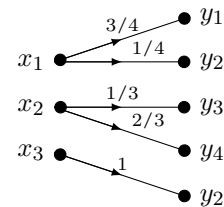
Rauschfreier Kanal:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Binärer symmetrischer Kanal:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} (1-p) & p \\ p & (1-p) \end{bmatrix}$$

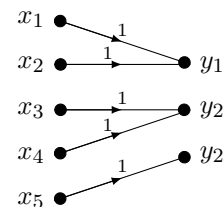
Kanaldiagramm



C_s

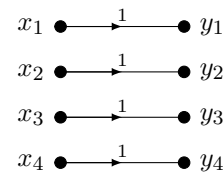
$$C_s = H(X)$$

$$C_s = \log_2(m)$$



$$C_s = H(Y)$$

$$C_s = \log_2(n)$$

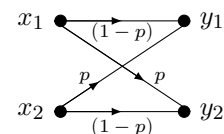


$$C_s = H(X)$$

$$C_s = H(Y)$$

$$C_s = \log_2(n)$$

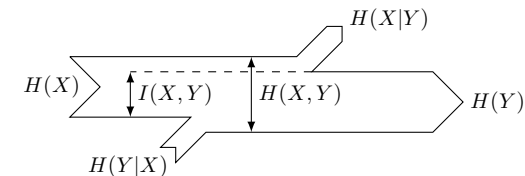
$$C_s = \log_2(m)$$



$$C_s = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

5.3 Bedingte Entropie

- $H(Y|X)$ ist der Informationsbedarf, um aus gesendetem X das empfangene Y zu bestimmen.
- $H(X|Y)$ ist der Informationsbedarf um aus empfangenem Y das gesendete X zu bestimmen. (Information aus dem Empfänger, welche notwendig ist, um zu wissen, was gesendet wurde.)
- $H(X, Y)$: die Verbundentropie ist die Information des gesamten Kommunikationskanals. Das ist der Informationsgehalt der gesendeten und Empfangenen Symbole, sowie deren Beziehung zueinander.
- $I(X, Y)$ ist die Information, welche vom Eingang zum Ausgang des Kanals transferiert wird.



$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X)$$

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = I(Y, X)$$

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = C_s \text{ Wenn } I(X, Y) \text{ maximal}$$

5.4 Kanalkapazität

Die Kanalkapazität C_s, C ist die W'keitsverteilung von X , welche den Informationsfluss über den Kanal maximiert. Dabei ist da Eingangs- und Ausgangsalphabet, sowie die Kanalmatrix $P(Y|X)$ gegeben. Hier ist r : Symbolrate. Wenn $\mathbf{C} > \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{X})$ kann der Code fehlerfrei übertragen werden.

$$C = r \cdot C_s = r \cdot \max I(X, Y)$$

$$C = B \cdot \log_2 (1 + \text{SNR}) \begin{bmatrix} b \\ s \end{bmatrix}$$

6 Quellenkodierung

- **Fixed Length Code:** Jedes Codewort hat die gleiche Länge (Bsp: ASCII-Code)
- **Variable Length Code:** Je nach Häufigkeit wird die Länge der Codewörter bestimmt (Bsp: Morse, Shannon-Fano, Huffman)
- **Prefix-Free Code:** Kein Codewort ist Präfix eines anderen Codeworts. Ein präfixfreier Code ist immer eindeutig dekodierbar.
- **Uniquely Decodable Code:** Eine Kette von Codewörtern kann eindeutig wieder in die ursprüngliche Symbolfolge zurückgewandelt werden.
- **Instantaneous Code:** Eindeutig decodierbarer Code, welcher nach dem Empfangen jedes einzelnen Codeworts sofort ein eindeutiges Symbol liefert, ohne dass nachfolgende Symbole decodiert werden müssen.

6.1 Optimaler Code

Jeder Instantaneous Code, welcher eine minimale Codelänge besitzt, ist ein optimaler Code.

L	Mittlere Codelänge	$L = \sum P(x_i) \cdot n_i \geq H(X)$
η	Effizienz der Codierung	$\eta = \frac{H(X)}{L}$
R	Redundanz der Codierung	$R = L - H(X)$
R_i	Redundanz der Informationsquelle	$R_i = H_{max}(X) - H(X)$
m	Anzahl Zeichen im Alphabet	$R_i = \log_2(m) - H(X)$

6.2 Kraft'sche Ungleichung

Gegeben ist eine Quelle mit dem Alphabet $x_i, i = 1 \dots n$. Jedem Symbol x_i wird eine Codelänge n_i zugewiesen. Die Kraft'sche Ungleichung besagt, dass ein eindeutig und sofort codierbarer binärer Code gefunden werden kann, wenn:

$$K = \sum_i 2^{-n_i} \leq 1$$

6.2.1 Shannon-Fano Codierung

1. Symbole nach absteigender W'keit anordnen.
2. Mit Trennung 2 Teilmengen möglichst gleicher W'keit bilden
3. Obere Teilmenge 0, unterer Teilmenge 1 zuordnen
4. für jede Teilmenge Schritt 2 wiederholen.

6.3 Huffman Codierung

1. Symbole und Symbolgruppen nach absteigender W'keit anordnen.
2. Unterste zwei Symbole als Symbolgruppe zusammenfassen.
3. Weiter bei Schritt 1, bis nur noch zwei Symbolgruppen vorliegen.
4. Der Symbolgruppe mit grösserer W'keit 0, der anderen 1 zuordnen.
5. Letzte Reduktion rückgängig machen.
6. Weiter bei Schritt 4, bis für alle Einzelsymbole ein Codewort vorliegt.

7 Kanalcodierung

Durch das Beifügen von geeigneter Redundanz wird die Fehlererkennung und Fehlerkorrektur ermöglicht. C_s [b / Symbol]: Kanalkapazität $H(X)$: Entropie des DMS.

Theorem: Falls $H(X) < C_s$ kann mit geeigneter Kanalcodierung die Fehlerrate der Übertragung beliebig klein gemacht werden. Falls $H(X) > C_s$ ist fehlerfreie Übertragung nicht möglich.

Das heisst, dass Bitfehler in der Übertragung zu einer Beschränkung der nutzbaren Übertragungsrate führen.

$d, d(x)$	Datenwort	$c, c(x)$	Codewort
k	Länge des Datenwortes	n	Länge des Codewortes
$R_c = \frac{k}{n}$	Coderate	m	Anzahl Symbole im Alphabet
$s, s(x)$	Fehlersyndrom	$K = \{0, 1\}$	Zeichen im Alphabet
$c_r, c_r(x)$	Empfangenes Codewort	$e, e(x)$	Error-pattern der Länge n

Ein Fehlerkorrigierender Code wird angegeben mit (n, k) .

7.1 Blockcodes

Der Eingangsdatenstrom wird in Blöcke unterteilt, welcher separat codiert wird. Ein **Galois Körper** ist ein algebraischer Körper mit endlich vielen Elementen. Wir beschränken uns auf den binären Fall: $M = 0, 1$. Die Operation \oplus (logisches XOR) und \odot (logisches AND)

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{und} \quad \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \text{aus dem Code } C$$

$$\underline{c} = \underline{a} \oplus \underline{b} = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n)$$

7.2 Linearer Code

Ein Code C ist genau dann linear, wenn für alle \underline{a} und \underline{b} auch $\underline{c} = \underline{a} \oplus \underline{b}$ zu C gehört. Ausserdem ist jeder Code, welcher mit einer Generatormatrix definiert werden kann, ein linearer Blockcode.

- $w(\underline{c})$ Hamming-Gewicht: anzahl Einer des Codewortes
- $d(\underline{a}, \underline{b})$ Hamming-Distanz : Anzahl unterschiedliche Stellen von \underline{a} und \underline{b}
- d_{min} Minimale Hamming-Distanz aller möglichen Codewort-paare

$$w(\underline{c}) = d(\underline{c}, \underline{0}) \quad d(\underline{a}, \underline{b}) = w(\underline{a} \oplus \underline{b})$$

$$d_{min} = \min[d(\underline{a}, \underline{b})] \stackrel{\text{linear}}{=} \min[w(\underline{a} \oplus \underline{b})] = \min[w(\underline{c})]$$

Anhand dieser minimalen Hammingdistanz d_{min} lässt sich die Anzahl der korrigierbaren und detektierbaren Fehler berechnen:

$$t_d \quad \text{Detektierbare Fehler} \quad t_d = d_{min} - 1$$

$$t_c \quad \text{Korrigierbare Fehler} \quad t_c = \text{floor} \left[\frac{1}{2} \cdot (d_{min} - 1) \right]$$

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t_c} \binom{n}{i}$$

Bei **Systematischen Blockcodes** kommen alle Datenbits unmodifiziert im Codewort vor. Falls diese Bits an einer definierten Stelle auftreten, handelt es sich um ein **geordneter systematischer Code**.

7.2.1 Generatormatrix G

I_k ist die Einheitsmatrix und P^T die transponierte Paritätsmatrix.

$$\underline{c} = \underline{d} \odot G = \underline{d} \odot \begin{bmatrix} I_K & P^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_k \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{21} & \dots & p_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{12} & p_{22} & \dots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{mk} \end{bmatrix}$$

7.2.2 Bestimmung der Generatormatrix

Die n Zeilen von G werden aus Codeworten gebildet. Diese bestehen neben dem Systematischen Teil (Einheitsmatrix) aus Paritätsbits $p(x)$ (Ordnung $n - k - 1$). Diese sind die Reste der folgenden Divisionen durch $g(x)$ (Ordnung $n - k$):

$$\begin{matrix} p_1 = x^{n-1} \text{ mod } g(x) \\ p_2 = x^{n-2} \text{ mod } g(x) \\ \vdots \\ p_k = x^{n-k} \text{ mod } g(x) \end{matrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1,n-k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{20} & p_{21} & \dots & p_{2,n-k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{k0} & p_{k1} & \dots & p_{k,n-k-1} \end{bmatrix}$$

7.2.3 Paritätsprüfmatrix H

Mit dieser Matrix können Übertragungsfehler erkannt werden. O ist die $[k \times m]$ Nullmatrix, $\underline{0}$ ist der $[1 \times m]$ Nullvektor. $m = n - k$: Anzahl Paritätsbits

$$H = \begin{bmatrix} P & I_m \end{bmatrix} \quad H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$G \odot H^T = O \quad \underline{c} \odot H^T = \underline{d} \odot G \odot H^T = \underline{0}$$

Wenn: $\underline{c} \odot H^T = 0 \rightarrow$ keine Fehler bei der Übertragung

Die minimale Hamming-Distanz d_{min} von C entspricht somit der minimalen Anzahl Spalten / Zeilen von H^T , welche linear kombiniert den Nullvektor $\underline{0}$ ergeben. \underline{c}_r ist das empfangene Codewort, welches maximal t Fehler haben kann, um das Codewort korrigieren zu können.

$$\underline{c}_r = \underline{c} \oplus \underline{e}$$

$$\underline{s} = \underline{c}_r \odot H^T = (\underline{c} \oplus \underline{e}) \odot H^T = \underline{c} \odot H^T \oplus \underline{e} \odot H^T = \underline{e} \odot H^T$$

Bei Einzelfehler entspricht das Fehlersyndrom \underline{s} genau einer Zeile von H^T . Wenn alle Zeilen von H^T unterschiedlich sind, kann aus \underline{s} das Fehlerbit e_i eindeutig bestimmt werden. So kann das empfangene Codewort \underline{c}_r korrigiert werden.

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

Gilt das Gleichheitszeichen, handelt es sich um einen so genannten **perfekten Code**. Ein perfekter Code, der nur Einzelfehler korrigieren kann, nennt man **Hamming-Code**.

7.3 Zyklische Lineare Codes

Jede Zyklische Verschiebung eines Codewortes \underline{c} führt zu einem neuen gültigen Codewort von C . Wenn bei der Generatormatrix eine Zeile zyklisch verschoben wird, muss diese gleich einer anderen Zeile sein. Um eine hohe Coderate zu erzielen, sollte eine möglichst hohe Coderate $R_c = \frac{k}{n}$ erreicht werden. Ein Codewort \underline{c} kann als Polynom $c(x)$ geschrieben werden: $\underline{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ $c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$. Es werden folgende Operationen definiert:

$$\begin{aligned} \text{mod } 2(x^k + x^k) &= x^k \oplus x^k = 0 & \text{mod } 2(x^k - x^k) &= x^k \ominus x^k = 0 \\ \text{mod } 2(0 + x^k) &= 0 \oplus x^k = x^k & \text{mod } 2(0 - x^k) &= 0 - x^k = x^k \end{aligned}$$

Beispiele: $\underline{a} = (11000)$ $a(x) = 1 + x$
 $\underline{b} = (10110)$ $b(x) = 1 + x^2 + x^3$

$$\underline{a} \odot \underline{b} = a(x) \cdot b(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 = 1 + x + x^5 \Rightarrow (11001)$$

Im Folgenden wird eine wichtige Operation beschrieben. Für das Polynom $q(x)$ interessiert man sich meisst nicht. Normalerweise wird nach dem Rest $r(x)$ gesucht. $r(x)$ und $q(x)$. Die Operation \odot ist eine Polynomdivision.

$$f(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x) \quad f(x) \odot h(x) \Rightarrow q(x), r(x)$$

Notation: $r(x) = f(x) \text{ mod } h(x)$

Wenn ein Codewort c um i Stellen zyklisch verschoben wird:

$$\underline{c}^{(i)} = (c_{n-i}, c_{n-(i-1)}, \dots, c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-(i+1)})$$

$$c^{(i)}(x) = c_{n-i} + c_{n-(i-1)}x + \dots + c_{n-1}x^{i-1} + c_0x^i + c_1x^{i-1} + \dots + c_{n-(i+1)}x^{n-1}$$

$$c^{(i)}(x) = x^i c(x) \text{ mod } (1 + x^n)$$

7.3.1 Fundamentales Theorem für zyklische Codes

Gegeben sei das Generatorpolynom $g(x)$ mit der **Ordnung** $(n - k)$. Jeder (n, k) zyklische Code C kann mit Hilfe eines solchen Polynoms $g(x)$ gebildet werden:

Bedingungen: $g_{n-k} = g_0 = 1$ $(x^n + 1) = q(x) \odot g(x)$ (ohne Rest)
 $c(x) = d(x) \odot g(x)$

7.3.2 Fehlersyndrom

Im empfangenen Codewort $c_r(x)$ muss der Fehler $e(x)$ gefunden werden. Das Fehlersyndrom $s(x)$ ist ein Polynom des Grads $n - k$.

$$\begin{aligned} c_r(x) &= c(x) \oplus e(x) \\ s(x) &= c_r(x) \text{ mod } g(x) \\ s(x) &= e(x) \text{ mod } g(x) \end{aligned}$$

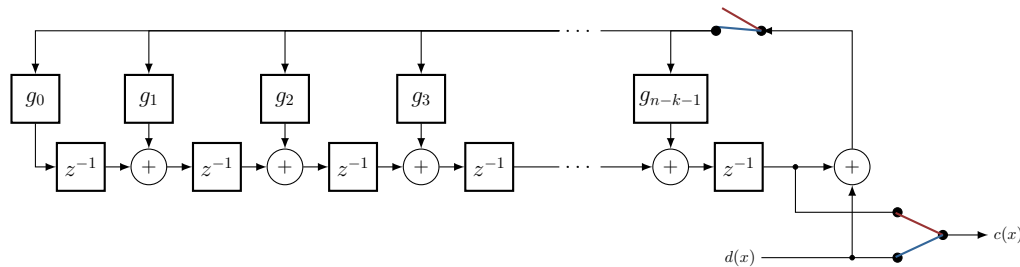
7.3.3 Generatormatrix $G [n \times k]$

Die Zeilen einer beliebigen Generatormatrix G bestehen aus k gültigen unabhängigen Codewörtern. In erster Zeile steht das Generatorpolynom $g(x)$, hinten aufgefüllt mit 0.

$$G = \begin{pmatrix} g(x) \\ x \cdot g(x) \\ \vdots \\ x^{k-1} \cdot g(x) \end{pmatrix}$$

7.3.4 Hardware-Realisierung

Generatorpolynom	$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{n-k}x^{n-k}$
Datenwort	$d(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{k-1}x^{k-1}$
Parity Bits	$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_{n-k-1}x^{n-k-1}$
Codewort	$c(x) = p_0 + \dots + p_{n-k-1}x^{n-k-1} + d_0x^{n-k} + \dots + d_{k-1}x^{n-1}$
	$c(x) = q(x) \cdot g(x) = p(x) + x^{n-k} \cdot d(x)$
	$x^{n-k} \cdot d(x) = q(x) \cdot g(x) + p(x)$



- **Phase 1:** Ausgabe von $d(x)$. (k Zyklen)
- **Phase 2:** Ausgabe von $p(x) = \text{Rest}$. ($n - k$ Zyklen)

8 Fourier Transformation

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

8.0.1 Eigenschaften

Eigenschaft	$x(t)$	$X(\omega)$
Linearität	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - t_0)$	$X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Zeitskalierung	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Dualität	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Frequenzverschiebung	$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(t) \cdot \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$
Ableitung nach t	$\dot{x}(t)$	$j\omega X(\omega)$
Ableitung nach ω	$-jtx(t)$	$X'(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega) \delta(\omega)$

8.0.2 Einige Transformationspaare

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \cdot \text{sgn}(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-at} \cdot u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + 1}$
$te^{-at} \cdot u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + 1)^2}$
$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$2a \cdot \frac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & \text{falls } t < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$a \left[\frac{\sin(\frac{\omega a}{2})}{\frac{\omega a}{2}} \right]^2$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$
$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$	$-j \text{sgn}(\omega) \cdot X(\omega)$

9 Q-Funktion

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0.00	0.5	2.30	0.010724	4.55	$2.6823 \cdot 10^{-6}$	6.80	$5.231 \cdot 10^{-12}$
0.05	0.48006	2.35	0.0093867	4.60	$2.1125 \cdot 10^{-6}$	6.85	$3.6925 \cdot 10^{-12}$
0.10	0.46017	2.40	0.0081975	4.65	$1.6597 \cdot 10^{-6}$	6.90	$2.6001 \cdot 10^{-12}$
0.15	0.44038	2.45	0.0071428	4.70	$1.3008 \cdot 10^{-6}$	6.95	$1.8264 \cdot 10^{-12}$
0.20	0.42074	2.50	0.0062097	4.75	$1.0171 \cdot 10^{-6}$	7.00	$1.2798 \cdot 10^{-12}$
0.25	0.40129	2.55	0.0053861	4.80	$7.9333 \cdot 10^{-7}$	7.05	$8.9459 \cdot 10^{-13}$
0.30	0.38209	2.60	0.0046612	4.85	$6.1731 \cdot 10^{-7}$	7.10	$6.2378 \cdot 10^{-13}$
0.35	0.36317	2.65	0.0040246	4.90	$4.7918 \cdot 10^{-7}$	7.15	$4.3389 \cdot 10^{-13}$
0.40	0.34458	2.70	0.003467	4.95	$3.7107 \cdot 10^{-7}$	7.20	$3.0106 \cdot 10^{-13}$
0.45	0.32636	2.75	0.0029798	5.00	$2.8665 \cdot 10^{-7}$	7.25	$2.0839 \cdot 10^{-13}$
0.50	0.30854	2.80	0.0025551	5.05	$2.2091 \cdot 10^{-7}$	7.30	$1.4388 \cdot 10^{-13}$
0.55	0.29116	2.85	0.002186	5.10	$1.6983 \cdot 10^{-7}$	7.35	$9.9103 \cdot 10^{-14}$
0.60	0.27425	2.90	0.0018658	5.15	$1.3024 \cdot 10^{-7}$	7.40	$6.8092 \cdot 10^{-14}$
0.65	0.25785	2.95	0.0015889	5.20	$9.9644 \cdot 10^{-8}$	7.45	$4.667 \cdot 10^{-14}$
0.70	0.24196	3.00	0.0013499	5.25	$7.605 \cdot 10^{-8}$	7.50	$3.1909 \cdot 10^{-14}$
0.75	0.22663	3.05	0.0011442	5.30	$5.7901 \cdot 10^{-8}$	7.55	$2.1763 \cdot 10^{-14}$
0.80	0.21186	3.10	0.0009676	5.35	$4.3977 \cdot 10^{-8}$	7.60	$1.4807 \cdot 10^{-14}$
0.85	0.19766	3.15	0.00081635	5.40	$3.332 \cdot 10^{-8}$	7.65	$1.0049 \cdot 10^{-14}$
0.90	0.18406	3.20	0.00068714	5.45	$2.5185 \cdot 10^{-8}$	7.70	$6.8033 \cdot 10^{-15}$
0.95	0.17106	3.25	0.00057703	5.50	$1.899 \cdot 10^{-8}$	7.75	$4.5946 \cdot 10^{-15}$
1.00	0.15866	3.30	0.00048342	5.55	$1.4283 \cdot 10^{-8}$	7.80	$3.0954 \cdot 10^{-15}$
1.05	0.14686	3.35	0.00040406	5.60	$1.0718 \cdot 10^{-8}$	7.85	$2.0802 \cdot 10^{-15}$
1.10	0.13567	3.40	0.00033693	5.65	$8.0224 \cdot 10^{-9}$	7.90	$1.3945 \cdot 10^{-15}$
1.15	0.12507	3.45	0.00028029	5.70	$5.9904 \cdot 10^{-9}$	7.95	$9.3256 \cdot 10^{-16}$
1.20	0.11507	3.50	0.00023263	5.75	$4.4622 \cdot 10^{-9}$	8.00	$6.221 \cdot 10^{-16}$
1.25	0.10565	3.55	0.00019262	5.80	$3.3157 \cdot 10^{-9}$	8.05	$4.1397 \cdot 10^{-16}$
1.30	0.0968	3.60	0.00015911	5.85	$2.4579 \cdot 10^{-9}$	8.10	$2.748 \cdot 10^{-16}$
1.35	0.088508	3.65	0.00013112	5.90	$1.8175 \cdot 10^{-9}$	8.15	$1.8196 \cdot 10^{-16}$
1.40	0.080757	3.70	0.0001078	5.95	$1.3407 \cdot 10^{-9}$	8.20	$1.2019 \cdot 10^{-16}$
1.45	0.073529	3.75	$8.8417 \cdot 10^{-5}$	6.00	$9.8659 \cdot 10^{-10}$	8.25	$7.9197 \cdot 10^{-17}$
1.50	0.066807	3.80	$7.2348 \cdot 10^{-5}$	6.05	$7.2423 \cdot 10^{-10}$	8.30	$5.2056 \cdot 10^{-17}$
1.55	0.060571	3.85	$5.9059 \cdot 10^{-5}$	6.10	$5.3034 \cdot 10^{-10}$	8.35	$3.4131 \cdot 10^{-17}$
1.60	0.054799	3.90	$4.8096 \cdot 10^{-5}$	6.15	$3.8741 \cdot 10^{-10}$	8.40	$2.2324 \cdot 10^{-17}$
1.65	0.049471	3.95	$3.9076 \cdot 10^{-5}$	6.20	$2.8232 \cdot 10^{-10}$	8.45	$1.4565 \cdot 10^{-17}$
1.70	0.044565	4.00	$3.1671 \cdot 10^{-5}$	6.25	$2.0523 \cdot 10^{-10}$	8.50	$9.4795 \cdot 10^{-18}$
1.75	0.040059	4.05	$2.5609 \cdot 10^{-5}$	6.30	$1.4882 \cdot 10^{-10}$	8.55	$6.1544 \cdot 10^{-18}$
1.80	0.03593	4.10	$2.0658 \cdot 10^{-5}$	6.35	$1.0766 \cdot 10^{-10}$	8.60	$3.9858 \cdot 10^{-18}$
1.85	0.032157	4.15	$1.6624 \cdot 10^{-5}$	6.40	$7.7688 \cdot 10^{-11}$	8.65	$2.575 \cdot 10^{-18}$
1.90	0.028717	4.20	$1.3346 \cdot 10^{-5}$	6.45	$5.5925 \cdot 10^{-11}$	8.70	$1.6594 \cdot 10^{-18}$
1.95	0.025588	4.25	$1.0689 \cdot 10^{-5}$	6.50	$4.016 \cdot 10^{-11}$	8.75	$1.0668 \cdot 10^{-18}$
2.00	0.02275	4.30	$8.5399 \cdot 10^{-6}$	6.55	$2.8769 \cdot 10^{-11}$	8.80	$6.8408 \cdot 10^{-19}$
2.05	0.020182	4.35	$6.8069 \cdot 10^{-6}$	6.60	$2.0558 \cdot 10^{-11}$	8.85	$4.376 \cdot 10^{-19}$
2.10	0.017864	4.40	$5.4125 \cdot 10^{-6}$	6.65	$1.4655 \cdot 10^{-11}$	8.90	$2.7923 \cdot 10^{-19}$
2.15	0.015778	4.45	$4.2935 \cdot 10^{-6}$	6.70	$1.0421 \cdot 10^{-11}$	8.95	$1.7774 \cdot 10^{-19}$
2.20	0.013903	4.50	$3.3977 \cdot 10^{-6}$	6.75	$7.3923 \cdot 10^{-12}$	9.00	$1.1286 \cdot 10^{-19}$
2.25	0.012224						

10 Generatorpolynom $g(x)$ eines Zyklischen (n, k) -Codes

Folgende Tabelle zeigt alle möglichen Kombinationen, um ein Generatorpolynom zu erstellen. Die gewünschte Ordnung muss erreicht werden, indem verschiedene Faktoren zusammengenommen werden.

Beispiel: Ein $(7, 3)$ -Code hat ein Generatorpolynom der Ordnung 4. Ausserdem muss $(x^7 + 1) = q(x) \odot g(x)$ sein. Das Generatorpolynom ist nun eine Kombination entweder $(x + 1) \odot (x^3 + x + 1)$ oder $(x + 1) \odot (x^3 + x^2 + 1)$.

$$\begin{aligned}
 (x^{10} + 1) &= (x + 1)^2 \odot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
 (x^9 + 1) &= (x + 1) \odot (x^2 + x + 1) \odot (x^6 + x^3 + 1) \\
 (x^8 + 1) &= (x + 1)^8 \\
 (x^7 + 1) &= (x + 1) \odot (x^3 + x + 1) \odot (x^3 + x^2 + 1) \\
 (x^6 + 1) &= (x + 1)^2 \odot (x^2 + x + 1)^2 \\
 (x^5 + 1) &= (x + 1) \odot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
 (x^4 + 1) &= (x + 1)^4 \\
 (x^3 + 1) &= (x + 1) \odot (x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$