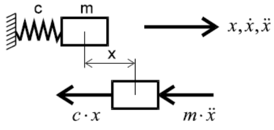
Harmonische Schwingungen



A: Amplitude [m]
c: Federkonst. [N/m]
x: Weg [m]
f: Frequenz [Hz]
ω_0: Eigenkreisfreq. [s^{-1}]
T: Periode [s]
n: Drehzahl [U/min]

d'Alembert: $m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$ $\quad \ddot{x} = -\omega_0^2 * x$

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

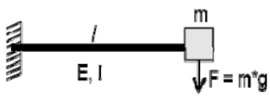
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad f = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi * n}{60}$$

Wird die Federmasse berücksichtigt, so soll ein Drittel der Federmasse zu m dazugezählt werden.

$v_{max} = A \cdot \omega_0$ max. Geschwindigkeit

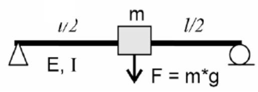
$a_{max} = A \cdot \omega_0^2$ max. Beschleunigung

Blattfeder einseitig eingespannt



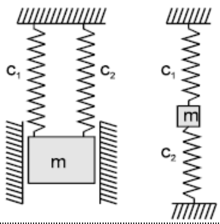
$$c = \frac{F}{y_F} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

Blattfeder beidseitig eingespannt



$$c = \frac{F}{y_F} = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

Parallelschaltung von Federn



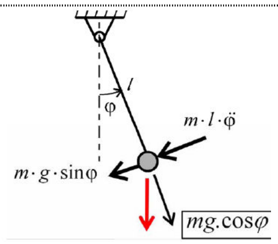
$$c_e = \sum_i c_i$$

$$c_e = \frac{F}{y}$$

Serieschaltung von Federn

$$\frac{1}{c_e} = \sum_i \frac{1}{c_i}$$

Mathematisches Pendel

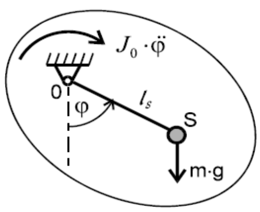


Diff-Gleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$

Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Periode $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Physikalisches Pendel



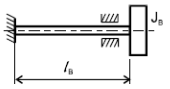
$$\ddot{\varphi} + \frac{c_T}{J_0} \cdot \varphi = 0 \qquad c_T = m \cdot g \cdot l_S$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{m * g * l_s}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_T}{J_0}} \qquad \varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \psi)$$

$$J_0 = \frac{c_T}{\omega_o^2} \qquad J_S = J_O - m.l_S^2 = m \cdot g \cdot l_S \cdot \left(\frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} - \frac{l_S}{g} \right)$$

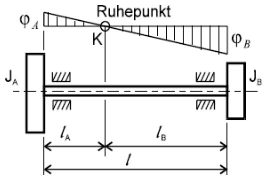
allgemeine Drehschwingung



$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_t} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{l \cdot J}}}$$

G: Schubmodul
I_t: pol. Flächenträgheitsmoment
J: Massenträgheitsmoment

Torsionsstab mit Scheiben an beiden freien Enden



linke Seite: $\boxed{\omega_{0A} = \sqrt{\frac{G * I_t}{l_A * J_A}}}$

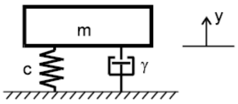
rechte Seite: $\boxed{\omega_{0B} = \sqrt{\frac{G * I_t}{l_B * J_B}}}$

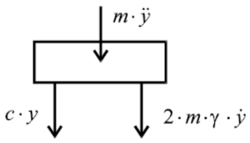
da beide Seiten synchron schwingen müssen:

$$\boxed{\omega_{0A} = \omega_{0B} = \omega_0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G * I_t}{l} * \frac{J_A + J_B}{J_A * J_B}}}$$

Freie gedämpfte Schwingung





$$\boxed{\ddot{y} + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}}$$

k= Dämpfungskonstante [Nsm^{-1}]
γ= Anklingkonstante [s^{-1}]

$\boxed{k = 2m\gamma}$

Lösungsansatz: $y = e^{\lambda \cdot t}$ $\boxed{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

Dämpfungsgrad: $\boxed{\vartheta = \frac{\gamma}{\omega_0}}$

$\vartheta > 1$	λ_1, λ_2 reell	**starke Dämpfung**	(⇒ praktisch keine Schwingung)
$\vartheta = 1$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -\omega_0$	**aperiodischer Grenzfall**	
$\vartheta < 1$	λ_1, λ_2 imaginär (konj. komplex)	**schwache Dämpfung**	

Starke Dämpfung: $\boxed{y = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}}$

Schwache Dämpfung: $\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2} < \omega_0}$

$$\boxed{y = e^{-\gamma \cdot t} \cdot \left[A_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)\right]}$$

$$\boxed{y = e^{-\gamma \cdot t} \cdot A \cdot cos(\omega_d \cdot t - \varphi)}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k+n}}\right)} \quad \boxed{\delta = \gamma \cdot T_d} \quad \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{T_d}$$

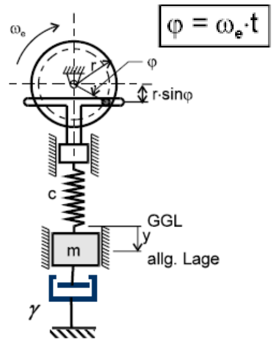
Erzwungene Schwingung

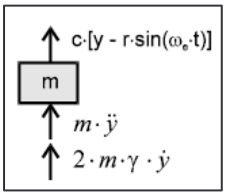
Erregungsart	Erregungsursache
Wegerregung, Federwegerregung, Federkrafterregung, kinematische Erregung	Bewegung des Aufhängepunktes, veränderliche Federkraft, etc.
Massenkrafterregung (Erregung durch Trägheitskräfte), dynamische Erregung	Unwucht

wegerregt: $F_e = r \cdot c$ massenkrafterregt: $F_e = m_e \cdot \omega_e^2 \cdot e$

F_e = Erregerkraft

Harmonische Wegerregung





Dgl: $\ddot{y} + 2\cdot\gamma\cdot\dot{y} + \omega_0^2\cdot y = \omega_0^2\cdot r\cdot\sin(\omega_e\cdot t)$

$y = y_h + y_p$ y_p: partikuläre Lösung
y_h: homogene Lösung (freie, gedämpfte Schwingung, klingt rasch ab ⇒ wird vernachlässigt)

$y \approx y_p = A\cdot\sin(\omega_e\cdot t - \psi)$

ω_e = Erregerkreisfrequenz
ψ = Phasenverschiebungswinkel

Amplitude $A = \dfrac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + 4\cdot\gamma^2\cdot\omega_e^2}}$ $A = V_1\cdot r$

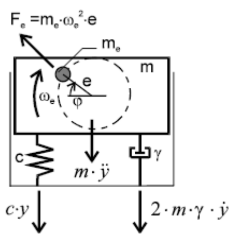
Vergrösserungsfaktor $V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\cdot\vartheta^2\cdot\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}$

Verschiebungswinkel $\tan\psi = \dfrac{2\cdot m\cdot\gamma\cdot\omega_e}{c - m\cdot\omega_e^2} = \dfrac{2\cdot\vartheta\cdot\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}$

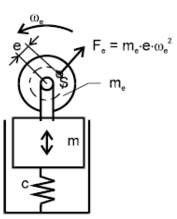
Massenkraft-erregung

(Unwucht)

mit Dämpfung:



ohne Dämpfung (γ = 0):



Dgl: $\ddot{y} + 2\cdot\gamma\cdot\dot{y} + \omega_0^2\cdot y = \dfrac{m_e}{m_g}\cdot\omega_e^2\cdot e\cdot \sin(\omega_e\cdot t)$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m+m_e}}$ $y \approx y_p = A\cdot\sin(\omega_e\cdot t - \psi)$

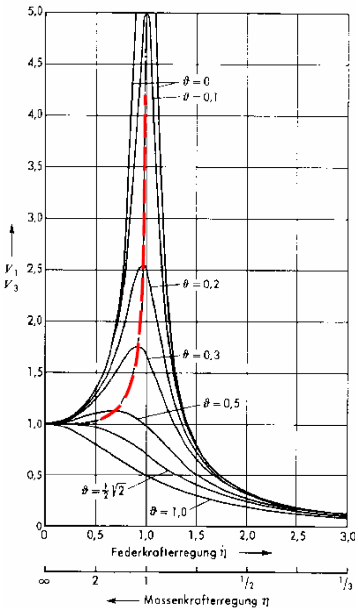
Kraftamplitude auf Umgebung $\hat{F}_0 = A\sqrt{c^2 + 4m^2\gamma^2\omega_e^2}$

Amplitude $A = \dfrac{\frac{m_e}{m_g}\cdot e\cdot\omega_e^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + 4\cdot\gamma^2\cdot\omega_e^2}}$

Vergrösserungsfaktor $V_3 = \dfrac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\cdot\vartheta^2\cdot\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} = V_1\cdot\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2$

Verschiebungswinkel $\tan\psi = \dfrac{2\cdot\gamma\cdot\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}$

Frequenzgang des Vergrösserungs-faktors



[η]

$$y = \frac{\frac{F_e}{c}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\cdot\vartheta^2\cdot\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}\cdot\sin(\omega_e\cdot t-\psi)$$

wegerregt:	$F_e = r\cdot c$
krafterregt:	$F_e = m_e\cdot\omega_e^2\cdot e$

Verlauf von **Vergrösserungsfaktor** und Phasenverschiebungswinkel in Abhängigkeit von $\eta = \omega_e/\omega_o$ (dimensionslos!)

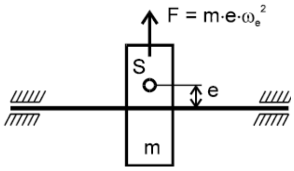
$\omega_e = \omega_0 \quad \Rightarrow$ ***Resonanz***

Das Maximum der Amplitude wandert je nach Dämpfungsgrad.

Die maximalen Amplituden befinden sich nicht bei $\omega_e = \omega_0$. Die Formeln dazu sind im Skript auf Seite 123.

kritische Drehzahl

(Einmassen-schwinger)



$$n_k = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}} \qquad n_k = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{y_F}}$$

m = Scheibenmasse
c = Federkonstante
y_F = Durchbiegung

n_k wird von sonstigen wirkenden Kräften nicht beeinflusst (Riemenkräfte…)
n_k ist unabhängig der Wellenlage.

Mitschwingende Wellenmasse: $m_g = m + \frac{1}{2}\cdot m_W$

Ist die Scheibe am Ende angebracht, so kann die Situation als Kreisel betrachtet werden… Viel Glück!!

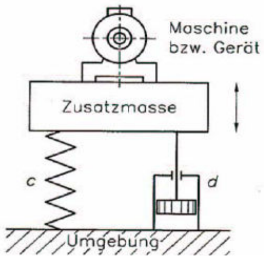
Mehrmassen-schwinger

Siehe Buch ab Seite 790

Schwingungsisolierung

Aktivisolierung

(ruhende Umgebung)



$$V_D = \frac{F_{u\max}}{F_{e\max}} = \sqrt{\frac{1+4\vartheta^2\cdot\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\vartheta^2\cdot\eta^2}}$$

$\eta = \omega_e/\omega_o$

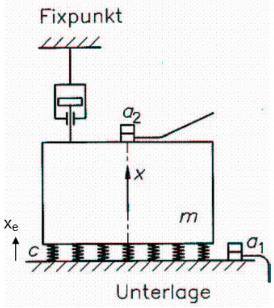
$\vartheta = \gamma/\omega_0$

V_D = Durchlässigkeit, Isolierungsfaktor
wenn klein, dann gute Isolierung
$F_{u\ max}$ = Umgebungskraftamplitude
$F_{e\ max}$ = Störkraftamplitude

Die Dämpfung ist nur im Resonanzbereich wichtig. Bei $\eta \geq \sqrt{2}$ ist die Dämpfung gar hinderlich.

Passivisolierung * „Absolut"

(schwingende Umgebung)



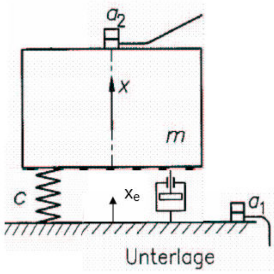
$$\frac{x_{\max}}{x_{e\max}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\vartheta^2\cdot\eta^2}}$$

x_{max} = Amplitude gedämpft
$x_{e\ max}$ = Amplitude Unterlage

Der Dämpfer ist zwischen der schwingenden Masse und dem ruhenden Fixpunkt angebracht. Es wird die Absolutgeschwindigkeit der schwingenden Masse gedämpft.

Passivisolierung „Relativ"

(schwingende Umgebung)



$$\frac{x_{\max}}{x_{e\max}} = \sqrt{\frac{1+4\vartheta^2\cdot\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\vartheta^2\cdot\eta^2}}$$

Der Dämpfer ist zwischen der schwingenden Masse und der schwingenden Umgebung angebracht. Es wird die relative Geschwindigkeit zwischen der schwingenden Masse und der ungleich schwingenden Umgebung gedämpft.

Beispiel für passive Isolierung (nach Deger): Laptop auf Gummimatte stellen, da wegen der Waschmaschine das Haus bebt.

Statisch unbestimmte Problemstellungen

allgemeines	y = Biegelinie y'= Steigung y''= Krümmung $\boxed{y'' = -M_b(x)/EI}$ **Symmetrien ausnutzen!**
Deformations-methode	Die Deformationsmethode kommt bei einfachen Strukturen zum Einsatz. Kompatibilitätsbedingungen der Deformation müssen direkt von math. Grundsätzen (z.B. Strahlensatz) ableitbar sein.
Integrations-methode	Anwendung: Balken, Wellen, Rahmenträger Biegemoment $M_b(x)$ an einer Stelle (nicht bei Lager) bestimmen. Daraus y'' berechnen Integrieren (C_1 aus Randbedingung (x=0) bestimmen) Integrieren (C_2 ebenfalls mit Randbedingungen bestimmen)
Überlagerungs-methode	Der Lastfall wird in Teillastfälle mit einfacheren Lösungen übergeführt. Die Reaktionskräfte werden gleichgesetzt. Formeln aus Festigkeitslehre verwenden!
nach Castigliano	Nach Castigliano entspricht $\frac{\partial U}{\partial F}$ der Verschiebung des Punktes und $\frac{\partial U}{\partial M}$ der Verdrehung. Keine Verschiebung: $\boxed{\frac{\partial U}{\partial F_B} = 0}$ Keine Verdrehung: $\boxed{\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0}$