1. Aussagenlogik und Prädikate

$\neg$	Negation (nicht)
$\wedge$	Konjunktion (und)
$\vee$	Disjunktion (oder)
$\perp$	falsch
$\top$	wahr
$\leftrightarrow$	Äquivalent (beide wahr oder beide falsch) *Aussprache: A genau dann wenn B*
$\rightarrow$	Implikation ($\neg A \vee B$) – nur falsch wenn A wahr und B falsch ist *($A \rightarrow B$, A = Elefant, B = Tier, nur falsch wenn Elefant aber kein Tier)* *Aussprache: wenn A dann B, oder aus A folgt B)*
$\forall$	All-Aussage ($\forall$-Quantor)
$\exists$	Existenz-Aussage ($\exists$-Quantor)
$\exists!$	Existenz-Aussage mit nur genau einem x

Formeln

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	(Kommutativ-Gesetz)
$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	(Kommutativ-Gesetz)
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	(Verschmelzungs-Gesetz)
$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$	(Verschmelzungs-Gesetz)
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(Distributive-Gesetz)
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	(Distributive-Gesetz)
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	(Morgan-Gesetz)
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	(Morgan-Gesetz)
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	(Kontra-Position)
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$	
$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	
$\neg (A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$	

Umwandlung jeder All-Aussage in eine Existenz-Aussage und umgekehrt:

$$\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

Begriffe

Axiome

Unbestrittene Grundannahmen (Extensionalitätsaxiom, Paarmengenaxiom, Teilmengenaxiom, Potenzmengenaxiom, …)

Tautologie

Allgemein gültige Aussage (immer wahr)

Indirekter Beweis

Falls die Negation von A auf einen Widerspruch führt, so muss A gelten.
$(\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$

2. Mengenlehre

$\in$	Element von (A$\in$B, A muss komplett Element von B sein)
$\notin$	nicht Element von
$\subset$	Teilmenge von (A$\subset$B, jedes Element von A muss auch Element von B sein)
$\subseteq$	Teilmenge von
$\cap$	geschnitten mit ($\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$)
$\cup$	vereinigt mit ($\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$)
$\overline{A}$	Komplement von A (A Quer)
x	Kartesisches Produkt {1,2,3}x{d,e}={(1,d),(1,e),(2,d),(2,e),(3,d),(3,e)} Produktmenge: (AxB={(a,b) | a$\in$A und b$\in$B}
|M|	Mächtigkeit (Anzahl Elemente)
T()	Teilermenge einer Zahl T(6) = {{},1,2,3,6}
P()	Potenzmenge (Menge aller Teilmengen inklusive {} und M)

Begriffe

Differenz

$A/B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Komplement

$\overline{A} := \{x \in U \mid x \notin A\} = U / A$

Tupel, Tripel, n-Tupel

(a,b) (a,b,c) $(a_1,\ldots,a_n)$

Gesetze

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Morgan-Gesetz)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Morgan-Gesetz)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributiv-Gesetz)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributiv-Gesetz)

Mächtigkeit

Wenn die Menge M unendlich ist, dann muss die Mächtigkeit mit Hilfe von Bijektionen definiert werden.
Zwei Mengen A und B heissen gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt. ($f : A \to B$ ist bijektive)

$|P(M)| = 2^{|M|}$ (Mächtigkeit der Potenzmenge)

$|AxB| = |A| x |B|$ (Mächtigkeit einer Produktmenge gleich $|A|$ mal $|B|$)

$|N| = |Z| = |Q|$ (Die Mengen der natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen und rationalen Zahlen ist gleich Mächtig)

3. Funktionen (Abbildungen)

$\rightarrow$	Definitionsmenge zu Zielmenge
$\mapsto$	Element der Definitionsmenge zu Element der Zielmenge

Begriffe

$f: D \rightarrow Z$
f:= Name der Abbildung
D := Definitionsmenge
Z := Zielmenge

$f: A \rightarrow B : a \mapsto f(a)$
$a \mapsto f(a)$:= Beziehung zwischen einem Element der Definitionsmenge und einem Element der Zielmenge. (Bsp. $f: A \rightarrow B : a \mapsto a^2$)

f^{-1}:= Umkehrfunktion

Injektive Abbildung

Auf jedes Element der Zielmenge verweist höchstens ein Element der Definitionsmenge. (höchstens ein Pfeil)

Surjektive Abbildung

Auf jedes Element der Zielmenge verweist mindestens ein Element der Definitionsmenge. Bzw. in der Zielmenge wird jedes Element erfasst (mindestens ein Pfeil)

Bijektive Abbildung

Injektive und Surjektive.
Auf jedes Element der Zielmenge verweist genau ein Element der Definitionsmenge. (genau ein Pfeil)

Relation

$R \subset \prod_{i=1}^{n} A_i$
Eine Teilmenge der Produktmenge (Beziehung der Mengen)

Prädikat

Auswahlkriterium der Produktmenge um eine Relation zu erhalten.

Selektion

$S = \{r \in R \mid \text{erfüllt } P\}$
Nur gewisse Elemente (Zeilen)

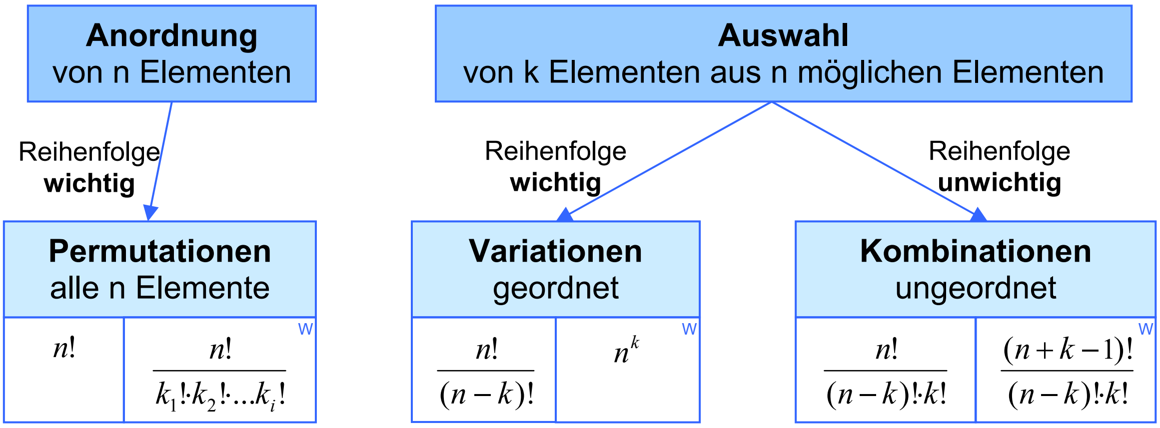
Projektion

Nur gewisse Attribute (Spalten)

4. Kombinatorik

$n!$	n-Fakultät
A	Anzahl Möglichkeiten (Eigene Definition)
W	Mit Wiederholungen (Eigene Definition)

Formeln



Permutationen

(Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholungen)

$$P_n \quad gibt \quad A = n!$$

Permutationen mit Wiederholungen

(Jeweils k_i Elemente sind gleich)

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_i)} \quad gibt \quad A = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_i!}$$

Variationen

(geordnete k-Tupel ohne Wiederholungen aus n Zeichen)

$$V_n^k \quad gibt \quad A = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Variationen mit Wiederholungen

(geordnete k-Tubel mit Wiederholungen aus n Zeichen)

$${}^wV_n^k \quad gibt \quad A = n^k$$

Kombinationen

(ungeordnete k-Teilmengen aus einer n-Menge)

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{V_n^k}{P_n} \quad gibt \quad A = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \;,\; \binom{n}{1} = n \;,\; C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+n} \;,\; C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+n}$$

Kombinationen mit Wiederholungen

(ungeordnete k-Tupel mit Wiederholungen aus n Zeichen)

$${}^wC_n^k = \binom{n+k-1}{k} \quad gibt \quad A = \frac{(n+k-1)!}{(n-k)! \cdot k!}$$

5. Folgen, Reihen und Landau Symbol

O	Obere Schranke
Ω	Untere Schranke
Θ	Obere und untere Schranke

Begriffe

Arithmetische Folge

$d = a_{n-1} - a_n$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ $\quad a_n = a_{n-1} + d$ $\quad S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$

Arithmetische Reihe

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Geometrische Folge

$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$

q>0 steigend 0<q<1 fallend q<0 oszillierend

Geometrische Reihe

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ (steigend) $\quad S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (fallend)

Landau Symbol

Wird verwendet um das asymptotische Verhalten von Funktionen und Folgen zu beschreiben sowie um die Komplexität und Aufwändigkeit zu vergleichen.

$\mathrm{O}(\log_2(n)) = \mathrm{O}(\ln(n)) = \mathrm{O}(\log(n)) \quad \subset$

$\mathrm{O}(\sqrt{n}) \quad \subset$

$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n + \log(n)) \quad \subset$

$\mathrm{O}(n\cdot\log(n)) \quad \subset$

$\mathrm{O}(n^2) = \mathrm{O}(5\cdot n^2 + 2n + 100) \quad \subset$

$\mathrm{O}(n^{1000}) \quad \subset$

$\mathrm{O}(2^{\sqrt[1000]{n}}) \quad \subset$

$\mathrm{O}(2^{\sqrt{n}}) \quad \mathrm{O}(2^n) \quad \subset$

$\mathrm{O}(2^{2n}) = \mathrm{O}(4^n) \quad \subset$

$\mathrm{O}(2^{n^2})$

$\mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g) \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

$\Theta(f) = \Theta(g) \Rightarrow \mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g)$

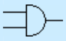
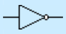
$\Theta(f) \subset \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$ $\quad$ falsch: $\mathrm{O}(f) \subset \mathrm{O}(g) \Rightarrow \mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g)$

$f \in \mathrm{O}(g) \Rightarrow \mathrm{O}(f) \subset \mathrm{O}(g)$

$f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) \subset \Theta(g)$

$f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$ $\quad$ falsch: $f \in \mathrm{O}(g) \Rightarrow \mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g)$

6. Boolesche Terme (Digitale Schaltkreise)

~	Negation, Inversion (nicht, NOT,INV)
$\sqcap$	Konjunktion (und, AND)
$\sqcup$	Disjunktion (oder, OR)
|	Sheffer-Strich (nicht und, NAND)
$\equiv$	Äquivalent (gleich, EQUAL)
w	Wahr (TRUE)
f	Falsch (FALSE)
τ	Term
	AND (und, Negation)
	OR (oder, Konjunktion)
	NOT (nicht, Disjunktion)

Begriffe

Syntax Boolscher Terme

Folgende Boolschen Terme sind erlaubt:
Atomare Terme: Variablen
Konstanten: (**w** und **f**)
Inversionen: ~
Konjunktionen: $\sqcap$
Disjunktionen: $\sqcup$

BT – Boolscher Term

Folgende Gesetze der Aussagenlogik gelten auch bei den BT:
Kommutativ- Verschmelzungs- Distributive- und Morgan-Gesetz
$\tau \sqcap \vartheta \equiv \sim(\sim\tau \sqcup \sim\vartheta)$
$\tau \sqcup \vartheta \equiv \sim(\sim\tau \sqcap \sim\vartheta)$

Zusätzliche Gesetze:

$\tau \sqcap \sim\tau \equiv \mathbf{f}$	$\tau \sqcap \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}$	$\tau \sqcap \mathbf{w} \equiv \tau$
$\tau \sqcup \sim\tau \equiv \mathbf{w}$	$\tau \sqcup \mathbf{w} \equiv \mathbf{w}$	$\tau \sqcup \mathbf{f} \equiv \tau$
x | y $\equiv$ ~(x$\sqcap$y)		(NAND, Sheffer-Strich)
(x$\sqcap$~y) $\sqcup$ (~x$\sqcap$y) $\equiv$ (x$\sqcup$y) $\sqcap$ ~(x$\sqcap$y)		(XOR)

NNF – Negations-Normalform

Inversionen dürfen nur vor Variablen stehen, soweit umformen bis dies erfüllt ist.
$\mathrm{NNF}(\tau) = \mathrm{NNF}\,(\sim(\sim\upsilon_0 \sqcap \upsilon_1) = \mathrm{NNF}(\sim\sim\upsilon_0) \sqcap \mathrm{NNF}(\sim\upsilon_1) = \upsilon_0 \sqcap \sim\upsilon_1$

KNF – Konjunktive-Normalform

Konjunktion von Disjunktionen (Zwischen jeder Klammer muss ein AND sein)
$(\ldots\sqcup\ldots\sqcup\ldots) \sqcap (\ldots\sqcup\ldots)$
$(\upsilon_1 \sqcup \upsilon_2 \sqcup \sim\upsilon_3) \sqcap (\upsilon_1 \sqcup \upsilon_2) \sqcap (\sim\upsilon_1 \sqcup \upsilon_2 \sqcup \upsilon_3)$

DNF – Disjunktive-Normalform

Disjunktion von Konjunktionen (Zwischen jeder Klammer muss ein OR sein)
$(\ldots\sqcap\ldots) \sqcup (\ldots\sqcap\ldots\sqcap\ldots)$
$(\upsilon_1 \sqcap \upsilon_2) \sqcup (\upsilon_1 \sqcap \sim\upsilon_2 \sqcap \upsilon_3) \sqcup (\upsilon_1 \sqcap \upsilon_2 \sqcap \sim\upsilon_3)$

7. Graphen (Matrizen)

Adjazenz-Matrix	Platzbedarf: $O(\|V\|^2)$	Nachbarschaft: $O(\|V\|)$
Adjazenz-Liste	Platzbedarf: $O(\|V\|+\|E\|)$	Nachbarschaft: $O(\deg(v))$

Begriffe

Knoten

Sind die Elemente eines Graphen. V = Knotenmenge

Kanten

Sind die Verbindungen eines Graphen. E = Kantenmenge

$\text{n} = \text{Anzahl Knoten, k} = \text{Anzahl Kanten}$ $\quad \text{Max Anz. Kanten} = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Grad

Definiert die Anzahl Nachbarn.

Matrizen

Addition

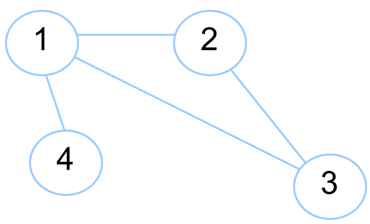
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}$$

Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}\cdot b_{11})+(a_{21}\cdot b_{12}) & (a_{12}\cdot b_{12})+(a_{11}\cdot b_{22}) \\ (a_{21}\cdot b_{21})+(a_{11}\cdot b_{22}) & (a_{22}\cdot b_{22})+(a_{21}\cdot b_{12}) \end{pmatrix}$$

Adjazenz-Matrix

Zeigt die Erreichbarkeit von jedem Knoten zu einem anderen. Wenn die beiden Knoten miteinander Verbunden sind, wird eine 1 eingetragen.



$$A = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad A^2 = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$M_2 = A\cdot A = A^2$ (Anzahl möglicher Verbindungen über **genau zwei** Kanten)

$M_3 = A\cdot A\cdot A = A^3$ (Anzahl möglicher Verbindungen über **genau drei** Kanten)

A^n (Anzahl möglicher Verbindungen über genau **n Kanten**)

$A + A^2$ (Knoten die über **höchstens zwei** Kanten miteinander verbunden sind)

$A + A^2 + A^3$ (Knoten die über **höchstens drei** Kanten miteinander verbunden sind)

Adjazenz-Liste

Eine Liste aller Knoten und für jeden Knoten eine Liste mit seinen Nachbarn.