

Vorlesungsmanuskript

## Technische Mechanik

verkürzter Grundkurs über 2 Semester

### Statik

Dieses Skript enthält das Grundwissen aber nur wenige Anwendungsbeispiele, sie werden in der Vorlesung an der Tafel demonstriert.

Die Kapitel 4 und 5 können in diesem Kurs nur kurz vorgestellt werden, sie sind keine Prüfungsthemen.

Die Formatierung des Skriptes ist für den verkleinerten Ausdruck von 2 Seiten auf A4-Querformat vorgesehen.

**Dr.-Ing. K.-H. Gröbel**  
**Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg**  
**Fakultät für Maschinenbau**  
**Institut für Mechanik**

Nur für den Gebrauch an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg bestimmt!

## Statik

Inhaltsverzeichnis:	Seite
<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>Literatur</b>	<b>4</b>
<b>1 Grundlagen der Statik</b>	<b>5</b>
1.1 Die Kraft	5
1.2 Axiome der Statik und das Schnittprinzip	7
1.3 Das zentrale ebene Kraftsystem	11
1.4 Schnittprinzip und Gleichgewicht	14
1.5 Das allgemeine ebene Kraftsystem	17
1.6 Das räumliche Kraftsystem	28
<b>2 Stütz- und Verbindungskäfte an Körpern</b>	<b>30</b>
2.1 Freiheitsgrad, Bindungen, statische Bestimmtheit	30
2.2 Beispiele für Lager und Verbindungen	32
2.3 Tragwerke	34
2.4 Streckenlasten	39
2.5 Ebene Fachwerke	42
<b>3 Schnittgrößen im Balken</b>	<b>46</b>
3.1 Einführung	46
3.2 Schnittgrößen beim ebenen Lastfall	48
3.3 Schnittgrößen beim räumlichen Lastfall	52
<b>4 Seile und Ketten</b>	<b>58</b>
4.1 Einführung	58
4.2 Berechnung der Seilkurve infolge Eigengewicht	59
<b>5 Der Arbeitssatz in der Statik</b>	<b>70</b>
5.1 Definition der Arbeit	70

5.2	Definition der virtuellen Verrückung	71
5.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	72
5.4	Anwendung des Arbeitssatzes bei Reaktionskräften	74
<b>Anhang</b>		
<b>A 1</b>	<b>Der Schwerpunkt</b>	<b>78</b>
A 1.1	Definition des Schwerpunktes	78
A 1.2	Berechnung des Körperschwerpunktes	79
A 1.3	Schwerpunkt von zusammengesetzten Körpern	81
A 1.4	Der Flächenschwerpunkt	84
A 1.5	Der Linienschwerpunkt	86
A 1.6	Die Guldin'schen Sätze	87
<b>A 2</b>	<b>Haftung und Reibung zwischen festen Körpern</b>	<b>88</b>
A 2.1	Einführung	88
A 2.2	Haftung und Reibung bei ebenen Berührungsflächen	88
A 2.3	Seilhaftung und Seilreibung	94
A 2.4	Zapfenreibung	96
A 2.5	Haftung am rollenden Rad	97
A 2.6	Rollreibung (Rollwiderstand)	97

## Technische Mechanik (TM)

### Einführung

#### Technische Mechanik

- wendet die *Mechanik als Teilgebiet der Physik* auf **technische Aufgabenstellungen** an.
- nutzt spezielle Prinzipien und Methoden zur effektiven Lösung der mechanischen Fragestellungen.

Grundkenntnisse auf dem Gebiet der Technischen Mechanik werden in allen Ingenieurdisziplinen benötigt.

Aufgabe des Ingenieurs ist es, reale Objekte oder Konstruktionen so zu abstrahieren (modellieren), daß eine mechanische Analyse möglich wird. Dabei ist stets ein **Kompromiß** zwischen Genauigkeit in der Widerspiegelung der Realität und dem Berechnungsaufwand einzugehen.

Die Analyse des mechanischen Modells ist nur unter Nutzung mathematischer Methoden und der Rechentechnik möglich.

#### Teilgebiete der Technischen Mechanik

(nach dem Aggregatzustand der untersuchten Körper)

- Festkörpermechanik
- Hydromechanik
- Aeromechanik

Dieser Kurs beschränkt sich auf die **Festkörpermechanik**.

#### Zielstellung dieser Lehrveranstaltung

- Vermitteln von Grundkenntnissen der Technischen Mechanik
- Erläuterung des methodischen Vorgehens bei der Lösung einfacher Problemstellungen unter Nutzung der grundlegenden Prinzipien der Technischen Mechanik
- Festigung des Wissens in den Übungen durch Modellierung und Berechnung einfacher technischer Systeme.

## Festkörpermechanik

### Anwendungsbereich:

Gebilde aus **festen Werkstoffen**: Metall, Holz, Plastik, Beton, usw. z.B.: Maschinenteile, Tragwerke, Bauwerke

### Einteilung:

- **Statik**

Untersuchung der Kraftwirkungen an **unbeschleunigten** Systemen, i.allg. an **ruhenden** Systemen. Aber auch gleichförmig bewegte Körper können in der Statik behandelt werden (quasi statische Vorgänge).

**Ziel:** Berechnung der äußeren Stützkräfte und –momente  
Berechnung der inneren (im Material übertragenen) Kräfte und Momente

**Modellvorstellung:** fester Körper = unverformbarer Körper  
= **starrer Körper**

**Voraussetzungen:** Axiome der Statik und das Schnittprinzip

- **Festigkeitslehre (Elastostatik)**

Berechnung der **inneren Beanspruchung (mechanische Spannung = Kraft pro Flächeneinheit)** und der **Verformung** der Bauteile.

**Ziel:** Dimensionierung der Bauteile  
Aussagen zur Sicherheit

**Modellvorstellung:** Fester Körper ist ein **deformierbarer Körper** aber die **Verformungen sind klein**.

**Voraussetzungen:** **Statik und Materialgesetz** des verwendeten Werkstoffes (z.B: Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus einem Zugversuch).

### Hinweis:

Unter Berücksichtigung der Verformungen sind in der Festigkeitslehre auch komplizierte Bauteile (**statisch unbestimmte Systeme**) berechenbar, die allein mit Mitteln der Statik nicht berechnet werden können.

Wir beschränken uns in diesem Kurs auf **stabförmige Bauteile** (Seile, Stäbe, Balken und Wellen).

- **Kinematik**

**Lehre von der Bewegung** ohne Berücksichtigung der sie hervorrufenden Kräfte.

**Ziel:** Berechnung von Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Übersetzungsverhältnis usw.

**Modellvorstellung: starrer Körper**

- **Kinetik**

**Lehre von der Wechselwirkung zwischen Kraft und Bewegung**

**Ziel:** Berechnung von Anfahr- und Bremsvorgängen  
Untersuchung des Schwingungsverhaltens

**Modellvorstellung: starrer Körper**, der *elastisch gestützt* sein kann

In diesem Kurs werden nur ebene Bewegungsvorgänge behandelt.

Die Teilgebiete **Kinematik und Kinetik** werden häufig zum Teilgebiet **Dynamik** zusammengefaßt.

Streng gilt: **Dynamik = Lehre von den Kräften** mit den Teilgebieten Statik (Sonderfall der Ruhe) und Kinetik.

**Literatur:**

- Dankert / Dankert     Technische Mechanik  
computerunterstützt  
B.G. Teubner Stuttgart
  
- Fischer / Günther     Technische Mechanik  
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
  
- Göldner /  
Holzweißig             Leitfaden der Technischen Mechanik  
Fachbuchverlag Leipzig  
(nur aus Bibliothek entleihbar)
  
- Göldner /  
Pfefferkorn             Technische Mechanik  
Fachbuchverlag Leipzig  
(nur aus Bibliothek entleihbar)
  
- Göldner / Witt         Lehr- und Übungsbuch  
Technische Mechanik I  
Statik und Festigkeitslehre  
Fachbuchv. Leipzig im Carl Hanser Verl.
  
- Hardtke / Heimann /  
Sollmann                Lehr- und Übungsbuch  
Technische Mechanik II  
Kinematik/Kinetik  
Systemdynamik – Mechatronik  
Fachbuchv. Leipzig im Carl Hanser Verl.
  
- Gross / Hauger /  
Schnell                    Technische Mechanik  
Band 1: Statik  
Band 2: Elastostatik  
Band 3: Kinetik  
Springer Verlag

**Statik****1 Grundlagen der Statik****1.1 Die Kraft**

Den Begriff der Kraft können wir unserer Erfahrung entnehmen. „Urbilder“ der Kraft sind die Gewichtskraft und die Muskelkraft. Die Kraft ist eine **mechanische Wechselwirkung zwischen zwei Körpern**. Sie hat das Bestreben, einen Körper in Krafrichtung zu verschieben bzw. zu verformen.

**Satz:** | Jede physikalische Größe, die sich mit der Gewichtskraft ins Gleichgewicht setzen läßt, ist eine Kraft.

weitere Beispiele:     magnetische Kraft, Federkraft,  
Druckkraft von Flüssigkeiten und Gasen

**Angriffsbereich von Kräften:**

*natürlich auftretende Kraftwirkungen:*

**räumlich verteilte Kraft** = **Volumenkraft**  
(Gravitationskraft,  
magnetische Kraft)

**flächenhaft verteilte Kraft** = **Flächenkraft**  
(Winddruck auf Wand,  
Wasserdruck auf Staumauer)

*idealisierte Grenzfälle:*

**linienhaft verteilte Kraft** = **Linienkraft** oder **Streckenlast**  
(Gewichtskraft eines Seiles oder  
eines Balkens)

**punktförmig angreifende Kraft** = **Einzelkraft**  
(Kraft an einer Spitzenlagerung,  
Kraft im Seil, Gewichtskraft im  
Schwerpunkt)

Die Einzelkraft hat eine dominierende Rolle in der Statik.

### Vektorcharakter der Kraft



Ein **Vektor** ist gegeben durch:

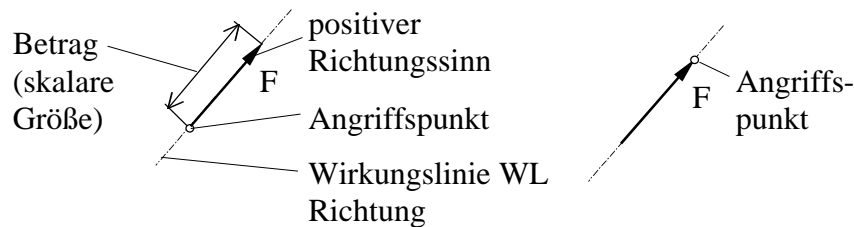
- **skalare Größe** (einschl. physikalischer Einheit)
- **Richtung oder Wirkungslinie**
- **Richtungssinn** (positiver Richtungssinn)

Ein **gebundener Vektor** bedarf zusätzlich der Definition des

- **Angriffspunktes**

Die **Kraft** ist ein **gebundener Vektor**.

### Zeichnerische Darstellung der Kraft

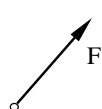


Für **grafische Lösungsverfahren**:

**Kraftmaßstab:** 
$$m_F = \frac{\text{wirkliche Größe}}{\text{Abbildungsgröße}} = \frac{\text{Betrag}}{\text{Pfeillänge}}$$

z.B.: 
$$m_F = 10 \frac{N}{cm}$$

### Darstellung der Kraft in Skizzen zur Berechnung:



Pfeilbild **nicht maßstäblich**, gibt Angriffspunkt, Richtung und **positiven** Richtungssinn an. Zusätzlich Angabe der Größe der Kraft  
 z.B.:  $F = 40N$   
 oder  $F = -40N$  hier ist der Richtungssinn tatsächlich entgegengesetzt zur gezeichneten Pfeilrichtung !

Die Kennzeichnung des Vektorcharakters durch den überstrichenen Pfeil  $\vec{F}$  ist i. allg. nicht üblich, da dieser durch das Pfeilbild in der Skizze bereits herausgestellt wird.

**Einheit der Kraft:**  $1 N = 1 kg m s^{-2}$   
 (1 kN = 1000 N usw.)

### 1.2 Axiome der Statik und das Schnittprinzip

**Axiom** = **Lehrsatz**, der eine Theorie begründet.

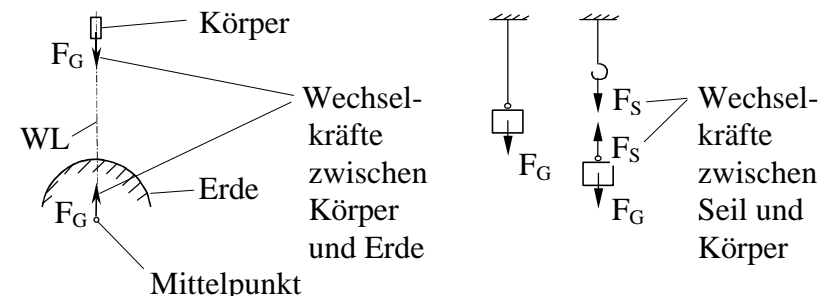
Ein Axiom kann selbst nicht bewiesen werden, es **beruht auf Erfahrungen**. Logische Folgerungen aus den Axiomen sind zulässig und dürfen der Erfahrung nicht widersprechen.

#### 1. Wechselwirkungsgesetz: (Newton, 1687 formuliert)

Kraftwirkungen treten immer wechselseitig zwischen zwei Körpern auf.

**Satz:** Zu jeder Kraft gehört auf der gleichen Wirkungslinie eine Gegenkraft vom gleichen Betrag aber mit entgegengesetztem Richtungssinn  
 actio = reactio  
 (Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung)

z.B.:

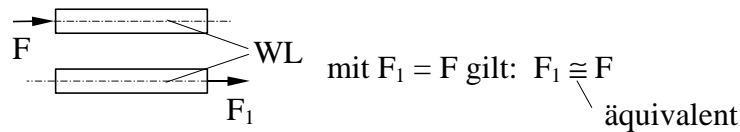


## 2. Linienflüchtigkeit der Kraft am starren Körper:

**Starrer Körper** : Idealvorstellung eines festen Körpers, der seine Form bei Krafteinwirkung nicht ändert.

Die vereinfachende **Modellvorstellung** „starrer Körper“ ist für die Statik geeignet.

**Satz:** Am starren Körper ändert sich die Wirkung einer Kraft nicht, wenn man sie entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

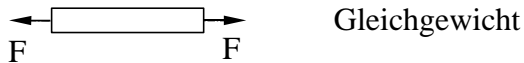


**Äquivalenz:** Zwei Kräfte oder Kraftsysteme nennt man äquivalent, wenn sie die gleiche mechanische Wirkung haben (mechanische Gleichwertigkeit)

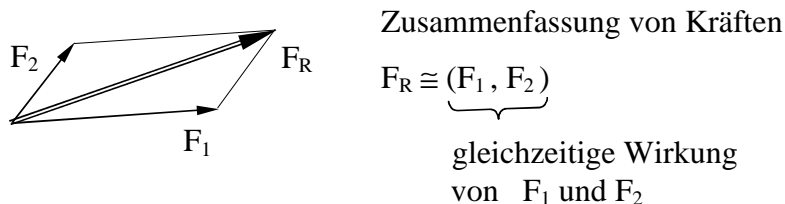
## 3. Gleichgewicht:

Mehrere Kräfte stehen im **Gleichgewicht**, wenn ihre **Gesamtwirkung Null** ist.

Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte sind im Gleichgewicht

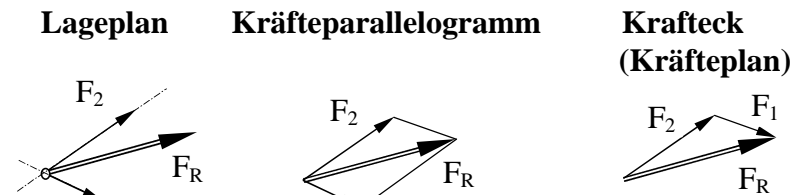


## 4. Parallelogrammregel: (Simon Stevin, 1548 - 1628)



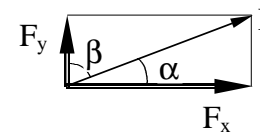
Meist wird das **Kräfteparallelogramm** als gesonderte Skizze gezeichnet.

Zur Vereinfachung wird i.allg. nur das **halbe Kräfteparallelogramm (Krafteck oder Kräfteplan)** gezeichnet.



Reihenfolge der Kräfte ist beliebig

## Zerlegung von Kräften:



$$(F_x, F_y) \cong F$$

$$F_x = F \cos a$$

$$F_y = F \sin a$$

Achtung, nicht schematisch formulieren!

$$F_x = F \sin b$$

$$F_y = F \cos b$$

## Das Schnittprinzip:

**Schnittprinzip** (Leonhard Euler, 1707-1783)

- Ein System ist im Gleichgewicht, wenn **jedes Teilsystem im Gleichgewicht** ist.
- Durch eine „gedankliche“ **Schnittführung** wird ein überschaubares **Teilsystem** aus der Umwelt herausgetrennt (die Schnittführung muß in sich geschlossen sein).
- Die **mechanische Wechselwirkung** zwischen Teilsystem und Umwelt wird an der Schnittstelle durch sogenannte **Schnittkräfte** \*) berücksichtigt.

(\* Unter dem allgemeinen Begriff „Kräfte“ werden hier sowohl Kräfte als auch die später eingeführten Kräftepaare oder Momente verstanden.)

- Für die **Schnittkräfte** gilt an den jeweils gegenüberliegenden Schnittpunkten das **Wechselwirkungsgesetz**.
- Durch die Schnittführung werden die zunächst **inneren Kräfte** „freigelegt“ und damit **zu äußeren Kräften** und können über Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

### Erstarrungsprinzip

- Ein „frei“ geschnittenes Teilsystem darf **wie ein starrer Körper** behandelt werden.
- Am Schnittbild dürfen Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben, zu Resultierenden zusammengefaßt, oder in Komponenten zerlegt werden.

### Schnittverbot

- Innerhalb eines herausgeschnittenen Teilsystems darf nicht noch einmal ein Untersystem herausgeschnitten werden (da Kräfte bereits entlang ihrer Wirkungslinie verschoben oder zu Resultierenden zusammengefaßt sein können).
- Die **Schnittführung** muß **immer vom Originalsystem** ausgehend erfolgen !

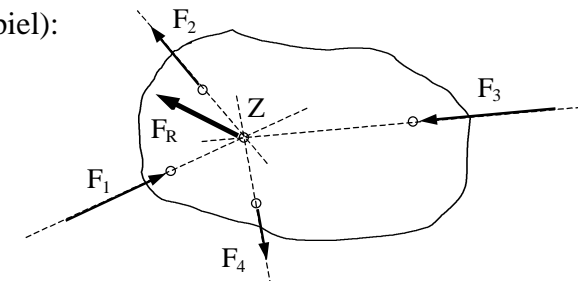
## 1.3 Das zentrale ebene Kraftsystem

Greifen an einem Körper mehrere Kräfte an, so spricht man von einer Kräftegruppe oder einem Kraftsystem.

Ebenes Kraftsystem → Die Wirkungslinien aller Kräfte liegen in einer Ebene

Zentrales Kraftsystem → Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem Punkt (im Zentrum)

Lageplan (Beispiel):



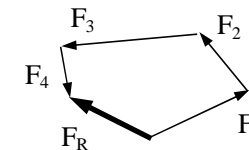
Gesucht wird die resultierende Wirkung der Kräftegruppe

### grafische Lösung:

Anwendung der Axiome

- Linienflüchtigkeit der Kraft am starren Körper  
→ Alle Kräfte greifen im Zentrum an
- Parallelogrammregel  
→ Es ergibt sich eine resultierende Kraft, die im Zentrum angreift

Kräfteplan (Krafteck):

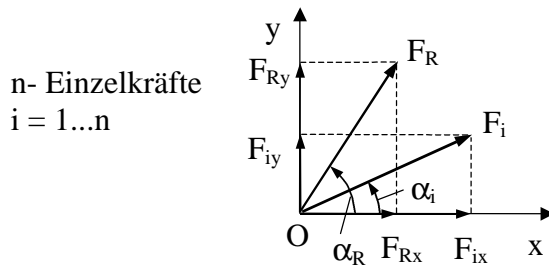


Die resultierende Kraft wird in den Lageplan übertragen.

**Analytische Lösung dieser Aufgabe:**

**Äquivalenz:**

- In das Zentrum wird ein kartesisches Koordinatensystem gelegt
- Jede Kraft wird in ihre x- und y-Komponenten zerlegt
- Aufsummieren aller x-Komponenten ergibt die x-Komponente der resultierenden Kraft
- Summieren von  $F_{iy}$  ergibt  $F_{Ry}$
- Berechnung der resultierenden Kraft und ihrer Wirkrichtung



Es lassen sich folgende analytische Beziehungen ableiten:

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i$$

zunächst zwei  
Teilresultierende

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

für  $F_{Rx} = 0 \Rightarrow F_R = F_{Ry}$

für  $F_{Rx} \neq 0$  gilt  $\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \begin{cases} + 0 & \text{für } F_{Rx} > 0 \\ + \pi & \text{für } F_{Rx} < 0 \end{cases}$

$$F_R \cong \sum F_i \rightarrow \text{Äquivalenz}$$

**Gleichgewicht:**

Der Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft Null ist.

$$F_R \cong 0 \text{ erfordert } F_{Rx} = 0 \text{ und } F_{Ry} = 0$$

Damit ergeben sich zwei Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Gleichgewichtsbedingungen ( GGB )}$$

Kurzfassung der GGB :

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 & \rightarrow : \\ \sum F_{iy} &= 0 & \uparrow : \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} & \swarrow : \\ & \searrow : \end{aligned} \quad \text{auch möglich}$$

Da das Koordinatensystem beliebig gedreht werden kann, lassen sich theoretisch **unendlich viele** unterschiedliche GGB formulieren.

Die Summe der Kraftkomponenten muß in jeder beliebig gewählten Richtung verschwinden.

Von der unendlichen Vielzahl der möglichen Gleichungen sind **nur zwei Gleichungen linear unabhängig** voneinander.

Die zwei gewählten Krafrichtungen müssen nicht senkrecht aufeinander stehen. Aus numerischen Gründen sollte der eingeschlossene Winkel nicht zu spitz sein.

Hinweise:

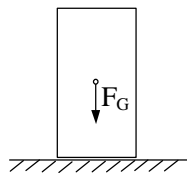
- Die Kräfte müssen formal gar nicht erst in das gemeinsame Zentrum verschoben werden, sie können gedanklich am Angriffspunkt in ihre Komponenten zerlegt werden.



- In der Praxis wird der gegebene Winkel einer Krafrichtung nicht immer von der x-Achse aus und / oder im mathematisch positiven Sinn angegeben. Daher aus der Winkelangabe nur den Betrag der Kraftkomponente berechnen und das **Vorzeichen** der Kraftkomponente „**Kraft der Anschauung**“ ermitteln.

### 1.4 Schnittprinzip und Gleichgewicht

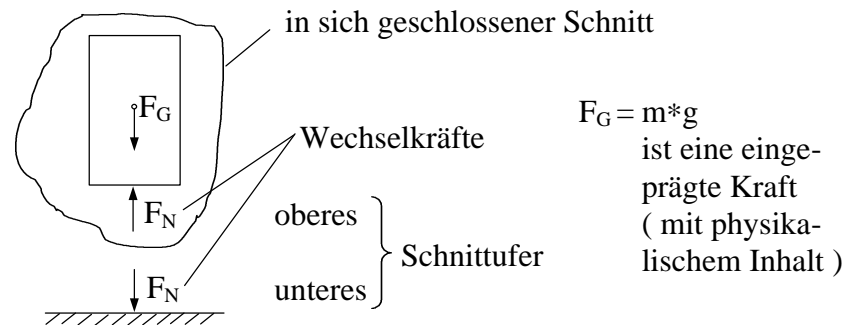
Das prinzipielle Vorgehen soll anhand einfacher Beispiele erläutert werden.



- Körper befindet sich auf einem Fundament im Ruhezustand. Er ist im Gleichgewicht.
- Dem Körper ist im Schwerfeld der Erde die Gewichtskraft  $F_G$  eingeprägt
- Das Fundament stellt Gleichgewicht her. Es muß die erforderliche Stützkraft realisieren.

Zur statischen Untersuchung des Problems müssen wir die Wirkung des Fundamentes berücksichtigen.

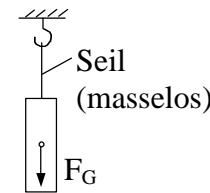
**Mittels** eines **Schnittes** wird der **Körper** vom Fundament **„befreit“**. Die Wirkung des Fundamentes muß durch eine Stützkraft ersetzt werden.



$F_N$  = Normalkraft (senkrecht zur Berührungsfläche)  
 Stütz-, Lager- oder Reaktionskraft  
 ist nur über Gleichgewichtsbedingungen berechenbar

Die analytische Formulierung des Gleichgewichtszustandes über **GGB** ist **nur am völlig „frei“ geschnittenen Teilsystem** erlaubt. Es muß eine geschlossene Schnittführung vorliegen !

Hier gilt:  $\sum F_{ix} = 0$  oder  $\rightarrow : 0 = 0$   
 $\sum F_{iy} = 0$  oder  $\uparrow : F_N - F_G = 0 \rightarrow F_N = F_G$

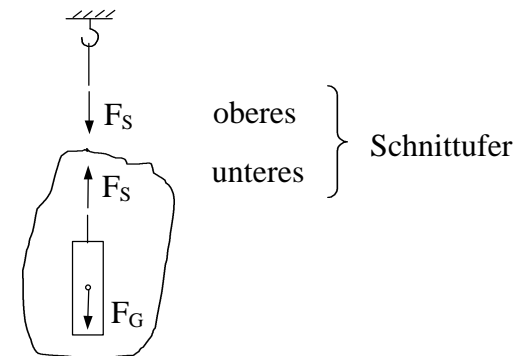


- Körper hängt am Seil
- Die Kraft, die  $F_G$  das Gleichgewicht hält, wird offensichtlich durch das Seil übertragen
- Die **Seilkraft** ist eine **innere** Kraft des Gesamtsystems

Soll die Seilkraft ermittelt werden, so ist **mittels Schnittführung** das Seil zu schneiden, so daß die zunächst innere **Seilkraft zu einer äußeren Schnittkraft** und damit der Berechnung zugänglich wird.

Seile können erfahrungsgemäß nur Zugkräfte in Seilrichtung übertragen.

Es gilt immer  $F_S \geq 0$ .



Nur am unteren völlig „frei“ geschnittenen Teilsystem können die GGB formuliert werden.

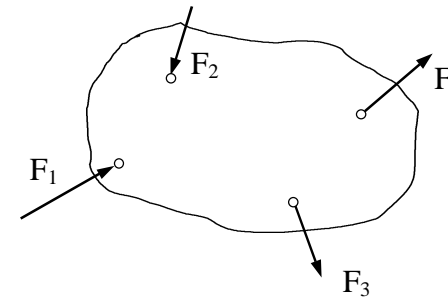
Es gilt:  $\rightarrow: \quad 0 = 0$   
 $\uparrow: \quad F_S - F_G = 0 \rightarrow F_S = F_G$

Durch die Schnittführungen werden die gesuchten zunächst inneren Kräfte bezüglich des Gesamtsystems am Teilsystem zu äußeren Kräften und können nun über Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

**Beispiel:**

## 1.5 Das allgemeine ebene Kraftsystem

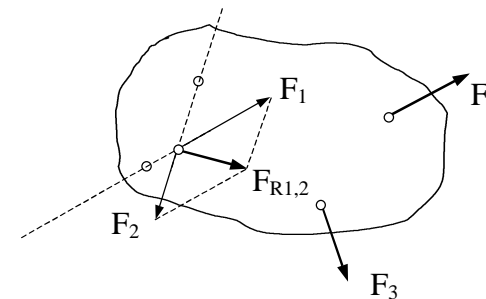
**Voraussetzung:** Alle Kraftwirkungslinien liegen in einer Ebene

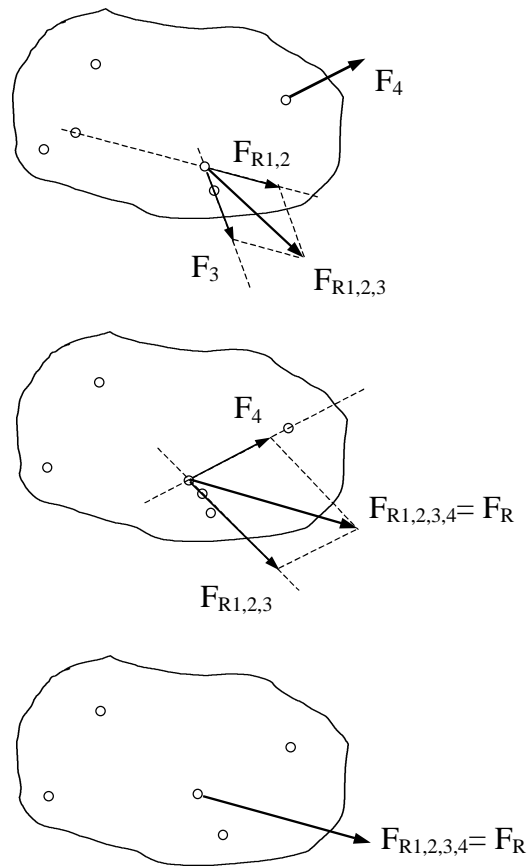


### Grafische Ermittlung der resultierenden Kraft:

Anwendung der Axiome: -Linienflüchtigkeit der Kraft  
 -Parallelogrammregel

- Die ersten zwei Kräfte werden zu einer Teilresultierenden zusammengefaßt
- Der Teilresultierenden wird eine weitere Kraft überlagert (superponiert)
- Dieses wird fortgesetzt, bis sich schließlich aus allen Kräften die Gesamtresultierende ergibt





$$F_R \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4)$$

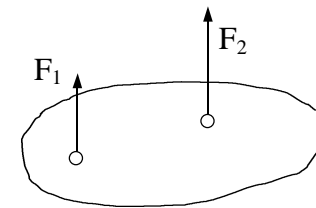
$F_R$  ist mechanisch der gemeinsamen Wirkung der Kräfte  $F_1$  bis  $F_4$  äquivalent. Die Reihenfolge der Addition der Kräfte hat keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Die gezeigte grafische Ermittlung der resultierenden Kraft ist aufwendig. Es gibt Verfahren, die den zeichnerischen Aufwand verringern z.B. das „**Seileckverfahren**“.

Die grafischen Verfahren dienen heute nur der Schulung des Verständnisses und haben in der praktischen Anwendung keine Bedeutung mehr.

**Sonderfälle:**

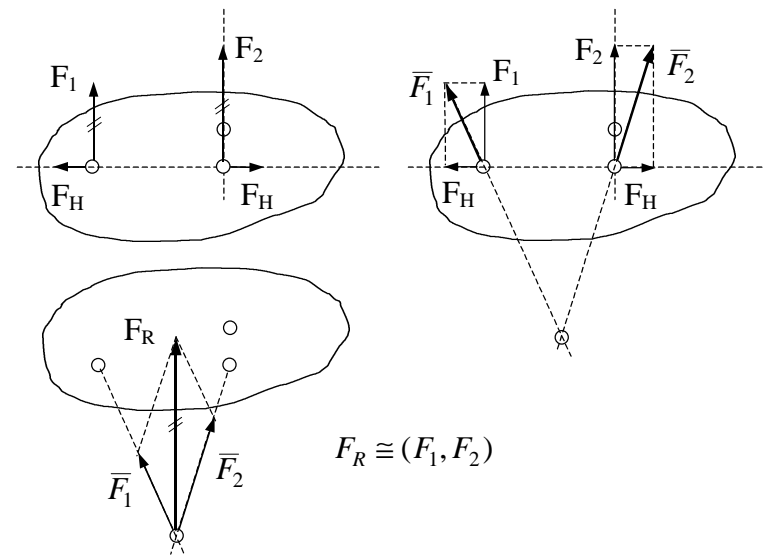
**2 parallele Kräfte mit gleichem Richtungssinn**



Der Schnittpunkt der Wirkungslinien liegt im Unendlichen. Über einen **Trick** läßt sich die Resultierende grafisch ermitteln. Fügt man eine Gleichgewichtsgruppe den parallelen Kräften hinzu, so ändert man nichts an der Gesamtwirkung, der Schnittpunkt

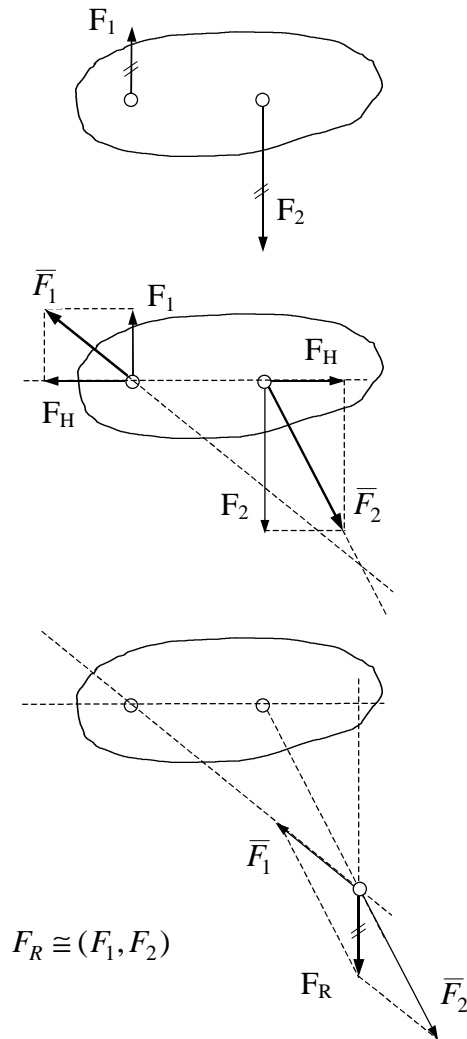
der beiden Teilresultierenden liegt jetzt aber auf dem Papier.

Gewählte Gleichgewichtsgruppe:  $F_H \leftarrow \rightarrow F_H$

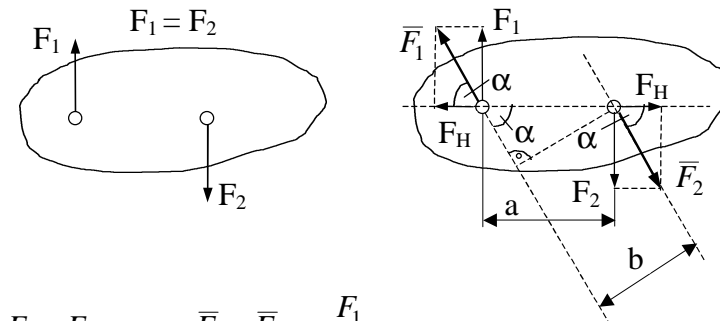


$$F_R \equiv (F_1, F_2)$$

### 2 parallele Kräfte mit entgegengesetztem Richtungssinn und ungleichem Betrag



### Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte auf parallelen Wirkungslinien (Kräftepaar)

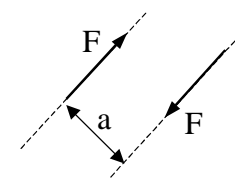


$$F_1 = F_2 \quad \bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \frac{F_1}{\sin \alpha}$$

$$b = a \sin \alpha \quad F_1 a = \bar{F}_1 b$$

Das Kräftepaar lässt sich nicht durch eine resultierende Kraft, sondern nur durch ein anderes Kräftepaar ersetzen. Das Produkt aus Kraftgröße und Abstand der parallelen Wirkungslinien  $M = F_1 a = \bar{F}_1 b$  wird als statisches Moment bezeichnet und ist eine invariante Größe.

#### 1.5.1 Das Kräftepaar oder Moment



#### Kräftepaar

= zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf parallelen Wirkungslinien

Eigenschaften:

- Das Kräftepaar ist **nicht durch eine Kraft ersetzbar**
- Das Kräftepaar ist **keine Gleichgewichtsgruppe**, es hat das Bestreben einen Körper zu drehen
- Die Wirkung des Kräftepaars wächst mit  $F$  und  $a$

Das **Kräftepaar** (auch als **Moment** bezeichnet) ist neben der Kraft eine zweite **Grundgröße der Mechanik**.

Das Produkt  $M = F \cdot a$  ( $[M] = Nm$ ) ist der Betrag des Kräftepaars oder Momentes und wird selbst als Moment oder statisches Moment bezeichnet. (Die Bezeichnung Moment ist doppeldeutig)

$\vec{M}$  hat wie  $\vec{F}$  Vektorcharakter

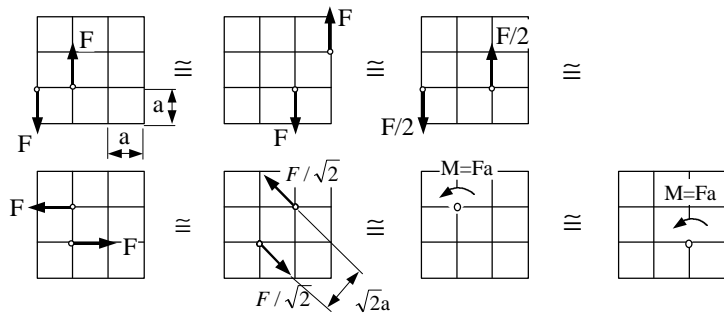
Addition über Parallelogrammregel

$\vec{M}$  ist im Gegensatz zur Kraft ein „freier“ Vektor

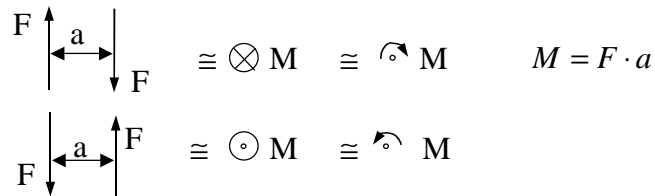
$\vec{M}$  darf am starren Körper nicht nur entlang seiner Wirkungslinie, sondern auch parallel zu sich selbst verschoben werden.

$\vec{M}$  steht senkrecht auf der Ebene des Kräftepaars

Folgende Kräftepaare bzw. Momente sind mechanisch äquivalent:



**Richtungssinn** des Momentenvektors wird nach der rechten Hand-Regel bestimmt

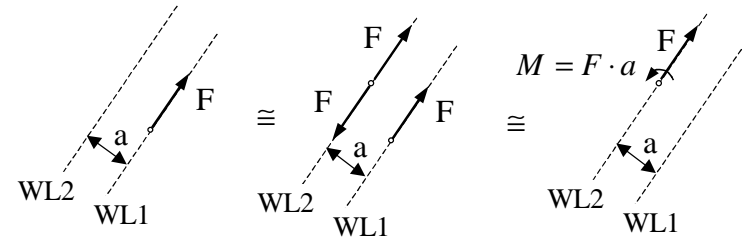


Der Momentenvektor wird zur Unterscheidung zum Kraftvektor mit einem **Doppelpfeil** dargestellt



### 1.5.2 Das Versetzungsmoment

Ziel: Eine Kraft soll mechanisch äquivalent auf eine parallele Wirkungslinie versetzt werden



$$(F \text{ auf } WL1) \cong (F \text{ auf } WL2, M = Fa)$$

Die Kraft F auf der WL1 ist mechanisch äquivalent der Kraft F auf der parallelen WL2 und dem gleichzeitig wirkenden **Versetzungsmoment**  $M = Fa$ .

### 1.5.3 Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes

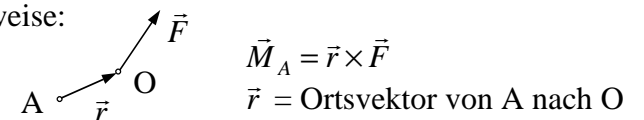


Das statische Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes ist dem Versetzungsmoment äquivalent, das entsteht, wenn man die Kraft in den Bezugspunkt parallel verschiebt.

Moment = Kraft \* Hebelarm

Hebelarm = senkrechter Abstand des Punktes von der WL der Kraft

Vektorschreibweise:

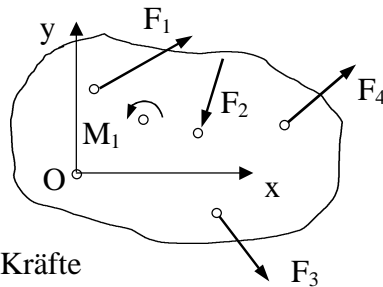


$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$  = Ortsvektor von A nach O

### 1.5.4 Analytische Behandlung des allgemeinen ebenen Kraftsystems

#### a) Äquivalenz bezüglich des Bezugspunktes O



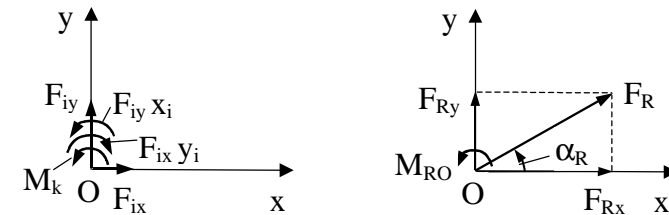
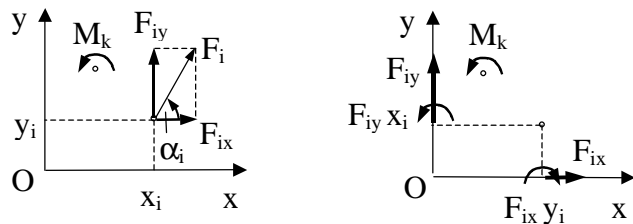
insgesamt: n Kräfte  
m Momente

Vorgehensweise bei der Ableitung der analytischen Beziehungen :

- Wahl eines Bezugssystems (kartesisches Koordinatensystem) im beliebigen Bezugspunkt O
- Zerlegung jeder Kraft in Komponenten bezüglich des Bezugssystems
- Versetzen der Kraftkomponenten parallel in die Koordinatenachsen unter Beachtung der Versetzungsmomente
- Ermittlung der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes

Darstellung anhand der Kraft F<sub>i</sub> und des Momentes M<sub>k</sub> :

i = 1...n k = 1...m



Es lassen sich folgende analytische Beziehungen ableiten:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

für  $F_{Rx} = 0 \Rightarrow F_R = F_{Ry}$

für  $F_{Rx} \neq 0$  gilt  $\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \begin{cases} + 0 & \text{für } F_{Rx} > 0 \\ + \pi & \text{für } F_{Rx} < 0 \end{cases}$

$$M_{RO} = \sum_{k=1}^m M_k + \sum_{i=1}^n (F_{iy}x_i - F_{ix}y_i)$$

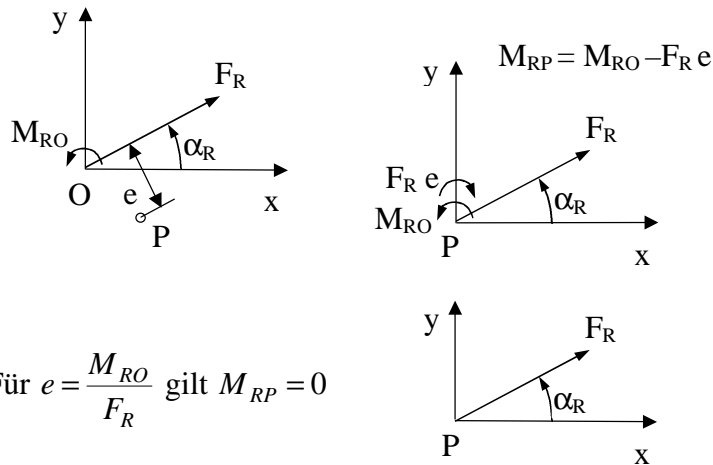
$$M_{RO} = \sum_{k=1}^m M_k + \sum_{i=1}^n M_{iO} \quad \text{--- Versetzungsmoment}$$

#### Änderung des Bezugspunktes :

Wählt man anstelle des Bezugspunktes O den Punkt P, so ändert sich die resultierende Kraft nicht, aber das resultierende Moment ändert sich im allgemeinen (siehe Versetzungsmoment).

F<sub>R</sub> und α<sub>R</sub> bleiben identisch, aber M<sub>RP</sub> i.allg. ≠ M<sub>RO</sub>

Für F<sub>R</sub> ≠ 0 gibt es immer einen Bezugspunkt P, für den das resultierende Moment M<sub>RP</sub> = 0 ist.



Für  $F_R = 0$  läßt sich  $M_{RO}$  nicht durch eine Kraft ersetzen !

**b) Gleichgewicht**

Ein allgemeines ebenes Kraftsystem befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Moment Null sind.

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ F_{Ry} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ M_{RO} &= \sum_{k=1}^m M_k + \sum (F_{iy}x_i - F_{ix}y_i) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Gleichgewichtsbedingungen (GGB)}$$

kurz :  $\sum F_{ix} = 0$   $\rightarrow$  :  
 $\sum F_{iy} = 0$  oder  $\uparrow$  :  
 $\sum M_k + \sum M_{iO} = 0$   $\curvearrowright$  O :

Bei der Formulierung der GGB ist man nicht an das kartesische Koordinatensystem gebunden. Im Gleichgewichtsfall muß die Summe der Kraftkomponenten in jeder beliebigen Richtung verschwinden.

Auch :  $\nearrow$  :  $\searrow$  :  $\curvearrowright$  A :  $\curvearrowright$  B :  $\curvearrowright$  C : usw. möglich.

Es lassen sich unendlich viele Gleichgewichtsbedingungen formulieren aber **nur 3** sind **linear unabhängig** voneinander, so daß nur 3 Unbekannte berechnet werden können.

Folgende Vorgehensweise führt zu drei linear unabhängigen GGB:

1.  $\nearrow$  :  $\searrow$  :  $\curvearrowright$  A :
2.  $\nearrow$  :  $\curvearrowright$  A :  $\curvearrowright$  B : aber verboten!
3.  $\curvearrowright$  A :  $\curvearrowright$  B :  $\curvearrowright$  C : aber verboten!

**Hinweis:** Durch günstige Wahl des Momentenbezugspunktes, so, daß die Momentengleichgewichtsbedingung nur eine Unbekannte enthält, läßt sich die Lösung des Gleichungssystems oft vereinfachen.

**Beispiel:**

## 1.6 Das räumliche Kraftsystem

Beim räumlichen Kraftsystem sind die Kraftwirkungslinien und die Vektoren der Momente räumlich orientiert.

### 1.6.1 Zentrales räumliches Kraftsystem

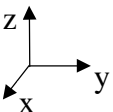
Voraussetzung: Alle Kraftwirkungslinien schneiden sich in einem Punkt

#### Äquivalenz

Das zentrale Kraftsystem ist durch **eine** im Zentrum angreifende **resultierende Kraft** ersetzbar.

#### Gleichgewicht

Gleichgewicht liegt vor, wenn die resultierende Kraft Null ist. Es ergeben sich **3 Gleichgewichtsbedingungen**:

$$\begin{array}{l}
 F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0 \quad \swarrow : \\
 F_{Ry} = \sum F_{iy} = 0 \quad \rightarrow : \\
 F_{Rz} = \sum F_{iz} = 0 \quad \uparrow :
 \end{array}$$


In jeder beliebigen Richtung muß die resultierende Kraftkomponente verschwinden. Es sind nur 3 Gleichungen linear unabhängig voneinander.

#### Beispiel:

## 1.6.2 Allgemeines räumliches Kraftsystem

- Lage der Kraftwirkungslinien beliebig
- Es können beliebig orientierte Momente (Kräftepaare) auftreten

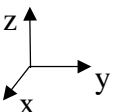
#### Äquivalenz

Das allgemeine räumliche Kraftsystem läßt sich hinsichtlich eines Bezugspunktes äquivalent durch **eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment** ersetzen.

#### Gleichgewicht

Gleichgewicht liegt vor, wenn sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Moment verschwindet.

Dieses führt auf **6 linear unabhängige Gleichgewichtsbedingungen**.

$$\begin{array}{l}
 F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0 \quad \swarrow : \\
 F_{Ry} = \sum F_{iy} = 0 \quad \rightarrow : \\
 F_{Rz} = \sum F_{iz} = 0 \quad \uparrow : \\
 \\
 M_{Rx} = \sum M_{ix} = 0 \quad \swarrow : \\
 M_{Ry} = \sum M_{iy} = 0 \quad \rightarrow : \\
 M_{Rz} = \sum M_{iz} = 0 \quad \uparrow :
 \end{array}$$


**Hinweis:** Die 3 Kraftgleichgewichtsbedingungen können wahlweise durch Momentengleichgewichtsbedingungen ersetzt werden.

Dann ist darauf zu achten, daß die Gleichungen linear unabhängig bleiben.

#### Beispiel:



## 2 Stütz- und Verbindungskräfte an Körpern

### 2.1 Freiheitsgrad, Bindungen, statische Bestimmtheit

**Freiheitsgrad : f** = Anzahl der notwendigen Koordinaten zur eindeutigen Festlegung der momentanen Lage eines Körpers oder eines Systems.

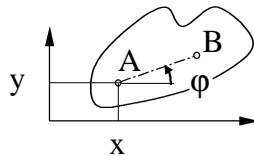
Beispiele:

Punkt im Raum:  $f = 3$  (notwendig: x-, y-, z-Koordinaten)

Punkt in der Ebene:  $f = 2$  ( x-, y-Koordinaten)

Körper im Raum:  $f = 6$  ( 3 Koordinaten legen die Lage eines Körperpunktes fest und 3 Winkelkoordinaten die augenblickliche Winkellage)

Körper in der Ebene:  $f = 3$  (z.B.: x, y,  $\varphi$ )



**Bindungen** verhindern die „freie“ Beweglichkeit eines Körpers und verringern damit den Freiheitsgrad des Körpers oder eines Systems.

Es gibt zwei Arten von Bindungen:

**Lager (bindung)** = Fesselung des Körpers zur ruhenden Umgebung

**Verbindung** = Fesselung zwischen zwei Körpern

Eine Fesselung oder Bindung ist nur möglich, wenn die Bindungen auch Kräfte und / oder Momente übertragen können, um den Körper zu halten.

**Wertigkeit einer Bindung: b**

= Anzahl der gebundenen Freiheitsgrade

= Anzahl der übertragenen Kräfte und Momente

In der **Statik** beschäftigen wir uns i.allg. mit ruhenden, unbeweglichen Körpern ( $f = 0$ ).

**Satz:** Ein System aus mehreren Körpern ist im Gleichgewicht, wenn jeder Körper für sich im Gleichgewicht ist.

Je Körper im Raum : 6 linear unabhängige GGB

Je Körper in der Ebene : 3 linear unabhängige GGB

**System aus n Körpern** 6 n GGB für räumliche Probleme bzw. 3 n GGB für ebene Probleme

**Statische Bestimmtheit** bedeutet die Berechenbarkeit der Bindungskräfte und –momente allein aus Gleichgewichtsbedingungen (GGB). Ein System ist statisch bestimmt gelagert, wenn die Anzahl der Bindungen gerade so gewählt wurde, daß  $f = 0$  erfüllt ist und damit aus den GGB alle Bindungskräfte und –momente berechnet werden können.

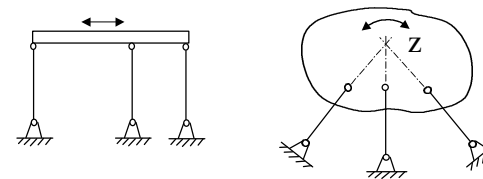
**Notwendige Bedingung** für statische Bestimmtheit:

Summe der Wertigkeiten aller Bindungen  $b = 6 n$  im Raum

$b = 3 n$  in der Ebene

Bedingung ist nicht hinreichend, es gibt Ausnahmen:

Beispiele für solche **Ausnahmen**:



kleine Drehung um z möglich

Für  $b > 6 n$  bzw.  $b > 3 n$  liegt eine **statisch unbestimmte Lagerung** vor. Die Berechnung ist erst in der Festigkeitslehre möglich. Für  $f > 0$  liegt ein **bewegliches System** vor. Ist solch ein System unbeschleunigt (z.B. Rotation einer Welle mit konstanter Drehzahl oder geradlinige Bewegung mit konst. Geschwindigkeit), so ist eine quasi statische Berechnung möglich. Allgemein bewegte Systeme werden in der Kinetik berechnet.

## 2.2 Beispiele für Lager und Verbindungen

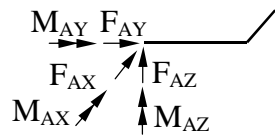
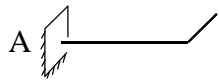
### 2.2.1 Räumlicher Lastfall

**Einspannung**  $b = 6$  (Lagerwertigkeit)



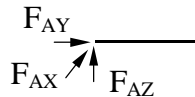
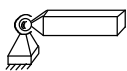
Träger im Lagerpunkt A angeschweißt oder eingemauert

Vereinfachte Darstellung: In A kann eine resultierende Kraft (3 Komponenten) und ein resultierendes Moment (3 Komponenten) übertragen werden.

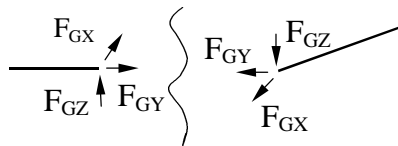
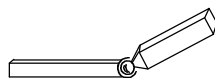


**Hinweis:** Bei Lagerreaktionen kann die Pfeilrichtung willkürlich gewählt werden. Der Pfeilsinn und das Vorzeichen der berechneten Lagerreaktion sind im Zusammenhang zu sehen.

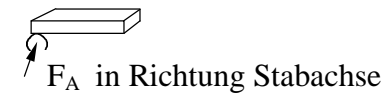
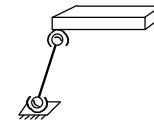
**Kugelgelenk**  $b = 3$



**Kugelgelenk als Verbindung**  $b = 3$

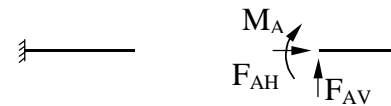


**Stützstab mit 2 Kugelgelenken (Pendelstütze)**  $b = 1$

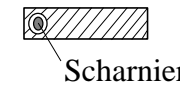


**2.2.2 Ebener Lastfall**

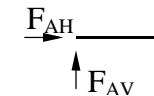
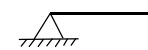
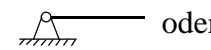
**Einspannung**  $b = 3$



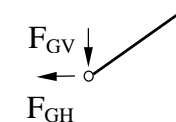
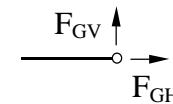
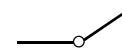
**Festlager**  $b = 2$



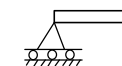
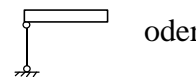
allgemeines Symbol :



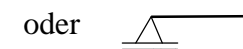
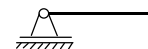
**Gelenk**  $b = 2$



**Loslager**  $b = 1$



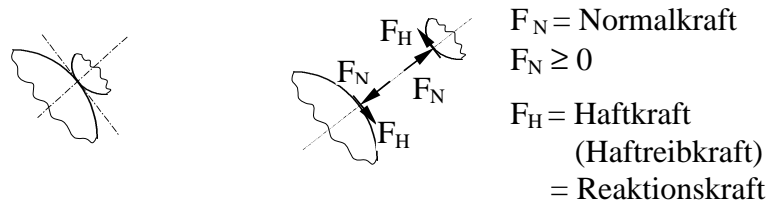
allgemeines Symbol:



**Reibungsfreie (ideal glatte) Berührung zwischen zwei Körpern  $b = 1$**



**Rauhe Auflage (Haftung ohne Bewegung)  $b = 2$**



Es gilt:  $F_N \geq 0$  ;  
 $|F_H| \leq \mu_0 F_N = F_{Hmax}$   
 $\mu_0$  = Haftreibungskoeffizient (von Oberflächenrauigkeit und Adhäsion abhängig)  
 → siehe Anlage A 2

**2.3 Tragwerke**

Unter einem Tragwerk versteht man eine Konstruktion, die in der Lage ist, ihr eigenes Gewicht und zusätzliche Lasten zu tragen (im Gleichgewicht zu halten).

Im allgemeinen ist ein Tragwerk ein ruhendes Bauwerk (z.B. Hochspannungsmast, Brücke, Stahlskelett einer Werkhalle usw.), es kann aber auch ortsveränderlich sein (z.B. verfahrbarer Hallenkran).

**2.3.1 Elemente von Tragwerken**

- Seil:** nur Zugbelastung möglich
- Stab:** Zug- und Drucklängskräfte möglich

**Balken:** stabförmige Geometrie  
allgemeine Belastung möglich

**Scheibe:** ebene, flächenhafte Geometrie  
allgemeine Belastung  
**innerhalb der Scheibenebene** möglich

**Platte:** ebene, flächenhafte Geometrie  
allgemeine Belastung  
**senkrecht zur Plattenebene** möglich

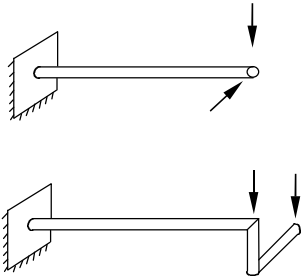
**Schale:** gewölbte, flächenhafte Geometrie  
allgemeine Belastung möglich

**3-D-Körper:** allgemeine räumliche Geometrie  
allgemeine Belastung möglich

### 2.3.2 Einfache Tragwerke

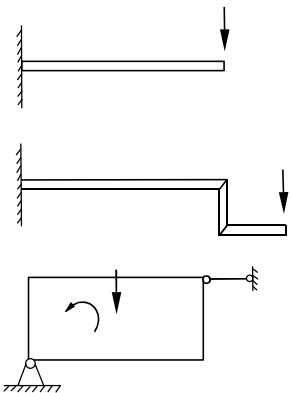
Einfache Tragwerke bestehen aus **einem** festen Körper.

**räumliche einfache Tragwerke:**



Geometrie und / oder Belastung liegen **nicht** in einer Ebene

**ebene einfache Tragwerke:**



geometrischer Aufbau und Belastung fallen in eine Ebene

**Lösungsweg für die Berechnung von Lagerreaktionen einfacher Tragwerke:**

- Lagerbindungen „frei“ schneiden
- Lagerkräfte und -momente antragen
- Gleichgewichtsbedingungen formulieren
- Gleichungssystem lösen

**Hinweis:** Vorgehensweise dem ebenen oder räumlichen Problem anpassen.

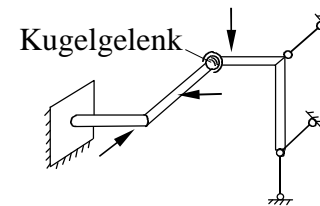
3 Gleichungen beim ebenen Problem

6 Gleichungen beim räumlichen Problem

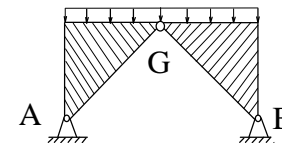
### 2.3.3 Zusammengesetzte Tragwerke

Ein zusammengesetztes Tragwerk besteht aus mehreren Tragwerkelementen, die nicht starr untereinander verbunden sind. Zwischen den Teilkörpern liegen Verbindungen z.B. in Form von Gelenken vor.

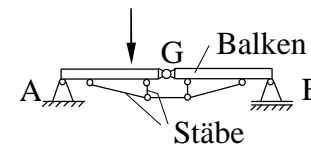
**räumlich zusammengesetztes Tragwerk:**



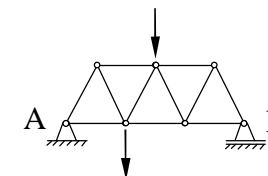
**ebene zusammengesetzte Tragwerke:**



Dreigelenkbogen



Sprengwerk



Fachwerk

## Lösungsweg für die Berechnung von Lager- und Verbindungsreaktionen zusammengesetzter Tragwerke:

Bei zusammengesetzten, statisch bestimmten Tragwerken können die Lagerreaktionen in vielen Fällen **nicht am Gesamtsystem** berechnet werden. Werden dann nur die Lagerbindungen „frei“ geschnitten, so erhält man nicht genügend Gleichungen zur Berechnung der Lagerreaktionen.

Ausgehend vom Satz „Ein System aus mehreren Körpern ist im Gleichgewicht, wenn jeder Körper für sich im Gleichgewicht ist“, wird das zusammengesetzte System zusätzlich an den Verbindungen „frei“ geschnitten und damit in Teilsysteme zerlegt. Werden an jedem Teilsystem die GGB formuliert, so erhält man in der Summe die erforderlichen Gleichungen zur Berechnung der Lagerreaktionen.

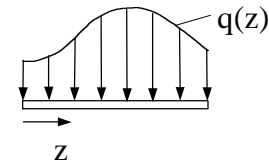
### Vorgehensweise:

- Lager „frei“ schneiden und Verbindungen „frei“ schneiden
- Lager- und Verbindungskräfte bzw. -momente antragen  
Hinweis: Wechselwirkungsgesetz beachten !
- An jedem Teilsystem Gleichgewichtsbedingungen ( GGB ) formulieren
- Gleichungssystem bestehend aus allen GGB der Teilsysteme lösen. Man erhält alle Lagerreaktionen und die Verbindungsreaktionen (z.B. die Gelenkkraftkomponenten).

## 2.4 Streckenlasten (Linienlasten)

Bei Linientragwerken (Seile, Balken) sind neben Einzellasten auch linienhaft verteilte Lasten sogenannte Streckenlasten zu berücksichtigen.

### symbolische Darstellung:

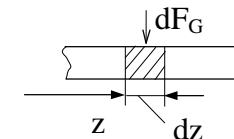


Deutung: Wirkung von unendlich vielen differentiell kleinen Kräften

$q(z)$  heißt **Intensität** der Streckenlast  
Dimension: Kraft / Länge  
Einheit: N / m

### Anwendung:

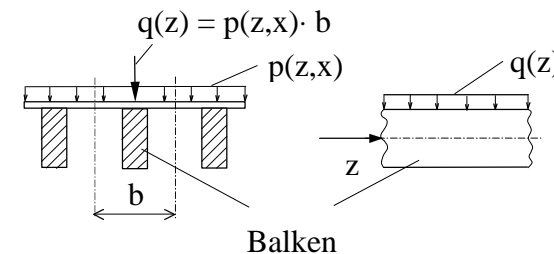
- zur Beschreibung des **Eigengewichtes** des Balkens



$$dF_G = g dm = g r dV = g r A(z) dz$$

$$q(z) = \frac{dF_G}{dz} = g r A(z)$$

- zur Erfassung des auf den Balkenbereich reduzierten Anteils einer **flächenhaft verteilten** Schneelast oder Schüttgutbelastung  $p(z,x)$

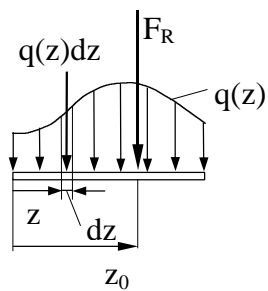


Balken

**Satz:** Innerhalb eines Schnittbildes kann eine Streckenlast durch ihre resultierende Kraftwirkung ersetzt werden.

**Hinweis:** Bei erneuter Schnittführung wieder von ursprünglicher Streckenlast ausgehen !

**Betrag und Angriffspunkt** der resultierenden Kraftwirkung:



$F_R$  = resultierende Kraftwirkung  
 $z_0$  = Angriffspunkt der Resultierenden

**Äquivalenzbetrachtung:**

$$F_R = \int_{(z)} q(z) dz$$

$$z_0 = \frac{1}{F_R} \int_{(z)} z q(z) dz$$

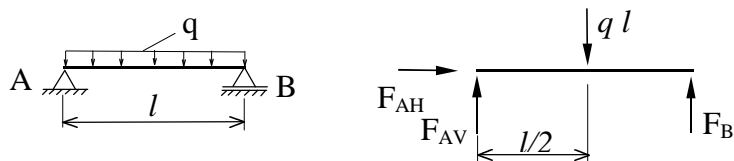
**geometrische Interpretation:**

- $F_R$  entspricht der Größe der von Pfeilen überdeckten „Fläche“
- $F_R$  verläuft durch den Schwerpunkt der von Pfeilen überdeckten „Fläche“

**Beispiele:**

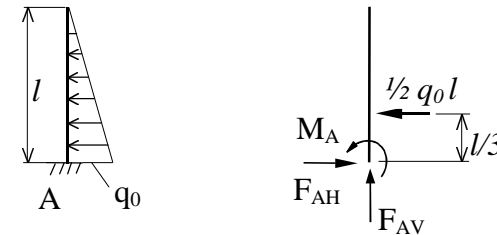
**konstante Streckenlast (Rechtecklast)**

z.B. Eigengewicht

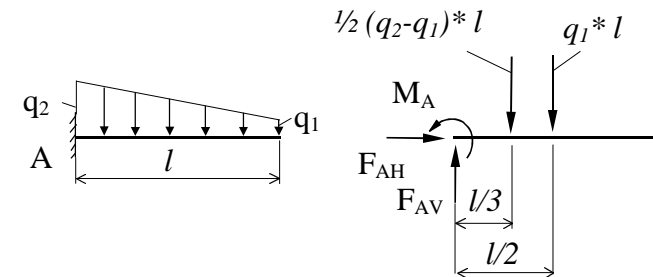


**linear veränderliche Streckenlast (Dreieckslast)**

z.B. Wasserdruck



**Trapezlast**



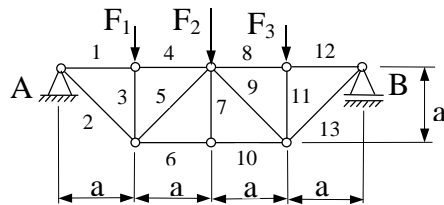
**Berechnungsbeispiele:**

## 2.5 Ebene Fachwerke

**Fachwerk** = Stabsystem aus gelenkig miteinander verbundenen geraden Stäben, wobei Lasten nur in den Gelenken (Knoten) angreifen. Dann tritt in jedem Stab nur eine Zug- oder Druckkraft auf.

Bei einem ebenen Fachwerk liegen alle Stäbe und die Lasten innerhalb einer Ebene.

Beispiel:



**Hinweis:** In der Praxis sind die Stabknoten i.allg. nicht als Gelenke ausgeführt, sondern Niet-, Schraub- oder Schweißverbindungen (siehe Hochspannungsmaste, Brückenkonstruktionen usw.)

Die Idealisierung der Knoten als Gelenke liefert bei **schlanken** Stäben erfahrungsgemäß keine großen Berechnungsfehler.

**Notwendige Bedingung** für die statische Bestimmtheit des ebenen Fachwerks :

s = Anzahl der Fachwerkstäbe

b = Summe der Wertigkeiten der Lager

k = Anzahl der Knoten

$$s + b = 2k$$

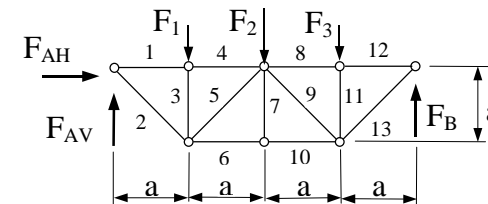
Für obiges Beispiel gilt:  $13 + 3 = 2 \cdot 8$

In der Statik interessieren die Lagerreaktionen und die Stabkräfte.

## Vorgehensweise bei der Berechnung

- Berechnung der Lagerreaktionen am Gesamtsystem (evtl. 2 Teilsysteme mit Gelenk)
- Berechnung der **Stabkräfte** nach dem **Knotenschnittverfahren** (allgemein anwendbares Verfahren)
- Eventuell Berechnung ausgewählter Stabkräfte nach dem **Ritter'schen Schnittverfahren**

Bestimmung der **Lagerreaktionen** am Gesamtsystem :



$$\rightarrow : F_{AH} = 0$$

$$\uparrow : F_{AV} + F_B - F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$\curvearrowleft : F_1 a + F_2 2a + F_3 3a - F_B 4a = 0$$

$$F_{AV} = \frac{1}{4}(3F_1 + 2F_2 + F_3)$$

$$F_B = \frac{1}{4}(F_1 + 2F_2 + 3F_3)$$

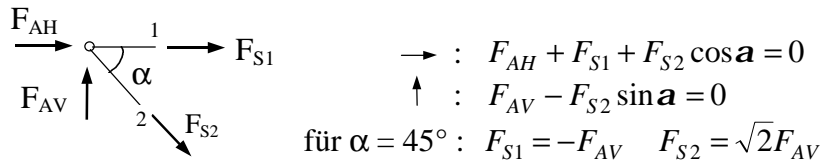
## Knotenschnittverfahren

Nacheinander wird **um jeden Knoten ein Schnitt geführt**. So erhält man insgesamt **k Schnittführungen**. Jedes Schnittbild stellt **ein zentrales ebenes Kraftsystem** dar, an dem je 2 Kraftgleichgewichtsbedingungen formuliert werden können. Aus den insgesamt  $2 \cdot k$  Gleichungen können alle s Stabkräfte und alle b Lagerreaktionen berechnet werden (siehe notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit).

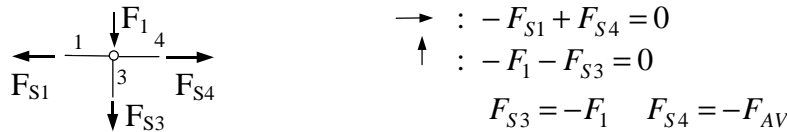
Die Lagerkräfte müssen somit nicht vorher berechnet werden. Es ist aber i.allg. sinnvoll, die Lagerreaktionen vorweg zu berechnen, da dann bei gezielter Vorgehensweise an jedem Schnittbild bereits die zugehörigen unbekannt Stabkräfte berechnet werden können.

**Anwendung für obiges Beispiel**

Schnitt um linken oberen Knoten

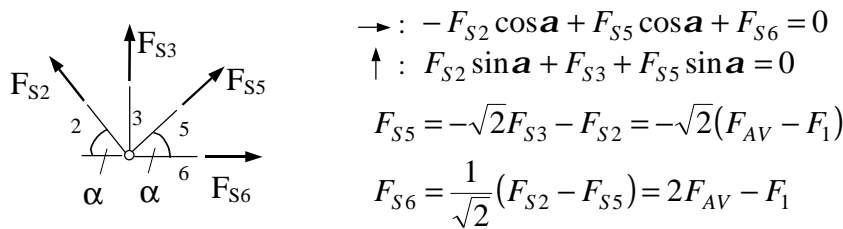


Schnitt um 2. oberen Knoten



Am oberen Mittelknoten gibt es mehr als zwei unbekannte Stabkräfte.

Schnitt um linken unteren Knoten



Jetzt kann mit dem unteren oder oberen Mittelknoten fortgesetzt werden. Es treten jeweils zwei neue unbekannte Stabkräfte auf. Schließlich erhält man alle Stabkräfte als Funktion der gegebenen Kräfte:

$$F_{S1} = F_{S4} = -\frac{1}{4}(3F_1 + 2F_2 + F_3) \quad F_{S5} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(-F_1 + 2F_2 + F_3)$$

$$F_{S2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(3F_1 + 2F_2 + F_3) \quad F_{S6} = F_{S10} = \frac{1}{4}(2F_1 + 4F_2 + 2F_3)$$

$$F_{S3} = -F_1 \quad F_{S7} = 0$$

$$F_{S8} = F_{S12} = -3F_{AV} - 2F_1 + F_2 = -\frac{1}{4}(F_1 + 2F_2 + 3F_3)$$

$$F_{S9} = \sqrt{2}(F_{AV} - F_1 - F_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(F_1 + 2F_2 - F_3)$$

$$F_{S11} = -F_3$$

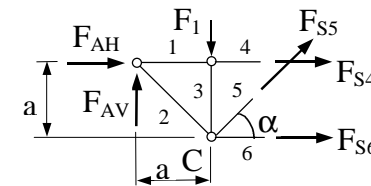
$$F_{S13} = \sqrt{2}(3F_{AV} - 2F_1 - F_2) = \frac{\sqrt{2}}{4}(F_1 + 2F_2 + 3F_3)$$

**Ritter'sches Schnittverfahren**

Der Ritter'sche Schnitt ist ein Schnitt, bei dem **3 Fachwerkstäbe, die nicht alle in einem Punkt zusammenlaufen**, geschnitten werden. Damit liegt ein allgemeines ebenes Kraftsystem vor. Es können drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert und die drei Stabkräfte berechnet werden.

Dieses Verfahren eignet sich zur Kontrollrechnung oder für den Fall, wenn nur einige Stabkräfte im mittleren Bereich des Fachwerks berechnet werden sollen.

Anwendung auf obiges Beispiel:



$$\rightarrow : F_{AH} + F_{S4} + F_{S5} \cos a + F_{S6} = 0$$

$$\uparrow : F_{AV} - F_1 + F_{S5} \sin a = 0$$

$$\curvearrow C : F_{AH}a + F_{AV}a + F_{S4}a = 0$$

Für  $a = 45^\circ$ :

$$F_{S4} = -F_{AV}$$

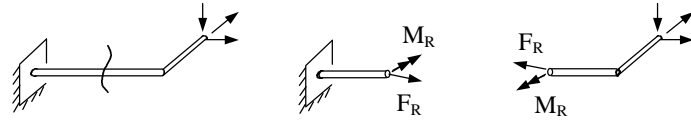
$$F_{S5} = -\sqrt{2}(F_{AV} - F_1)$$

$$F_{S6} = 2F_{AV} - F_1$$



### 3 Schnittgrößen im Balken

#### 3.1 Einführung



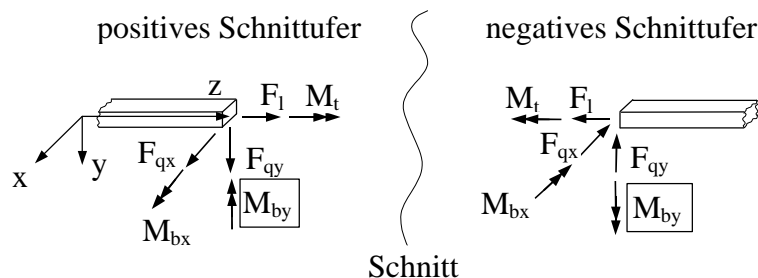
In jedem Balkenquerschnitt wird eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment übertragen. In der Mechanik interessieren die **drei Komponenten der Kraft** und **drei Komponenten des Momentes** bezüglich eines mit der Balkenachse verbundenen Koordinatensystems. Diese sechs Komponenten nennt man **Schnittgrößen**, da sie nur über eine Schnittführung und Gleichgewichtsbetrachtungen am Teilsystem ermittelt werden können. Die Schnittgrößen geben Auskunft über die **Beanspruchung** des Balkens.

Aus den Schnittgrößen werden in der Festigkeitslehre mechanische Spannungen und die Verformung des Bauteils berechnet. Daher ist eine **eindeutige Vorzeichenfestlegung** erforderlich.


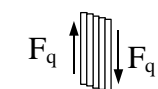
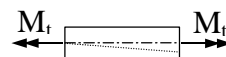

#### Bezeichnung und Definition der Schnittgrößen :

Voraussetzung:

- Das Balkensystem besteht aus stückweise geraden Balkenabschnitten
- Für jeden Balkenabschnitt wird ein kartesisches Koordinatensystem (Rechtssystem) so definiert, daß die z-Achse mit der Balkenlängsachse zusammenfällt.



Die Kraft- und Momentenkomponenten werden nach ihrer Wirkrichtung bzw. nach dem Verformungseffekt, den sie am elastischen Balken hervorrufen, bezeichnet.

Symbol	Bezeichnung	führt zur Verformung
$F_l$	Längskraft	Längenänderung 
$F_{qx}$	Querkraft (in x-Richtung)	Gleitung, Scherung
$F_{qy}$		
		
$M_t$	Torsionsmoment	Torsion, Verdrillung 
$M_{bx}$	Biegemoment (um x-Achse)	Biegung, Krümmung
$M_{by}$		
		

#### Berechnung der Schnittgrößen

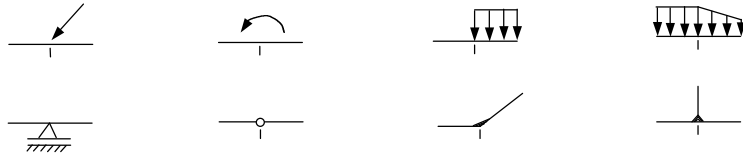
- Erfolgt bereichsweise am herausgeschnittenen Teilsystem über Gleichgewichtsbedingungen.

Es kann **wahlweise** das **Teilsystem mit dem positiven Schnitrufer** **oder** das Teilsystem mit dem **negativen Schnitrufer** verwendet werden. Man entscheidet sich für das einfachere Teilsystem. Bei etwa gleichem Aufwand ist das Teilsystem mit dem positiven Schnitrufer zu bevorzugen.

**Hinweis:** Als Momentenbezugspunkt wird zweckmäßig immer der Schnittpunkt selbst benutzt.

- Das Balkensystem ist in Bereiche einzuteilen, so daß sich für jeden Bereich **stetige Schnittgrößenfunktionen** ergeben.
- Für jeden Balkenbereich wird ein eigenes lokales Koordinatensystem festgelegt.

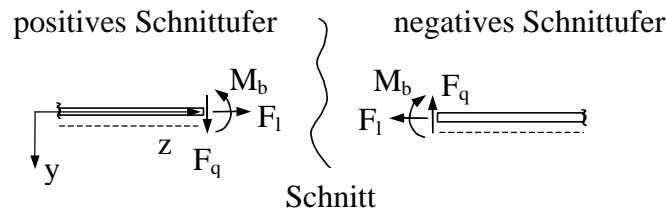
**Bereichsgrenzen**



nicht notwendig,  
oft sinnvoll

**3.2 Schnittgrößen beim ebenen Lastfall**

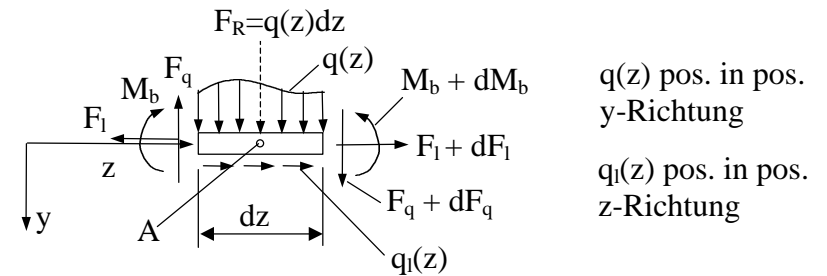
Beim ebenen Lastfall sind  $F_{qx}$ ,  $M_{by}$  und  $M_t$  immer gleich Null. Daher kann der zweite Index zur Bezeichnung der Schnittgrößen entfallen.



**Hinweise:**

- Häufig wird anstelle der y-Achse nur die positive Randfaser des Balkens durch eine Strichlinie gekennzeichnet.
- Bei horizontal liegendem Balken ist es üblich, die z-Achse von links nach rechts laufen zu lassen und die y-Achse zeigt dann nach unten.
- Zur Erhöhung der Anschaulichkeit ist es zweckmäßig, die Schnittgrößenverläufe grafisch darzustellen. Diese werden quer zur Balkenachse positiv in positiver y-Richtung abgetragen. Der Verlauf wird senkrecht zur Balkenachse schraffiert.

**Differentieller Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen**



Gleichgewicht am herausgeschnittenen Element liefert:

$$\rightarrow : \quad -F_l + q_l(z) dz + F_l + dF_l = 0$$

$$dF_l + q_l(z) dz = 0$$

$$\boxed{\frac{dF_l}{dz} = -q_l(z)}$$

$$\uparrow : \quad F_q - q(z) dz - F_q - dF_q = 0$$

$$\boxed{\frac{dF_q}{dz} = -q(z)}$$

$$\curvearrowright : \quad \cancel{M_b} + F_q \frac{1}{2} dz - \cancel{M_b} - dM_b + F_q \frac{1}{2} dz + dF_q \frac{1}{2} dz = 0$$

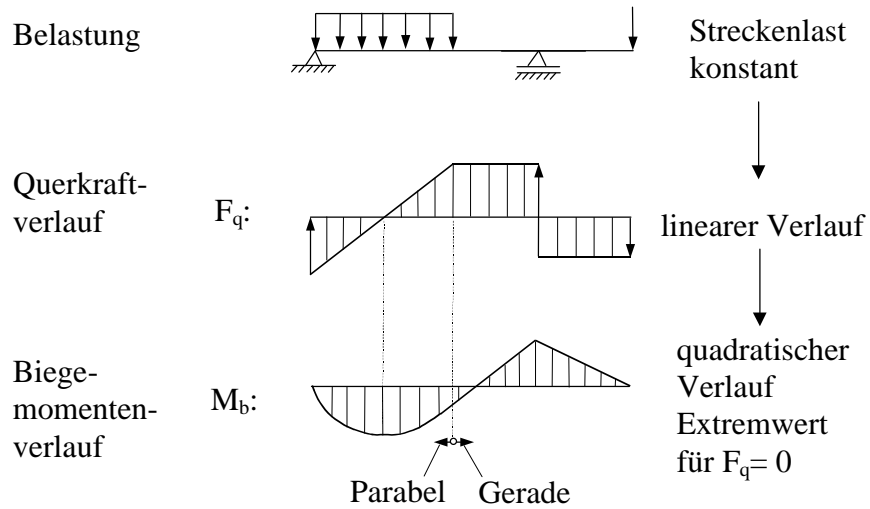
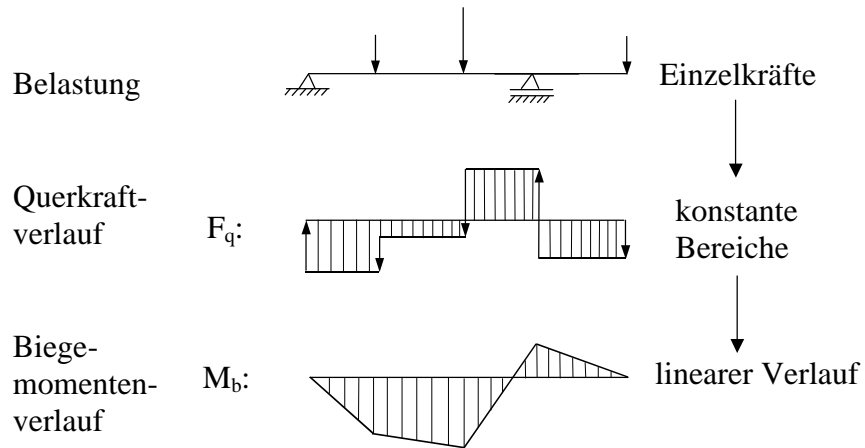
$$F_q dz - dM_b = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_b}{dz} = F_q}$$

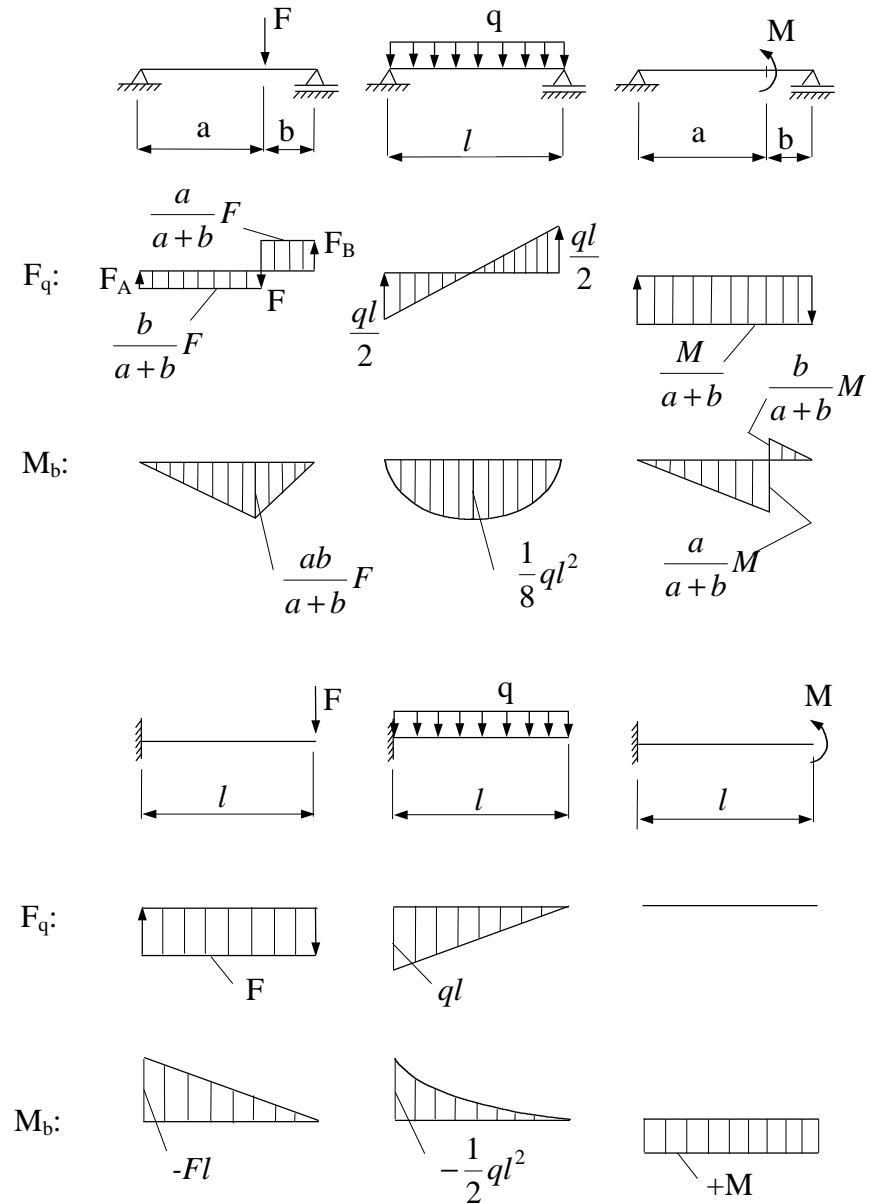
$$\boxed{\frac{d^2 M_b}{dz^2} = -q(z)}$$

Aus der unteren Beziehung folgt, daß für  $F_q = 0$  das **Biegemoment** einen **Extremwert** besitzt.

### Hinweise zum prinzipiellen Verlauf der Schnittgrößen

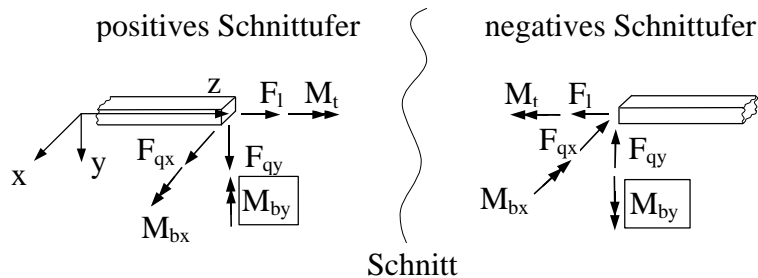


### Einfache Beispiele



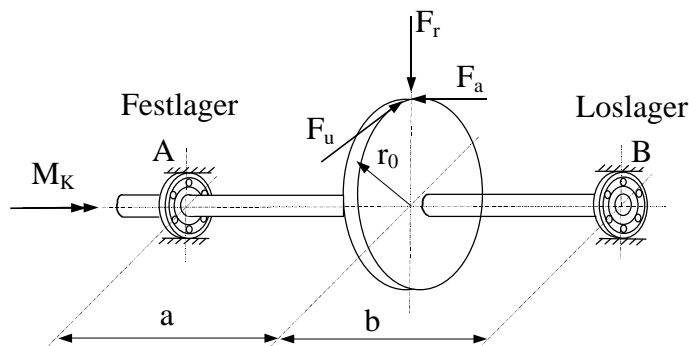
### 3.3 Schnittgrößen beim räumlichen Lastfall

Definition siehe Punkt 3.1



#### Anwendungsbeispiel:

Berechnung der Schnittgrößen in der Antriebswelle eines Stirnradgetriebes mit Schrägverzahnung (bei konstanter Drehzahl).



Geg.: a, b

- $r_0$  Teilkreisradius
- $\alpha_0$  Zahneingriffswinkel
- $\beta_0$  Zahnschrägungswinkel
- $M_K$  Kupplungsmoment

Es gilt:  $F_u$  tangentielle Zahnkraft  
 $F_r$  radiale Zahnkraft  
 $F_a$  axiale Zahnkraft

Ges.: Schnittgrößen in beiden Wellenabschnitten

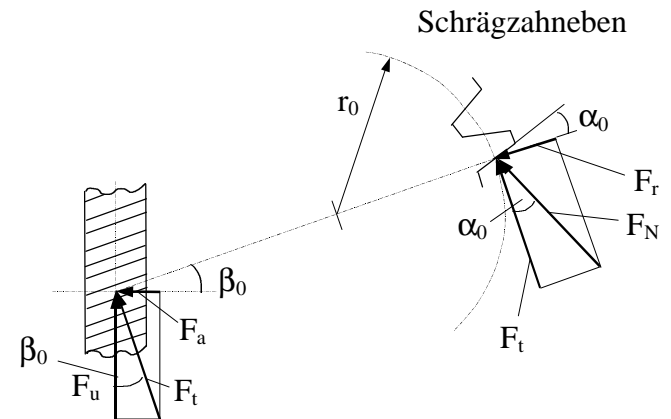
$$F_r = F_u \frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0}$$

$$F_a = F_u \tan \beta_0$$

#### Hinweis:

Der Zusammenhang zwischen  $F_u$ ,  $F_r$  und  $F_a$  ergibt sich aus der Zahngeometrie. Die Zahnflanken der beiden sich im Eingriff befindenden Zahnräder rollen mit nur geringer Relativbewegung aufeinander ab.

Normal zur Berührungsfläche der Zahnflanken wird die Zahnkraft  $F_N$  übertragen. Wie das nachfolgende Bild zeigt, lässt sich  $F_N$  innerhalb der Schrägzahnebene in die Radialkomponente  $F_r$  und in eine Tangentialkomponente  $F_t$  zerlegen. Innerhalb der Tangentialebene wird  $F_t$  in die Axialkomponente  $F_a$  und in die in der Zahnradenebene liegende Umfangskraft  $F_u$  zerlegt.



$$F_r = F_N \sin \alpha_0$$

$$F_t = F_N \cos \alpha_0$$

$$F_u = F_t \cos \beta_0 = F_N \cos \alpha_0 \cos \beta_0$$

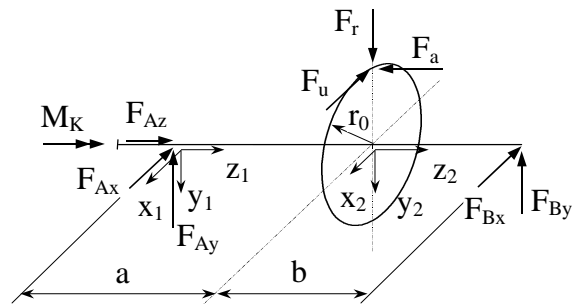
$$F_a = F_t \sin \beta_0 = F_N \cos \alpha_0 \sin \beta_0$$

$$F_N = \frac{F_u}{\cos \alpha_0 \cos \beta_0}$$

$$F_r = F_u \frac{\tan \alpha_0}{\cos \beta_0}$$

$$F_a = F_u \tan \beta_0$$

## Berechnung der Lagerreaktionen



$$\rightarrow : F_{Az} - F_a = 0$$

$$\uparrow : F_{Ay} - F_r + F_{By} = 0$$

$$\nearrow : F_{Ax} + F_u + F_{Bx} = 0$$

$$\overrightarrow{A} : M_K - F_u r_0 = 0$$

$$A \uparrow : F_u a + F_{Bx} (a+b) = 0$$

$$\nearrow A : F_r a - F_a r_0 - F_{By} (a+b) = 0$$

$$F_u = \frac{M_K}{r_0}$$

$$F_{Ax} = -\frac{b}{a+b} F_u$$

$$F_{Bx} = -\frac{a}{a+b} F_u$$

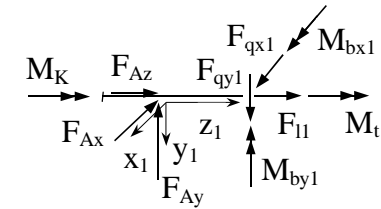
$$F_{Ay} = \frac{1}{a+b} (F_r b + F_a r_0)$$

$$F_{By} = \frac{1}{a+b} (F_r a - F_a r_0)$$

$$F_{Az} = F_a$$

## Berechnung der Schnittgrößen

**Bereich: 1** ( $0 \leq z_1 \leq a$ )



$$\rightarrow : F_{l1} + F_{Az} = 0$$

$$\uparrow : F_{Ay} - F_{qy1} = 0$$

$$\nearrow : F_{Ax} - F_{qx1} = 0$$

$$\overrightarrow{S} : M_K + M_{t1} = 0$$

$$S \uparrow : M_{by1} - F_{Ax} z_1 = 0$$

$$S \nearrow : -M_{bx1} + F_{Ay} z_1 = 0$$

$$F_{l1} = -F_{Az} = -F_a$$

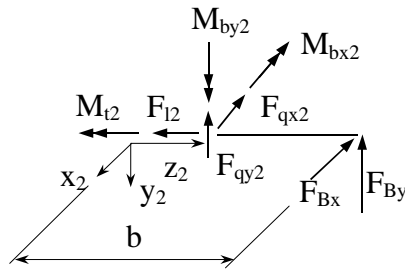
$$F_{qx1} = F_{Ax} = -\frac{b}{a+b} F_u$$

$$F_{qy1} = F_{Ay} = \frac{1}{a+b} (F_r b + F_a r_0)$$

$$M_{t1} = -M_K = -F_u r_0$$

$$M_{bx1} = F_{Ay} z_1 = \frac{1}{a+b} (F_r b + F_a r_0) z_1$$

$$M_{by1} = F_{Ax} z_1 = -\frac{b}{a+b} F_u z_1$$

**Bereich: 2** ( $0 \leq z_2 \leq b$ )negatives  
Schnittufer

$$\begin{aligned} \rightarrow : -F_{l2} &= 0 & \rightarrow : -M_{t2} &= 0 \\ \uparrow : F_{qy2} + F_{By} &= 0 & \uparrow : -M_{by2} + F_{Bx}(b - z_2) &= 0 \\ \nearrow : F_{qx2} + F_{Bx} &= 0 & \nearrow : M_{bx2} - F_{By}(b - z_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$F_{l2} = 0$$

$$F_{qx2} = -F_{Bx} = -\frac{a}{a+b} F_u$$

$$F_{qy2} = -F_{By} = -\frac{1}{a+b} (F_r a - F_a r_0)$$

$$M_{t2} = 0$$

$$M_{bx2} = F_{By}(b - z_2) = \frac{1}{a+b} (F_r a - F_a r_0)(b - z_2)$$

$$M_{by2} = F_{Bx}(b - z_2) = -\frac{a}{a+b} F_u (b - z_2)$$

**Grafische Darstellung der Schnittgrößen**

für folgende gegebenen Größen:

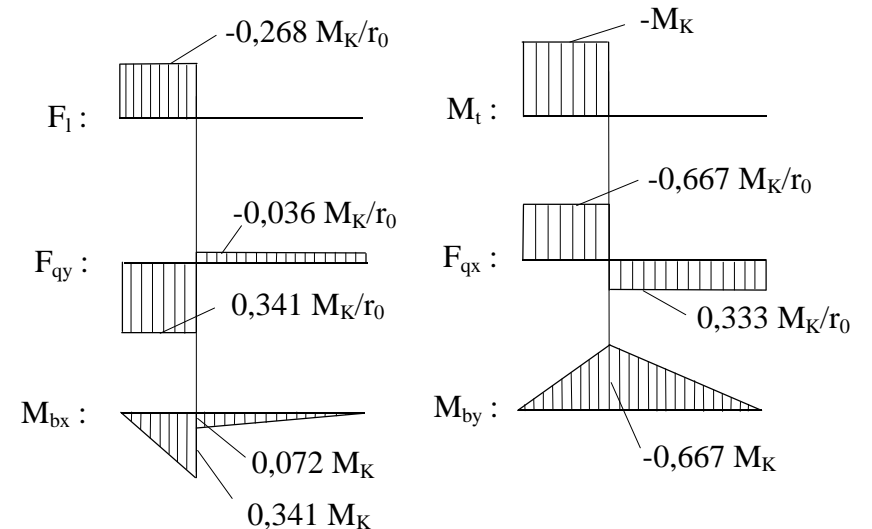
$$a = r_0, \quad b = 2r_0, \quad a_0 = 20^\circ, \quad b_0 = 15^\circ$$

damit

$$F_u = \frac{M_K}{r_0}, \quad F_r = 0,377 \frac{M_K}{r_0}, \quad F_a = 0,268 \frac{M_K}{r_0}$$

$$F_{Ax} = -0,667 \frac{M_K}{r_0}, \quad F_{Ay} = 0,341 \frac{M_K}{r_0}, \quad F_{Az} = 0,268 \frac{M_K}{r_0}$$

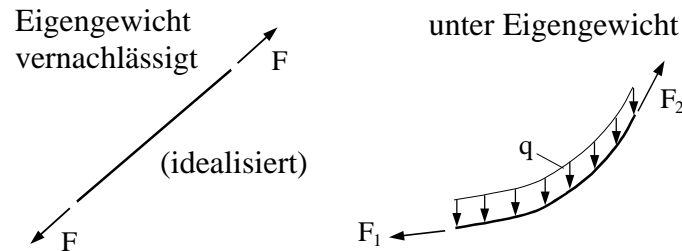
$$F_{Bx} = -0,333 \frac{M_K}{r_0}, \quad F_{By} = 0,036 \frac{M_K}{r_0}$$

**Größte Beanspruchung:** direkt am Zahnrad, linksseitig

## 4 Seile und Ketten

### 4.1 Einführung

- Seile und Ketten sind linienförmige Tragwerke. Sie übertragen nur Zugkräfte.
- Da sie praktisch keine Querkräfte und Biegemomente übertragen können, werden sie als **biegeschlaff** bezeichnet.
- Innerhalb der Statik betrachtet man die Seile und Ketten als **dehnstarr**, das heißt, ihre Länge bleibt auch unter Last konstant.
- Da aus mechanischer Sicht kein prinzipieller Unterschied zwischen einem Seil und einer Kette besteht, wird im folgenden nur noch vom Seil gesprochen. Die Aussagen gelten auch für Ketten.
- Kann das Eigengewicht vernachlässigt werden, so spannt sich das Seil zwischen Aufhängepunkten und Kraftangriffspunkten mit gerader Seilachse. Die Seilkraft ist dann abschnittsweise konstant.
- Bei Querbelastung z.B. durch Eigengewicht krümmt sich das Seil, so daß sich Gleichgewicht zwischen der stets tangential zur Seilachse wirkenden Seilkraft und der äußeren Belastung einstellt.



Die gewölbte Seilachse nennt man **Seilkurve** (bzw. **Kettenlinie** für die Kette).

- Die tangential zur Seilkurve gerichtete **Seilkraft ist nicht mehr konstant**.

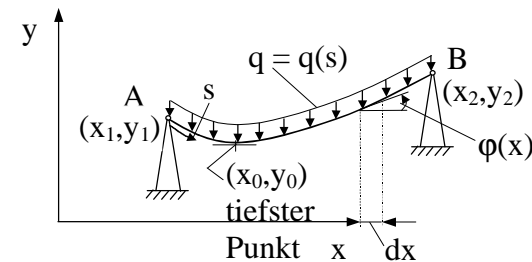
- Seile → kontinuierlicher Aufbau → kontinuierliche Seilkurve
- Ketten → endlich viele kleine Glieder → Kettenlinie setzt sich aus Polygonzug zusammen

**Beispiele:** Hochspannungsleitung, Seilbahn, Kabelkrananlage

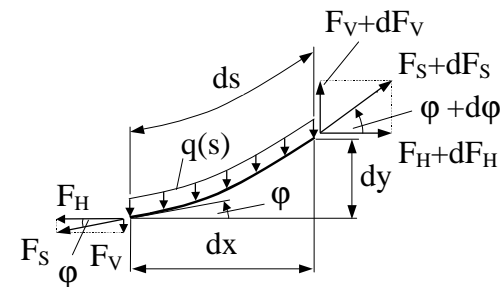
**Belastung:** Eigengewicht gegebenenfalls einschließlich  
Rauhreif- oder Eisbehang  
Einzellasten (z.B. Seilbahnkabine)

**Einschränkung:** kontinuierliche Belastung soll nur vertikal wirken (Gewichtsbelastung)  
→ Seilkurve liegt in einer vertikalen Ebene

### 4.2 Berechnung der Seilkurve infolge Eigengewicht



**Seilelement: ds**



**Geometrische Betrachtungen:**

$$\frac{dy}{dx} = y' = \tan j$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 + (dx)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= (dx)^2 [1 + (y')^2]$$

$$ds = dx \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1)$$

**Kraftbeziehungen:**

$$\frac{F_V}{F_H} = \tan j = y' \quad (2)$$

$$F_S = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = F_H \sqrt{1 + \left(\frac{F_V}{F_H}\right)^2}$$

$$F_S = F_H \sqrt{1 + (y')^2} \quad (3)$$

**Gleichgewicht:**

$$\rightarrow : -F_H + F_H + dF_H = 0$$

$$dF_H = 0$$

$$F_H = \text{konst.} \quad (4)$$

Die horizontale Kraftkomponente ist bei rein vertikaler Belastung im gesamten Seilabschnitt konstant.

$$\uparrow : -F_V - q(s)ds + F_V + dF_V = 0$$

$$\frac{dF_V}{ds} = q(s)$$

$$\text{Mit (1)} \quad \frac{dF_V}{dx} = q(s) \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\text{Aus (2)} \quad F_V = F_H y'$$

$$\frac{dF_V}{dx} = F_H y'' = q(s) \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$y'' = \frac{q(s)}{F_H} \sqrt{1 + (y')^2} \quad (5)$$

Gleichung (5) ist die **DGL der Seilkurve infolge Eigengewicht**

$q(s) = q = \text{konst.}$

$F_H = \text{konst.}$  aber i.allg. unbekannt.

**Zur Ermittlung von  $q(s)$ :**

Vertikale Belastung resultiert aus Eigengewicht und evtl. Rauhreifbehang und soll im weiteren als konstant angesehen werden.

$$q(s) = q = \text{spezifisches Gewicht} = \frac{\text{Gesamtgewicht}}{\text{Seillänge}} \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Resultiert die Belastung nur aus Eigengewicht, so gilt  $q = \text{Arg}$

**Lösung der DGL:**

Nur  $y''$  und  $y'$  ( $y$  tritt nicht auf)

$$\rightarrow \text{Substitution} \quad y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

$$\text{somit} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{q}{F_H} \sqrt{1 + p^2}$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{q}{F_H} dx$$

$$\text{integrieren:} \quad \text{ar sinh } p = \frac{q}{F_H} x + C_1$$

$$p = y' = \sinh \left( \frac{q}{F_H} x + C_1 \right)$$



integrieren: 
$$y = \frac{F_H}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_H} x + C_1\right) + C_2$$

### Bestimmung der Integrationskonstanten:

Für die praktische Anwendung ist es günstig, wenn die Koordinaten des tiefsten Seilpunktes mit horizontaler Tangente eingearbeitet werden. Bei bestimmten Aufhängebedingungen ist es möglich, daß der tiefste Seilpunkt mit horizontaler Tangente nur theoretisch existiert, da er außerhalb des Bereiches zwischen den Aufhängepunkten liegt.

**Tiefster Seilpunkt** mit horizontaler Tangente:  $x_0, y_0, \mathbf{j}(x_0) = 0$   
geometrische Bedingungen:

- 1)  $y(x = x_0) = y_0$
- 2)  $y'(x = x_0) = 0$

aus 2) folgt 
$$\sinh\left(\frac{q}{F_H} x_0 + C_1\right) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{F_H} x_0$$

aus 1) folgt

$$\frac{F_H}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_H} x_0 - \frac{q}{F_H} x_0\right) + C_2 = y_0 \Rightarrow C_2 = y_0 - \frac{F_H}{q}$$

Die Lösung ist die **Seilcurve infolge Eigengewicht**

$$y(x) = \frac{F_H}{q} \cosh\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right] + y_0 - \frac{F_H}{q} \quad (6)$$

$$y'(x) = \sinh\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right] \quad (7)$$

Seilkraft nach (3) 
$$F_S = F_H \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \sinh^2\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right]} = \cosh\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right] \quad (8)$$

$$F_S = F_H \cosh\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right] \quad (9)$$

Mit (9) in (6) 
$$y(x) = \frac{F_S}{q} + y_0 - \frac{F_H}{q}$$

$$F_S = F_H + q(y - y_0) \quad (10)$$

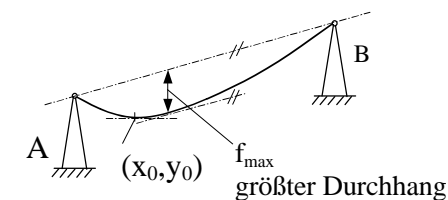
Da  $F_H = \text{konst.}$ , ist die **Seilkraft im obersten Seilpunkt am größten.**

**Seillänge L:**

$$L = \int ds = \int_{x=x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{x=x_1}^{x_2} \cosh\left[\frac{q}{F_H}(x - x_0)\right] dx$$

$$L = \frac{F_H}{q} \left[ \sinh\frac{q}{F_H}(x_2 - x_0) - \sinh\frac{q}{F_H}(x_1 - x_0) \right] \quad (11)$$

**Größter Durchhang des Seils:**



Liegen die Stützpunkte A und B nicht auf einem horizontalen Niveau, so befindet sich der größte Durchhang nicht an der tiefsten Stelle  $(x_0, y_0)$  des Seils. Der größte Durchhang des Seils

tritt an der Stelle auf, wo die Seiltangente parallel zur Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte A und B verläuft.

Mit den Gleichungen (6), (9) oder (10) und (11) ist der Zusammenhang zwischen der Durchbiegung, der Seilkraft und der Seillänge gegeben. Die Koordinatenwerte des tiefsten Seilpunktes  $x_0$  und  $y_0$  lassen sich aus den Aufhängekoordinaten berechnen

$$\left. \begin{array}{l} y(x=x_1) = y_1 \\ y(x=x_2) = y_2 \end{array} \right\} x_0, y_0$$

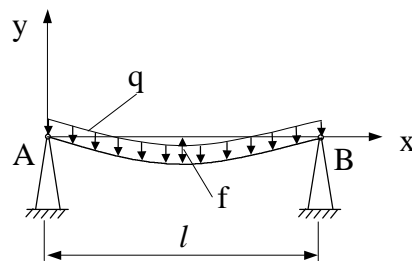
Das Arbeiten mit den Gleichungen (6) bis (11) ist recht aufwendig, wenn der Horizontalzug  $F_H$  nicht bekannt ist.

Die Gleichungen können i. allg. nur numerisch gelöst werden, indem man sich zunächst einen Horizontalzug  $F_H$  vorgibt und die anderen Größen in Abhängigkeit von  $F_H$  berechnet. Durch Variation von  $F_H$  kann man sich iterativ der gesuchten Lösung beliebig genau nähern.

### Beispielaufgabe:

Eine Hochspannungsleitung soll auf ebenem Gelände gebaut werden. Der Einfluß des Durchhangs der Leitung auf die Seilkraft und die Seillänge sind zu ermitteln.

Jedes Feld der Hochspannungsleitung wird in diesem Fall gleich beansprucht. Für die Lösung der Aufgabe darf man sich auf ein Feld beschränken.



Geg.:  $q, l, f$

Ges.:  $F_{S_{\max}}$ ,  
Seillänge  $L$

Mit der Festlegung des Koordinatensystems sind auch die Koordinaten der Aufhängepunkte A und B gegeben. Aus Symmetriegründen befindet sich der tiefste Punkt mit horizontaler Tangente in der Mitte zwischen den Aufhängepunkten.

$$\text{Es gilt: } \begin{array}{l} x_1 = 0 \quad x_2 = l \quad x_0 = \frac{l}{2} \\ y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_0 = -f \end{array}$$

Aus (6) folgt für  $x = l$

$$y(x=l) = 0 = \frac{F_H}{q} \cosh\left(\frac{q}{F_H} \frac{l}{2}\right) - f - \frac{F_H}{q}$$

$$\text{bzw. } \frac{f}{l} = \frac{F_H}{ql} \left[ \cosh\left(\frac{1}{2} \frac{ql}{F_H}\right) - 1 \right] \quad (\text{a})$$

Die betragsgrößte Seilneigung tritt in den Aufhängepunkten A und B auf. Der Neigungswinkel im Aufhängepunkt B läßt sich mit (7) berechnen

$$y'(x=l) = \tan \mathbf{j}_B = \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{ql}{F_H}\right)$$

$$\mathbf{j}_B = \arctan\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{ql}{F_H}\right)\right) \quad (\text{b})$$

Die größte Seilkraft tritt ebenfalls in den Aufhängepunkten A und B auf.

$$F_S(x=0) = F_S(x=l) = F_{S_{\max}} = F_H + q(0 + f)$$

$$\frac{F_{S_{\max}}}{ql} = \frac{F_H}{ql} + \frac{f}{l} \quad (\text{c})$$

Aus (11) berechnet sich die Seillänge zu

$$L = \frac{F_H}{q} \left[ \sinh\left(\frac{q}{F_H} \left(l - \frac{l}{2}\right)\right) - \sinh\left(\frac{q}{F_H} \left(0 - \frac{l}{2}\right)\right) \right]$$

$$\frac{L}{l} = \frac{F_H}{ql} 2 \sinh \frac{1}{2} \frac{ql}{F_H} \quad (d)$$

Bei Vorgabe eines relativen Durchhangs  $f/l$  kann der Quotient  $F_H/ql$  nur über die implizite Gleichung (a) iterativ berechnet werden. Mit  $F_H/ql$  lassen sich dann der Neigungswinkel  $j_B$ , die bezogene Maximalkraft  $F_{Smax}/ql$  und die bezogene Seillänge  $L/l$  ermitteln. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

$\frac{f}{l}$	$\frac{F_H}{ql}$	$\frac{F_{Smax}}{ql}$	$\frac{L}{l}$	$j_B [^\circ]$
0,001	125	125,001	1	0,23
0,002	62,5	62,502	1,00001	0,46
0,005	25	25,005	1,00007	1,15
0,01	12,5016	12,512	1,00027	2,29
0,02	6,2533	6,273	1,00107	4,58
0,05	2,5083	2,558	1,00664	11,35
0,1	1,2663	1,366	1,02619	22,06
0,2	0,6559	0,856	1,09971	39,97

**Näherungslösung:**

Die Lösung der obigen Aufgabe wird dadurch erschwert, daß die Gleichung (a) nur iterativ gelöst werden kann. Ist der Durchhang des Seils und damit die Seilneigung gering, so lassen sich die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen (6) bis (11) vereinfachen.

Aus der Bedingung  $y' \ll 1$  folgt aus (7)

$$y'(x) = \sinh \left[ \frac{q}{F_H} (x - x_0) \right] \ll 1$$

für das Argument

$$\frac{q}{F_H} (x - x_0) \ll 1$$

Für die Näherung werden die Funktionen  $\cosh \bar{x}$  und  $\sinh \bar{x}$  in Reihen entwickelt und für kleine  $\bar{x}$  nach wenigen Gliedern abgebrochen.

$$\cosh \bar{x} = 1 + \frac{\bar{x}^2}{2!} + \frac{\bar{x}^4}{4!} + \dots \approx 0$$

$$\sinh \bar{x} = \bar{x} + \frac{\bar{x}^3}{3!} + \frac{\bar{x}^5}{5!} + \dots \approx 0$$

Damit ergeben sich für straff gespannte Seile die relevanten Gleichungen in folgender **genäherter Schreibweise**:

$$y - y_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{F_H} (x - x_0)^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x - x_0)^2 \right] \approx 0 \quad (6a)$$

$$y' = \frac{q}{F_H} (x - x_0) \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x - x_0)^2 \right] \approx 0 \quad (7a)$$

$$F_S = F_H + q(y - y_0) \quad (10)$$

$$L = (x_2 - x_1) + \frac{1}{6} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x_2 - x_0)^3 \left[ 1 + \frac{1}{20} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x_2 - x_0)^2 \right] - \frac{1}{6} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x_1 - x_0)^3 \left[ 1 + \frac{1}{20} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 (x_1 - x_0)^2 \right] \approx 0 \quad (11a)$$

Aus (6a) folgt für  $x = l$

$$0 + f = \frac{1}{2} \frac{q}{F_H} \left( l - \frac{l}{2} \right)^2$$

$$\frac{F_H}{ql} = \frac{1}{8} \frac{l}{f} \quad (\text{aa})$$

Mit (7a) ergibt sich

$$y'(x=l) = \frac{q}{F_H} \left( l - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{ql}{F_H} = 4 \frac{f}{l}$$

$$j_B = \arctan 4 \frac{f}{l} \quad (\text{bb})$$

Aus (10) folgt

$$F_S(x=0) = F_S(x=l) = F_{S_{\max}} = F_H + q(0 + f)$$

$$\frac{F_{S_{\max}}}{ql} = \frac{F_H}{ql} + \frac{f}{l} = \frac{1}{8} \frac{l}{f} + \frac{f}{l} \quad (\text{cc})$$

Die angenäherte Seillänge folgt aus (11a)

$$L = l - 0 + \frac{1}{6} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 \left( l - \frac{l}{2} \right)^3 - \frac{1}{6} \left( \frac{q}{F_H} \right)^2 \left( 0 - \frac{l}{2} \right)^3$$

$$\frac{L}{l} = 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{ql}{F_H} \right)^2 = 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{l} \right)^2 \quad (\text{dd})$$

Ergebnisse der Näherungslösung:

$\frac{f}{l}$	$\frac{F_H}{ql}$	$\frac{F_{S_{\max}}}{ql}$	$\frac{L}{l}$	$j_B [^\circ]$
0,001	125	125,001	1	0,23
0,002	62,5	62,502	1,00001	0,46
0,005	25	25,005	1,00007	1,15
0,01	12,5	12,51	1,00027	2,29
0,02	6,25	6,27	1,00107	4,57
0,05	2,5	2,55	1,00667	11,31
0,1	1,25	1,35	1,02667	21,80
0,2	0,625	0,825	1,10667	38,66

Dieses Zahlenbeispiel zeigt im Vergleich mit der exakten Lösung, daß die Näherungslösung bis zu einem Neigungswinkel von etwa  $15^\circ$  noch praktisch ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

Bei waagrecht verlegter Hochspannungsleitung beträgt der Mastabstand ca. 300 m und der Durchhang liegt bei etwa 10 m. Diese Maße führen zu einer bezogenen Durchbiegung von  $f/l < 0,05$ . Hierfür wäre die Näherungslösung hinreichend.

**Hinweise:**

- Bei der Verlegung wird das Seil durch ca. 10 Masten hindurchgezogen, wobei die Seilkraft gemessen wird.
- Kriterium für das Spannen ist die Seilkraft unter Beachtung der Außentemperatur. Der Durchhang ist eine Kontrollgröße.
- Kritische Einsatzfälle sind hohe oder sehr tiefe Temperaturen, da sich die Seillänge durch Wärmedehnung verändert und der Fall des Eisbehanges, da sich dann das spezifische Gewicht erhöht  
Es ist zu überprüfen, ob bei zu erwartenden Maximaltemperaturen  $f \leq f_{\text{zul}}$  und ob für sehr tiefe Temperaturen bzw. für den Fall des Eisbehanges  $F_S \leq F_{S_{\text{zul}}}$  erfüllt werden.
- Für genaue Berechnungen ist zusätzlich die Längenänderung des Seils bei Laständerung zu beachten

Abschätzung der Längenänderung  $\Delta l$  eines Kupferseils von  $l = 100\text{m}$

a) Temperaturänderung:  $\Delta T = 10\text{K}$

$$\Delta l = l a_{Cu} \Delta T, \quad a_{Cu} = \frac{16,4}{10^6 \text{K}}, \quad \Delta l = \frac{100 \cdot 16,4 \cdot 10}{10^6} \text{m} = 0,016\text{m}$$

b) Spannungsänderung:  $\Delta s = 10 \text{ N/mm}^2$

$$s = \frac{F_S}{A}, \quad s_{\max, Cu} < 290 \text{ N/mm}^2, \quad E_{Cu} = 122000 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta l = l \frac{\Delta s}{E_{Cu}}, \quad \Delta l = \frac{100 \cdot 10}{122000} \text{m} = 0,008\text{m}$$

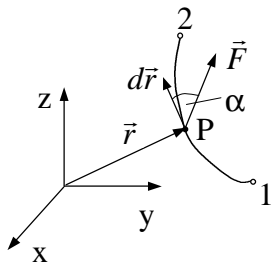
## 5 Der Arbeitssatz in der Statik

Die zentrale Aufgabe der Statik ist die Untersuchung des Gleichgewichtszustandes der Bauteile und Tragwerke. Die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes erforderlichen äußeren Reaktionskräfte (-momente) (Lagerreaktionen) und die inneren Kräfte (Momente) (Schnittkräfte) haben wir bisher aus Gleichgewichtsbedingungen berechnet. Es ist auch möglich und bei einigen Aufgabenstellungen auch effektiv, diese Kräfte aus Energiebetrachtungen abzuleiten.

Energieänderungen erfolgen über die Arbeit der Kräfte (Momente), die diese bei der Verschiebung (Verdrehung) ihres Angriffspunktes leisten. Da in der Statik i. allg. ruhende Systeme untersucht werden, muß für Arbeitsbetrachtungen zumindest eine virtuelle Bewegung angenommen werden.

### 5.1 Definition der Arbeit

#### Arbeit einer Kraft:



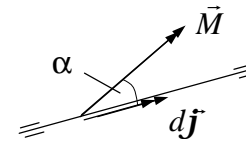
$$dW = \vec{F} d\vec{r}$$

$$dW = F dr \cos \alpha$$

$$W_{1,2} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$$

Nur die **Kraftkomponente in Wegrichtung** liefert einen Arbeitsanteil. Zeigt die Kraftkomponente in Wegrichtung, so ist die Arbeit positiv, die Energie des Systems wird erhöht. Bei entgegen der Bewegung gerichteter Kraftkomponente wird negative Arbeit verrichtet.

#### Arbeit eines Momentes:



$$dW = \vec{M} d\vec{j}$$

$$dW = M dj \cos \alpha$$

$$W_{1,2} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{M} d\vec{j}$$

Nur die Momentenkomponente in Richtung des Verdrehvektors liefert einen Arbeitsanteil. Fallen beide Vektorrichtungen zusammen, so ist die Arbeit positiv.

### 5.2 Definition der virtuellen Verrückung

**Verrückung** = Verschiebung oder Verdrehung

#### virtuelle Verrückung

- **gedachte**, fiktive Verschiebung oder Verdrehung, die in Wirklichkeit nicht unbedingt eintreten muß
- **differenziell kleine** Verrückung, so daß die Kräfte und Momente entlang der Verrückung als konstant angesehen werden können und sich die Geometrie des Systems nicht nennenswert ändert
- **geometrisch mögliche**, d. h. mit dem geometrischen Aufbau und den Bindungen verträgliche Verschiebung bzw. Verdrehung
- **zeitlose** Verrückung, so daß Trägheitswirkungen keine Rolle spielen

Die **Bezeichnung** einer virtuellen Verrückung erfolgt mit dem aus der Variationsrechnung entlehnten Zeichen  $\delta$  im Gegensatz zu einer wirklichen differentiell kleinen Verschiebung, die mit  $d$  bezeichnet wird.

Beispiele:  $d\vec{r}$ ,  $d\vec{j}$  oder  $\delta x$ ,  $\delta\varphi$

Besteht zwischen den Koordinaten eine funktionelle Abhängigkeit, so besteht sie auch zwischen den entsprechenden virtuellen Größen. Mathematisch werden die virtuellen Größen wie differentielle Größen behandelt.

$$x = x(\mathbf{j}) \quad d\mathbf{x} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{j}} d\mathbf{j}$$

Beispiel:  $x = l \sin \mathbf{j} \quad d\mathbf{x} = l \cos \mathbf{j} d\mathbf{j}$

### 5.3 Prinzip der virtuellen Verrückungen

Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit aller eingepprägten Kräfte und Momente bei jeder möglichen virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage verschwindet.

$$dW = \sum_i \vec{F}_i^e d\vec{r}_i + \sum_j \vec{M}_j^e d\vec{j}_j = 0$$

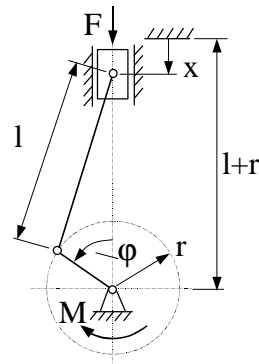
Dieses Prinzip wird auch als **Arbeitssatz der Statik** oder als **Prinzip der virtuellen Arbeit** bezeichnet.

(Streng umfaßt das Prinzip der virtuellen Arbeit sowohl das Prinzip der virtuellen Verrückungen als auch das Prinzip der virtuellen Kräfte).

Beispiel: Schubkurbelantrieb

Geg.:  $r, l, F$

Ges.:  $M = M(F, \varphi)$   
für den Gleichgewichtsfall



Das System hat den Freiheitsgrad  $f = 1$ . Zwischen den Koordinaten  $x$  und  $\varphi$  besteht eine geometrische Abhängigkeit.

$$x = l + r - r \cos \mathbf{j} - \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \mathbf{j}}$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{j}} d\mathbf{j} = \left[ r \sin \mathbf{j} - \frac{-2r^2 \sin \mathbf{j} \cos \mathbf{j}}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \mathbf{j}}} \right] d\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{x} = r \sin \mathbf{j} \left[ 1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \mathbf{j}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \mathbf{j}}} \right] d\mathbf{j}$$

Anwendung des Arbeitssatzes:

$$dW = F d\mathbf{x} - M d\mathbf{j} = 0$$

$$\left\{ Fr \sin \mathbf{j} \left[ 1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \mathbf{j}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \mathbf{j}}} \right] - M \right\} d\mathbf{j} = 0$$

Da  $d\mathbf{j} \neq 0$  folgt

$$M = Fr \sin \mathbf{j} \left[ 1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \mathbf{j}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \mathbf{j}}} \right]$$

## 5.4 Anwendung des Arbeitssatzes bei Reaktionskräften

Bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen wird nur von der Arbeit der eingepprägten Kräfte und Momente ausgegangen. Dieses ist natürlich, da die Reaktionskräfte wegen der Bindungen keine Verrückung erfahren können und somit auch keine Arbeit leisten. Dieses trifft auch für die inneren Schnittgrößen starrer Körper zu.

Werden die Bindungen gedanklich gelöst und dafür die Reaktionskräfte angetragen, so leisten diese bei einer jetzt möglichen virtuellen Verrückung eine virtuelle Arbeit und sind damit einer Berechnung zugänglich geworden. Diese spezielle Anwendung des Schnittprinzips wird auch als **Befreiungsprinzip** bezeichnet und geht auf Lagrange (1736-1813) zurück. Die Reaktionskräfte dürfen dabei wie eingepprägte Kräfte aufgefaßt werden.

Bei der Anwendung des Arbeitssatzes zur Berechnung der Reaktionskräfte ist es vorteilhaft nacheinander jeweils nur eine Bindung zu lösen, dann kann die zugehörige Größe sofort berechnet werden.

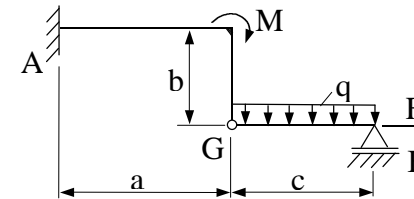
Die Anwendung dieses Verfahrens zur Ermittlung von Lagerreaktionen und Schnittgrößen ist gegenüber der bekannten Vorgehensweise (Anfertigung von Schnittskizzen und Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen) besonders dann effektiv, wenn nur ausgewählte Größen zu berechnen sind.

### Vorgehensweise:

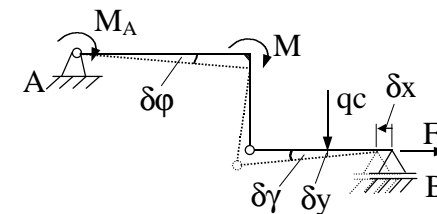
- Lösen einer Bindung und Antragen der entsprechenden Reaktionskraft (-moment)
- virtuelle Verrückung aufprägen
- Ermittlung der Verschiebungen und Verdrehungen an allen Kraft- und Momentenangriffsstellen als Funktion der virtuellen Verrückung
- Formulierung und Nullsetzen der virtuellen Arbeit
- Berechnung der Reaktionskraft (-moment)

### Beispiel:

Für das dargestellte Tragwerk sind die Lagerreaktionen im Punkt A und der Biegemomentenverlauf im linken Balkenabschnitt zu bestimmen.



**Ermittlung von  $M_A$**  durch Lösung der dazugehörigen Bindung und Aufbringen einer virtuellen Verrückung:



Die Streckenlast darf auch hier durch ihre resultierende Wirkung ersetzt werden.

Das System hat den Freiheitsgrad  $f = 1$ . Zwischen den virtuellen Koordinaten  $\delta\varphi$ ,  $\delta\gamma$ ,  $\delta x$  und  $\delta y$  besteht ein geometrischer Zwang. Bei den differentiell kleinen Größen gilt

$$\sin \mathbf{dj} = \mathbf{dj} \quad , \quad \cos \mathbf{dj} = 1$$

Damit ergeben sich folgende Zwangsbedingungen

$$\mathbf{adj} = c \mathbf{dg} \quad , \quad \mathbf{dg} = \frac{a}{c} \mathbf{dj}$$

$$\mathbf{dx} = b \mathbf{dj} \quad , \quad \mathbf{dy} = \frac{1}{2} c \mathbf{dg} = \frac{1}{2} \mathbf{adj}$$

Formulierung der virtuellen Arbeit

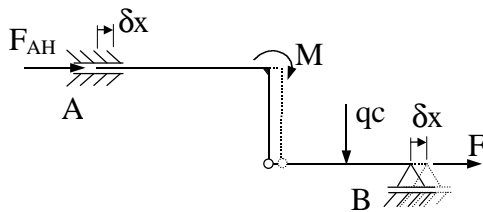
$$\mathbf{dW} = M_A \mathbf{dj} + M \mathbf{dj} + qc \mathbf{dy} - F \mathbf{dx}$$

$$dW = \left( M_A + M + \frac{1}{2}aqc - bF \right) dj$$

Da die virtuelle Verrückung  $dj \neq 0$  gilt

$$M_A = bF - M - \frac{1}{2}aqc$$

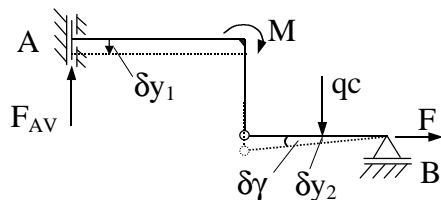
Bestimmung von  $F_{AH}$ :



$$dW = F_{AH} dx + F dx = (F_{AH} + F) dx = 0$$

$$F_{AH} = -F$$

Bestimmung von  $F_{AV}$ :



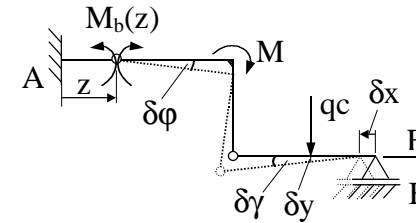
$$dy_1 = c dg \quad , \quad dy_2 = \frac{1}{2} c dg = \frac{1}{2} dy_1$$

$$dW = -F_{AV} dy_1 + qc dy_2$$

$$dW = \left( -F_{AV} + \frac{1}{2} qc \right) dy_1 = 0$$

$$F_{AV} = \frac{1}{2} qc$$

Bestimmung des Biegemomentenverlaufes :



$$dx = b dj$$

$$(a - z) dj = c dg$$

$$dy = \frac{1}{2} c dg = \frac{1}{2} (a - z) dj$$

$$dW = M_b(z) dj + M dj + qc dy - F dx$$

$$dW = \left( M_b(z) + M + \frac{1}{2} (a - z) qc - bF \right) dj = 0$$

$$M_b(z) = bF - \frac{1}{2} qc (a - z) - M$$



## A 1 Schwerpunkt

### A 1.1 Definition des Schwerpunktes

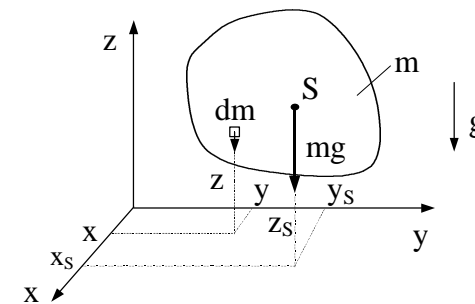
Auf jedes Massenelement eines Körpers wirkt im erdnahen Bereich infolge der Gravitation eine Gewichtskraft in Richtung Erdmittelpunkt. Ist der Körper gegenüber der Erde klein, so verlaufen alle Kraftwirkungslinien parallel. Die Gesamtwirkung dieses parallelen Kraftsystems kann durch die resultierende Kraft (Gewichtskraft) auf einer bestimmten Wirkungslinie ersetzt werden. Wird der Körper im Schwerfeld gedreht, so ändert sich die resultierende Kraft nicht, aber die Wirkungslinie nimmt relativ zum Körper eine andere Lage ein. Dabei existiert ein ausgezeichneteter Körperpunkt, durch den für alle räumlichen Orientierungen des Körpers die jeweiligen Wirkungslinien der resultierenden Gewichtskraft verlaufen. Diesen Schnittpunkt der Wirkungslinien nennt man Schwerpunkt des Körpers.

Technische Körper dürfen relativ zur Erde als sehr klein angesehen werden. Die Gravitationswirkung ist dann über die Höhe des Körpers konstant und der Schwerpunkt fällt mit dem **Massenmittelpunkt** des Körpers zusammen.

Der Schwerpunkt eines Körpers spielt in der Mechanik eine zentrale Rolle. Die räumlich verteilte Gewichtskraft kann äquivalent durch die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft berücksichtigt werden. Beim beschleunigten Körper greift die resultierende Massenbeschleunigungskraft ebenfalls im Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) an.

Wird ein Körper an einem Faden aufgehängt, so stellt sich die Gleichgewichtslage so ein, daß der Schwerpunkt unterhalb des Aufhängepunktes der verlängerten Fadenachse liegt. Wählt man drei verschiedene Aufhängepunkte, so kann der Schwerpunkt **experimentell** aus dem gemeinsamen Schnittpunkt der verlängerten Fadenachsen ermittelt werden.

### A 1.2 Berechnung des Körperschwerpunktes



Die resultierende Gewichtskraft ergibt sich aus

$$F_G = \int_{(m)} g dm = g \int_{(m)} dm = mg$$

Das Integral erstreckt sich über alle Massenelemente und damit über alle drei Koordinatenachsen. Die Lage der Resultierenden erhält man aus den Äquivalenzbeziehungen

$$x_s mg = g \int_{(m)} x dm$$

$$y_s mg = g \int_{(m)} y dm$$

Werden Koordinatensystem einschließlich Körper um die x- oder y-Achse um  $90^\circ$  gedreht, so erhält man analog

$$z_s mg = g \int_{(m)} z dm$$

Die letzten drei Integrale werden auch als **statische Momente** bezüglich der Koordinatenachsen bezeichnet.

Aus den statischen Momenten ergeben sich folgende Berechnungsgleichungen für den Körperschwerpunkt (Massenmittelpunkt) mit

$m$  = Gesamtmasse des Körpers

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{(m)} x dm, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{(m)} y dm, \quad z_s = \frac{1}{m} \int_{(m)} z dm$$

Besteht der Körper aus **homogenem Material** mit der **Dichte  $r = konst.$** , so fällt der Schwerpunkt mit dem Volumenmittelpunkt zusammen. Es gilt

$V =$  Gesamtvolumen des Körpers

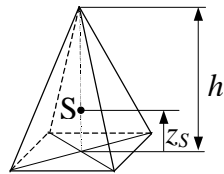
$$x_S = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV$$

**Hinweis:**

▮ Besitzt ein Körper eine (mehrere) Symmetrieebene(n), so liegt der Schwerpunkt innerhalb dieser Ebene(n).

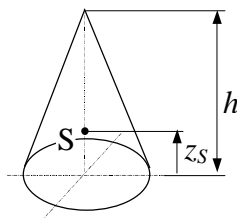
### Lage der Schwerpunkte einfacher homogener Körper

Pyramide



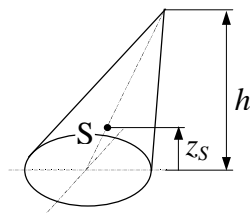
$$z_S = \frac{h}{4}$$

Kegel



$$z_S = \frac{h}{4}$$

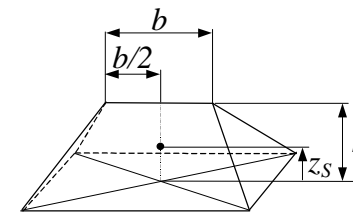
schiefes Kegel  
(schiefe Pyramide)



$$z_S = \frac{h}{4}$$

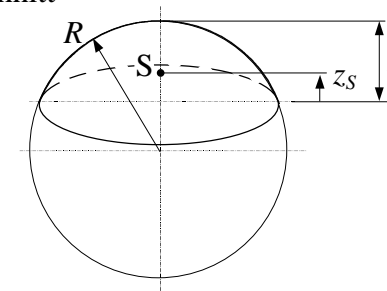
Schwerpunkt liegt auf der Geraden zwischen dem Flächenschwerpunkt der Grundfläche und der Spitze

Keil



$$z_S = \frac{h}{4}$$

Kugelabschnitt



$$z_S = \frac{4R - h}{3} \frac{h}{4}$$

Halbkugel  $h = R$   $z_S = \frac{3}{8}R$

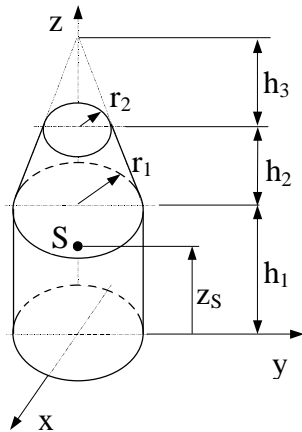
### A 1.3 Schwerpunkt von zusammengesetzten Körpern

Kann ein Körper aus mehreren einfachen Körpern mit jeweils bekannter Schwerpunktlage zusammengesetzt werden, so lässt sich der Gesamtschwerpunkt nach folgenden Beziehungen berechnen

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$x_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_{Si}, \quad y_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_{Si}, \quad z_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_{Si}$$

**Beispiel:** Zylinder mit angesetztem Kegelsumpf aus homogenem Material



Geg.:  $r$

$$r_1 = r, r_2 = \frac{1}{2}r$$

$$h_1 = h, h_2 = \frac{1}{2}h$$

Ges.: Lage des  
Gesamtschwerpunktes

Der Gesamtschwerpunkt liegt wie die Teilschwerpunkte auf der Symmetrielinie. Es ist damit nur die z-Koordinate zu berechnen. Für einen Zylinder und einen Kegel sind die Schwerpunktlagen bekannt.

Der zusammengesetzte Körper lässt sich aus folgenden Teilkörpern aufbauen:

Teilkörper	Typ	Radius	Höhe	Vorzeichen
1	Zylinder	$r_1$	$h_1$	+
2	Kegel	$r_1$	$h_2 + h_3$	+
3	Kegel	$r_2$	$h_3$	-

Als Teilkörper 2 wird zunächst ein Vollkegel definiert, von dem schließlich die Kegelspitze als Teilkörper 3 wieder abgezogen wird.

$$V_Z = r_Z^2 \rho h_Z, z_S = \frac{1}{2} h_Z$$

$$V_K = r_K^2 \rho \frac{h_K}{3}, z_S = \frac{1}{4} h_K$$

Die Höhe  $h_3$  der Kegelspitze ergibt sich nach dem Strahlensatz

$$\frac{h_3}{r_2} = \frac{h_2 + h_3}{r_1}$$

$$h_3 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} h_2 = \frac{1}{2} h$$

$$h_2 + h_3 = h$$

i	$m_i$	$z_{Si}$	$m_i z_{Si}$
1	$\rho r r^2 h$	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{2} \rho r r^2 h^2$
2	$\frac{1}{3} \rho r r^2 h$	$h + \frac{1}{4} h = \frac{5}{4} h$	$\frac{5}{12} \rho r r^2 h^2$
3	$-\frac{1}{3} \rho r \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{h}{2}$ $= -\frac{1}{24} \rho r r^2 h$	$h + \frac{1}{2} h + \frac{1}{4} \frac{1}{2} h = \frac{13}{8} h$	$-\frac{13}{192} \rho r r^2 h^2$
$\Sigma$	$\frac{31}{24} \rho r r^2 h$		$\frac{163}{192} \rho r r^2 h^2$

$$z_S = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i z_{Si}$$

$$z_S = \frac{24}{31} \frac{163}{192} \frac{\rho r r^2 h^2}{\rho r r^2 h} = \frac{163}{248} h = 0,657 h$$

## A 1.4 Der Flächenschwerpunkt

Der Schwerpunkt einer Fläche lässt sich aus dem Grenzwert eines homogenen ebenen Körpers mit unendlich dünner Wandstärke ableiten. Der Schwerpunkt liegt innerhalb der Ebene und es sind nur zwei Koordinaten zu berechnen. Legt man in die Fläche die x- und y-Achsen, so gelten folgende Gleichungen für die Schwerpunktskoordinaten

$$A = \int_{(A)} dA$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA, \quad y_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA$$

Die Beziehungen

$$S_x = \int_{(A)} y dA \quad \text{statisches Flächenmoment} \\ \text{bezüglich der x-Achse}$$

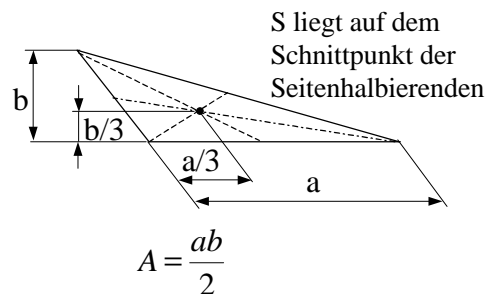
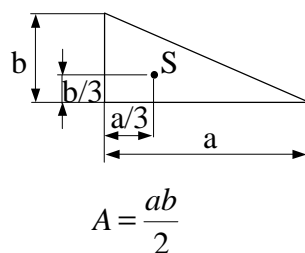
$$S_y = \int_{(A)} x dA \quad \text{bezüglich der y-Achse}$$

werden als **statische Flächenmomente** bezeichnet.

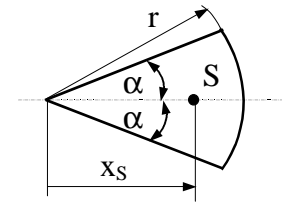
Existiert eine **Symmetrielinie**, so gibt es zu jedem Flächenelement mit positivem Abstand ein entsprechendes mit negativem Abstand zur Symmetrielinie und das statische Flächenmoment bezogen auf die Symmetrieachse wird Null. Der Flächenschwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse.

### Flächenschwerpunkte einfacher Flächen

Dreieck

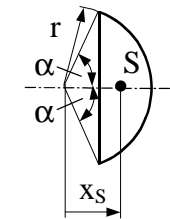


Kreis Sektor



$$x_S = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ A = r^2 \alpha$$

Kreisabschnitt



$$x_S = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \\ A = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

### Flächenschwerpunkt zusammengesetzter Flächen

Sind die Schwerpunktskoordinaten der Teilflächen bekannt, so ergibt sich der Flächenschwerpunkt der Gesamtfläche zu

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$x_S = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_{Si} A_i, \quad y_S = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n y_{Si} A_i$$

Bei einem Flächenausschnitt ist die entsprechende Teilfläche mit negativem Flächeninhalt zu berücksichtigen.

## A 1.5 Der Linienschwerpunkt

Betrachtet man einen homogenen mit Masse belegten dünnen Draht konstanten Querschnitts, so kann aus den Formeln für den Körperschwerpunkt nach dem Herauskürzen konstanter Größen die Berechnungsformel für den Linienschwerpunkt einer räumlich gekrümmten Kurve abgeleitet werden.

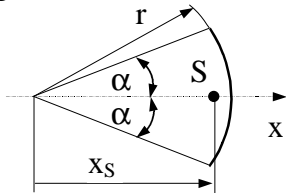
$$l = \int_{(s)} ds$$

$$x_S = \frac{1}{l} \int_{(s)} x ds, \quad y_S = \frac{1}{l} \int_{(s)} y ds, \quad z_S = \frac{1}{l} \int_{(s)} z ds$$

Bei vorhandener Symmetrie liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrielinie.

### Schwerpunkte einfacher ebener Linien

Kreisbogen



$$x_S = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Halbkreis

$$x_S = \frac{2}{\pi} r$$

### Der Linienschwerpunkt von zusammengesetzten Linien

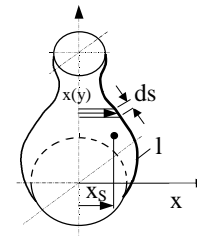
$$l = \sum_{i=1}^n l_i$$

$$x_S = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n x_{Si} l_i, \quad y_S = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n y_{Si} l_i, \quad z_S = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n z_{Si} l_i$$

## A 1.6 Die Guldin'schen Sätze

Bei Rotationskörpern können deren Oberfläche und Volumen nach den Sätzen von Guldin (Schweizer Mathematiker 1577-1643) berechnet werden.

### 1. Satz von Guldin

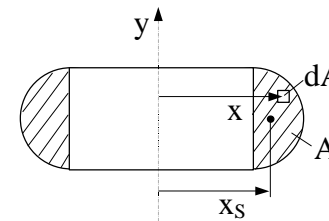


Die **Oberfläche** (ohne Grund- und Deckfläche) eines Rotationskörpers ergibt sich aus der Länge und der Schwerpunktskoordinate seiner erzeugenden Mantellinie

$$A = 2\pi \int_{(s)} x(y) ds$$

$$A = 2\pi x_S l$$

### 2. Satz von Guldin



Das **Volumen** eines Rotationskörpers ergibt sich aus dem Flächeninhalt und der Schwerpunktslage der erzeugenden Fläche

$$V = 2\pi \int_{(A)} x dA$$

$$V = 2\pi x_S A$$

## A 2 Haftung und Reibung zwischen festen Körpern

### A 2.1 Einführung

Berühren sich zwei feste Körper, so wird an der gemeinsamen Berührungsfläche von einem Körper auf den anderen eine Druckkraft übertragen. Sind beide Oberflächen **ideal glatt**, so kann diese Kraft nur normal zur gemeinsamen Tangentialebene gerichtet sein. Dieser ideale Grenzfall gilt stets nur näherungsweise. An realen Oberflächen (**raue Auflage**) kann immer auch eine mehr oder weniger große Kraftkomponente innerhalb der Tangentialebene übertragen werden. Die maximale Größe der tangentialen Kraftkomponente hängt von der mikroskopischen Oberflächenbeschaffenheit und von einem eventuellen Schmierstoff ab.

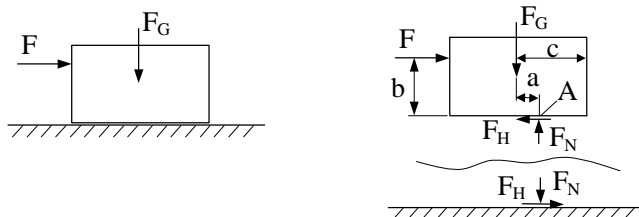
Es gibt zur Zeit keine geeignete physikalisch begründete Theorie zur Beschreibung dieses Effektes, daher stützt man sich auf experimentell ermittelte empirische Gesetze. Dabei ist grundlegend zu unterscheiden, ob beide Körper sich relativ zueinander bewegen oder nicht.

Der Kontakt zwischen den Körpern erstreckt sich im allgemeinen über eine Fläche und nicht nur in einem Punkt. Es ist zulässig, die über die Fläche verteilte Kraft durch ihre Resultierende zu beschreiben.

### A 2.2 Haftung und Reibung bei ebenen Berührungsflächen

#### Berührung ohne Relativbewegung (Haftung)

An folgendem Beispiel soll der Sachverhalt erläutert werden.



Die Kraftwirkung an der „rauen“ Berührungsstelle des Körpers mit dem Fundament wird über eine resultierende Normalkraft  $F_N$  und die resultierende Tangentialkraft  $F_H$  beschrieben.

$F_H$  wird als Haftreibungskraft oder Haftkraft bezeichnet.

Am „frei“ geschnittenen ruhenden Körper können folgende Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden

$$\begin{aligned} \rightarrow : F - F_H &= 0 & F_H &= F \\ \uparrow : F_N - F_G &= 0 & F_N &= F_G \\ \curvearrowright A : Fb - F_G a &= 0 & a &= \frac{F}{F_G} b \end{aligned}$$

Die Erfahrung zeigt, dass bei wachsender Kraft  $F$  der Körper auf einmal anfängt zu rutschen, oder er kippt über die Kante  $A$  mit  $a = c$ .

Die Haftkraft  $F_H$  kann nur bis zu einem Maximalwert  $F_{H\max}$  ansteigen. Dieser Maximalwert ist der Normalkraft direkt proportional

$$|F_H| \leq F_{H\max} = m_0 F_N$$

$\mu_0$  heißt **Haftreibungszahl** und ist von der Rauigkeit der Oberflächen und den Adhäsionsverhältnissen abhängig

Die Haftkraft  $F_H$  ist eine **Reaktionskraft**, sie kann nur aus Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Sie kann aber obigen Grenzwert nicht überschreiten. Es ist stets zu überprüfen, ob die obige Ungleichung erfüllt ist. Wenn nicht, so trifft die Annahme der Haftung nicht zu, der Körper bewegt sich.

#### Berührung mit Relativbewegung (Gleitreibung)

Bei Relativbewegung stellt die Tangentialkraft eine Widerstandskraft dar, die der Relativbewegung stets entgegen gerichtet ist. Die Widerstandskraft wird als **Reibkraft** oder **Gleitreibungskraft**  $F_R$  bezeichnet. Sie ist in erster Näherung unabhängig von der Größe der Relativgeschwindigkeit.

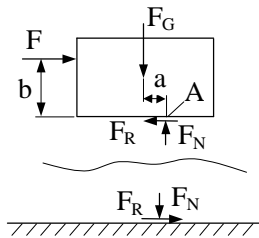
Es gilt das **Coulomb'sche Gesetz**

$$F_R = m F_N, \quad m < m_0$$

(de Coulomb, 1736-1806,  
franz. Physiker und Ingenieur)

$\mu$  heißt **Gleitreibungszahl**

- ist annähernd unabhängig von der Relativgeschwindigkeit
- ist abhängig von der Rauigkeit der Oberfläche und den Adhäsionsverhältnissen
- ist für jede Werkstoffpaarung und in Abhängigkeit eventueller Schmierung experimentell zu bestimmen



Die Gleichgewichtsbedingung  $\rightarrow$ : muß jetzt nicht erfüllt sein.  
Für  $F > F_R$  wird der Körper beschleunigt und für  $F < F_R$  verzögert sich die Bewegung bis zum Stillstand

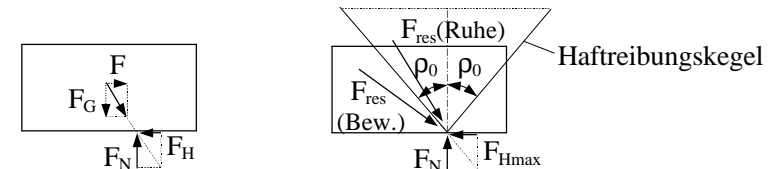
Die **Reibkraft** ist im Gegensatz zur Haftkraft eine **eingeprägte Kraft**, sie ist aus dem obigen physikalischen Gesetz berechenbar.

**Richtwerte für m und  $m_0$ :**

Werkstoff	Gleitreibungszahl $\mu$		Haftreibungszahl $\mu_0$	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl / Stahl geschliffen	0,09...0,14	0,05	0,14...0,16	0,11
Holz / Holz	0,2...0,4	0,08	0,4...0,6	0,16
Gummi / Asphalt	0,5...0,6		0,7...0,8	
Metall / Holz	0,4...0,5	0,10	0,6...0,7	0,11

Der Haftreibungskegel

Der Haftreibungskegel veranschaulicht die Verhältnisse bei Haftung und dient zur grafischen Lösung derartiger Aufgaben.



Solange die Resultierende aller eingepägten Kräfte  $F_{res}$  innerhalb des Haftreibungskegels liegt, gilt

$$F_H < F_{H \max} = m_0 F_N$$

und es herrscht Gleichgewicht, der Körper haftet. Liegt die Resultierende außerhalb des Haftreibungskegels, so rutscht der Körper weg.

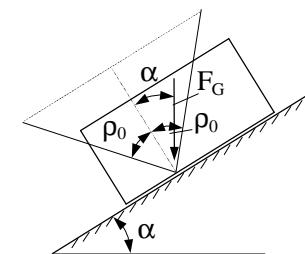
Halber Öffnungswinkel des Haftreibungskegels  $\rho_0$

$$\tan r_0 = \frac{F_{H \max}}{F_N} = \frac{m_0 F_N}{F_N}$$

$$\tan r_0 = m_0$$

**Beispiele zur Haftung**

Körper auf einer schiefen Ebene unter Eigengewicht

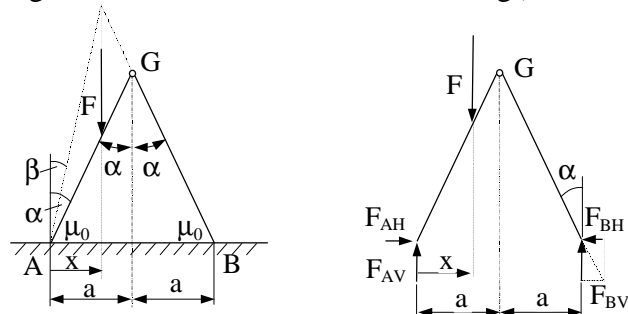


Bedingung für Nichtrutschen

$$\alpha \leq \rho_0$$

Bockleiter ohne Sicherheitskette

(Eigengewicht der Leiter wird vernachlässigt)



Die unbelastete Leiter wirkt wie eine Pendelstütze.

$$\text{Es gilt } \tan a = \frac{F_{BH}}{F_{BV}}$$

Damit können die Lagerkräfte ohne Schnitt durch G berechnet werden.

$$\rightarrow: F_{AH} - F_{BH} = 0 \quad F_{AH} = F_{BH} = F_{BV} \tan a$$

$$\widehat{A}: Fx - F_{BV} 2a = 0$$

$$\widehat{B}: F_{AV} 2a - F(2a - x) = 0$$

$$F_{AV} = \left(1 - \frac{x}{2a}\right) F \quad F_{BV} = \frac{x}{2a} F$$

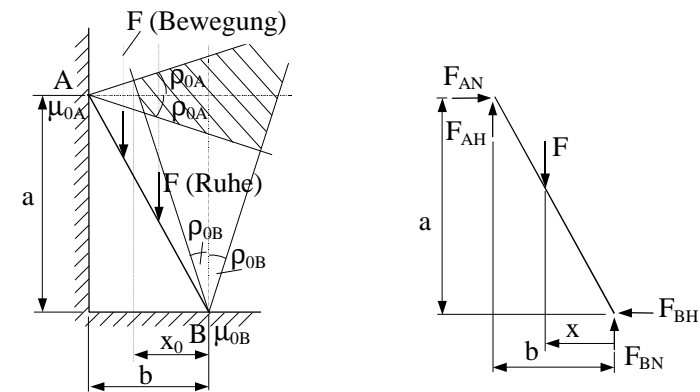
Da die Leiter nicht rutschen soll, müssen gelten

$$F_{AH} \leq m_0 F_{AV} = m_0 \left(1 - \frac{x}{2a}\right) F$$

$$F_{BH} \leq m_0 F_{BV} = m_0 \frac{x}{2a} F$$

Mit  $F_{BH} = \tan a F_{BV}$  gilt  $\tan a \leq m_0$ , sonst rutscht die Leiter bei BFür  $x < a$  und  $m_{0A} = m_{0B} = m_0$  besteht keine Rutschgefahr bei A.Für  $x = a$  sind die Punkte A und B gleich gefährdet.Für  $m_{0A} < m_{0B}$  besteht keine Rutschgefahr bei A für  $\tan b \leq m_{0A}$ .

Aus Sicherheitsgründen muß jede Bockleiter mit einer Sicherheitskette versehen sein, die das Wegrutschen verhindert.

Angelehnte Leiter

$$\widehat{A}: F(b - x) - F_{BN} b + F_{BH} a = 0$$

$$\widehat{B}: F_{AN} a + F_{AH} b - Fx = 0$$

$$\rightarrow: F_{AN} - F_{BH} = 0$$

Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Innerhalb der Statik kann nur der Grenzfall des Rutschbeginns berechnet werden. Das Rutschen der Leiter kann nur bei A und B gleichzeitig einsetzen.

Für diesen Grenzfall bei  $x = x_0$  gilt

$$F_{AH} = F_{AH \max} = m_{0A} F_{AN}$$

$$F_{BH} = F_{BH \max} = m_{0B} F_{BN}$$

Damit lauten obige Gleichgewichtsbedingungen

$$F(b - x_0) - F_{BN} b + m_{0B} F_{BN} a = 0$$

$$F_{AN} a + m_{0A} F_{AN} b - Fx_0 = 0$$

$$F_{AN} - m_{0B} F_{BN} = 0$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$x_0 = \frac{m_{0B}(a + m_{0A} b)}{1 + m_{0A} m_{0B}}$$

Wird die Leiter nicht zusätzlich verankert, so darf sie nur bis unterhalb der Höhe  $h_0 = \frac{a}{b} x_0$  bestiegen werden.



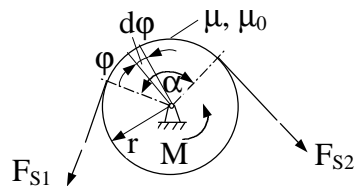
### A 2.3 Seilhaftung und Seilreibung

Sind die Berührungsflächen zwischen den beiden Körpern nicht punktförmig oder eben, so muß jede differentielle Teilfläche wie im Abschnitt A 2.2 behandelt werden, und es sind alle Anteile der Kräfte durch Integration aufzusummieren.

Wird ein Seil, ein Riemen oder ein Band um einen Zylinder (Seil- oder Riemenscheibe) gelegt, so sind wieder die Betriebsarten

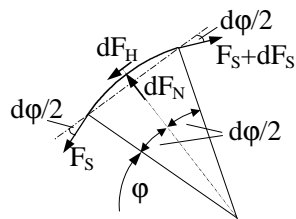
- Seil haftet ohne Relativbewegung
- Seil rutscht über die Scheibe

zu unterscheiden.



Für den Fall der Haftung läßt sich das Verhältnis der Kräfte  $F_{S1}$  zu  $F_{S2}$  nur aus Gleichgewichtsbetrachtungen ableiten, es ist über einen weiten Bereich variabel. Es interessiert der Grenzfall, für den das Seil von der Haftung ins Rutschen übergeht.

Betrachtungen am Seilelement:



Für den Grenzfall gilt:  $dF_H = dF_{H \max} = m_0 dF_N$

Für das Gleiten gilt:  $dF_H = m dF_N$

$$\nearrow: (F_S + dF_S) \cos \frac{dj}{2} - dF_H - F_S \cos \frac{dj}{2} = 0$$

$$\searrow: dF_N - F_S \sin \frac{dj}{2} - (F_S + dF_S) \sin \frac{dj}{2} = 0$$

Für  $d\varphi \ll 1$  folgt  $\cos \frac{dj}{2} = 1$ ,  $\sin \frac{dj}{2} = \frac{dj}{2}$

Damit  $dF_S = dF_H$

$$dF_N = F_S dj + dF_S \frac{dj}{2} \approx 0$$

Grenzfall:  $dF_S = m_0 dF_N = m_0 F_S dj$

Gleiten:  $dF_S = m dF_N = m F_S dj$

Nach Trennung der Veränderlichen  $F_S$  und  $\varphi$  werden beide Seiten integriert. Für den Grenzfall folgt:

$$\int \frac{dF_S}{F_S} = m_0 \int dj$$

$$\ln F_S = m_0 j + C_1$$

$$e^{\ln F_S} = F_S = e^{m_0 j + C_1} = e^{C_1} e^{m_0 j} = C e^{m_0 j}$$

$$F_S(j) = C e^{m_0 j} \quad \text{Gleichung nach Euler und Eytelwein}$$

Ist die Seilkraft an einem Seilende bekannt, so läßt sich die Integrationskonstante bestimmen.

Für  $F_S(j=0) = F_{S1}$  folgt  $C = F_{S1}$

$$F_S(j) = F_{S1} e^{m_0 j}$$

bzw.  $F_{S2} = F_S(j=a) = F_{S1} e^{m_0 a}$

Erreicht  $F_{S2}$  diesen Wert, so beginnt das Seil zu rutschen.

Für den Fall des **Gleitens** gilt

$$F_{S2} = F_{S1} e^{m a}$$

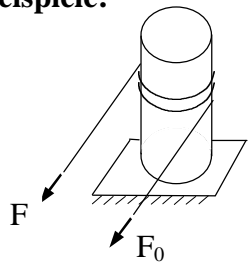
**Haftung** ist für  $F_{S2} > F_{S1}$  und für  $F_{S1} > F_{S2}$  gegeben, solange folgende **Grenzwerte** nicht überschritten werden:

$$F_{S1} \leq F_{S2} e^{m_0 a}$$

$$F_{S2} \leq F_{S1} e^{m_0 a}$$

**Hinweis:** Der Winkel  $\alpha$  ist in Bogenmaß einzusetzen.

**Beispiele:**

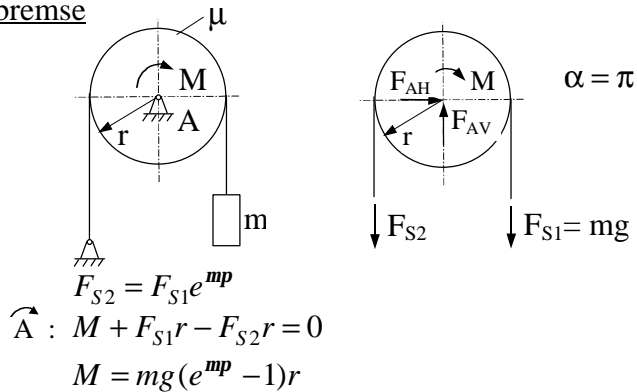


Zum Halten eines Bootes wird ein Seil mit 2,5 Umschlingungen um einen Poller gelegt.

Den wievielfachen Wert kann F gegenüber  $F_0$  annehmen, wenn  $\mu_0 = 0,4$  beträgt ?

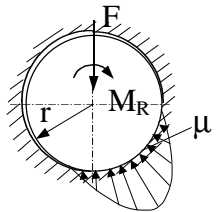
$$F \leq F_0 e^{0,4 \cdot 2,5 \cdot 2\pi} = 535,49 F_0$$

**Seilbremse**



Durch Veränderung der angehängten Gewichte kann das Bremsmoment eingestellt werden.

**A 2.4 Zapfenreibung**



$p(\varphi)$  bei rot. Welle

Der Wellenzapfen wird mit der Kraft F in die Lagerschale gedrückt. Da zwischen Zapfen und Lagerschale i.allg. nur ein geringes Lagerspiel besteht, tritt infolge der auftretenden elastischen Verformung von Welle und Lager eine flächenhafte Berührung auf.

Die Bestimmung der Verteilung der Flächenlast über den Umfang ist eine komplizierte Aufgabe. Daher wird auf die theoretische Bestimmung des Lagerreibmomentes i.allg. verzichtet. Zur

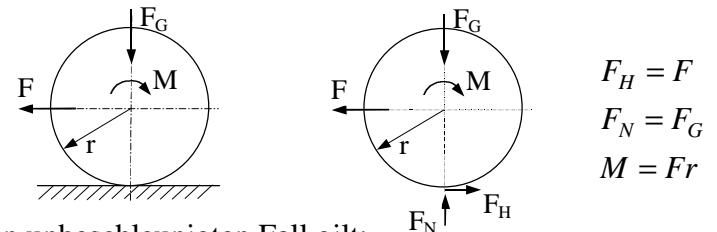
näherungsweise Angabe des Reibmomentes geht man von experimentell abgesicherten Werten aus.

Es gilt

$$M_R = m_1 F r \quad m_1 = \text{Zapfenreibungszahl}$$

mit  $m_1 > m$  für gleiche Werkstoffpaarung wie bei ebener Berührungsfläche.

**A 2.5 Haftung am rollendem Rad**



Für den unbeschleunigten Fall gilt:

Bedingung für Rollen ohne Gleitung

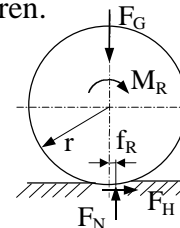
$$F \leq m_0 F_N$$

max. Antriebsmoment

$$M \leq m_0 F_N r$$

**A 2.6 Rollreibung (Rollwiderstand)**

Bei rollender Bewegung zylindrischer oder kugelförmiger Körper wirkt ein Widerstand, der jedoch wesentlich kleiner ist als bei gleitender Bewegung. Der Widerstand wird Rollreibung genannt. Er ist aus der Verformung von Rollkörper (Rad) und Unterlage zu erklären.



Die Reaktionskraft  $F_N$  wird durch die Verformung um  $f_R$  in Rollrichtung verschoben. Zur Aufrechterhaltung der Bewegung ist das Rollreibungsmoment  $M_R = F_N f_R$  erforderlich.

Richtwerte für  $f_R$  : Eisenbahnräder  $f_R \approx 0,5$  mm

Wälzlager  $f_R \approx 0,005 \dots 0,01$  mm