1 Varianten der Integraltransformationen

Signalart	diskret	kontinuierlich
periodisch	Diskrete Fourier-Transformation	Fourierreihe
impulsförmig	"Fourierreihe mit $T = Impulsdauer$"	Fourierintegral
kausal	Z-Transformation	Laplace-Transformation

2 Signale und Systeme

Linearität	**Zeitinvarianz**
$S(x1 + x2) = S(x1) + S(x2)$ $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$	$S(x(t - t_0) = S(x) \cdot x(t - t_0)$

2.1 Lineare Systeme

Basissignale

- Lineare Systeme sind durch die Antworten auf die Basissignale bestimmt.
- Basissignale müssen linear unabhängig voneinander sein, d.h. ein Basissignal darf nicht durch **Linearkombination** anderer Basissignale darstellbar sein
- Alle möglichen Eingangs-Funktionen müssen durch eine Linearkombination der Basissignale dargestellt werden können. $\Rightarrow$ **Periode des Eingangssignals = Anzahl Basissignale**

Berechnung der Systemantwort aufgrund der Basissignale und der Anregung

1. Eingangssignal x als Linearkombination der Basisvektoren darstellen $\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem
$\Rightarrow x = r \cdot a + s \cdot b + t \cdot c$ (x = Eingangssignal; a, b, c = Basisvektoren; r, s, t = Linearkombinationsparameter)
2. Systemantwort $y = r \cdot S(a) + s \cdot S(b) + t \cdot S(c)$; ($S(a)$ = Systemantwort der Basis a)

2.2 Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

LTI-Systeme sind durch ihre Impulsantwort h vollständig bestimmt

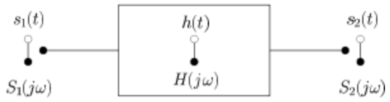
Berechnung der Systemantwort von diskreten LTI-Systemen

$y = x * h$ (y = Systemantwort; x = Eingangssignal; h = Impulsantwort)

Berechnung der Systemantwort von kontinuierlichen LTI-Systemen

$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet S_2(s) = H(s)S_1(s)$$

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet H(s)$$



2.3 Faltung

$\boxed{y = x * h = h * x}$

h =Impulsantwort des Systems

diskret

$$\boxed{y(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(i-k) \cdot h(k)}$$

grafische Interpretation:
1. einfacheres Signal an der Y-Achse spiegeln
2. Verschiebung um i nach rechts
3. Skalarprodukt der beiden Signale bilden

kontinuierlich

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau}$$

grafische Interpretation:
1. einfacheres Signal an der Y-Achse spiegeln
2. Verschiebung um t nach rechts
3. Multiplikation und Integration der beiden Signale

3 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$\boxed{s(h) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{jhk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{a}_k \cos\left(hk\frac{2\pi}{N}\right) + \hat{b}_k \sin\left(hk\frac{2\pi}{N}\right)\right]} \qquad N = \text{Periodenanzahl}$$

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} s(h) e^{-jhk\frac{2\pi}{N}} = \hat{a}_k - j\hat{b}_k \qquad \hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} s(h)\cos\left(hk\frac{2\pi}{N}\right) = Re(\hat{c}_k) \qquad \hat{b}_k = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} s(h)\sin\left(hk\frac{2\pi}{N}\right) = -Im(\hat{c}_k)$$

3.1 Berechnung mit Matrizen

Transformation

1. Periode N des Signalvektors $\vec{s} = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(N-1) \end{bmatrix}$ bestimmen

2. Einheitswurzel w berechnen: $w = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

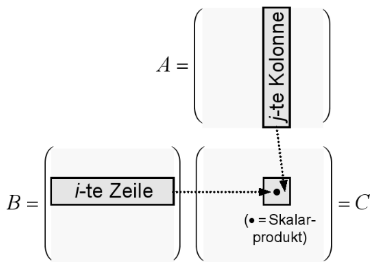
3. Matrix W berechnen: $W = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w^0 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$

4. Matrix V berechnen: $V = \overline{W}$

5. Koeffizienten $\vec{c}$ berechnen: $\vec{c} = \frac{1}{N} V \vec{s}$

Rücktransformation

1. Matrix W (wie bei der Transformation beschrieben) berechnen
2. Signalvektor $\vec{s}$ berechnen: $\vec{s} = W\vec{c}$



3.2 Matrizenmultiplikation

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 4\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-2)\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + (-3)\cdot 4 + (-1)\cdot 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.25 \\ -3.75 \end{bmatrix}$$

3.3 Einige W-Matrizen

N = 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

N = 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

N = 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

N = 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

N = 8

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & j & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j & j & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \end{bmatrix}$$

4 Fourierreihe

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_1 t}} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k \cdot e^{jk\omega_1 t} + \overline{c_k} \cdot e^{-jk\omega_1 t}\right)}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\right]} = \boxed{\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\boxed{c_k = \overline{c_{-k}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt} \qquad \boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)dt}$$

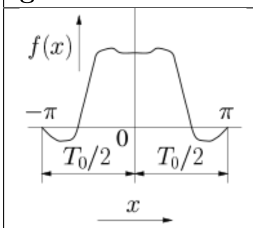
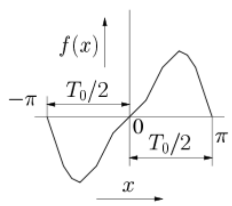
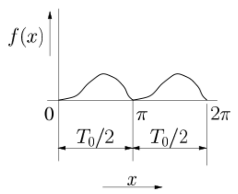
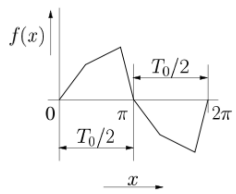
$a_0 = c_0 = A_0$ sind *Konstanten*, ω_1 ist die *Grundkreisfrequenz*, a_k und b_k sind die *reellen Koeffizienten*, c_k ist der *komplexe Koeffizient*, A_k ist die *Amplitude* und φ_k ist die *Phase*.

$a_k = c_k + \bar{c_k} = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = A_k \cos(\varphi_k)$	$b_k = j(c_k + \bar{c_k}) = -2\,\mathrm{Im}(c_k) = -A_k \sin(\varphi_k)$
$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} F(jk\omega)$	$c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$
$A_k = 2\lvert c_k \rvert = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	$\varphi_k = \arg(c_k)$

Berechnung von φ_k aus a_k und b_k

$a_k > 0:$	$\varphi_k = -\arctan(\frac{b_k}{a_k})$	$a_k < 0:$	$\varphi_k = -\arctan(\frac{b_k}{a_k}) + \pi$
$a_k = 0 \wedge b_k > 0:$	$\varphi_k = -\frac{\pi}{2}$	$a_k = 0 \wedge b_k < 0:$	$\varphi_k = \frac{\pi}{2}$
$a_k = 0 \wedge b_k = 0:$	$\varphi_k =$ nicht definiert		

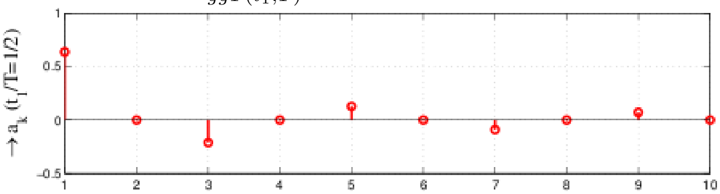
4.1 Symmetrie

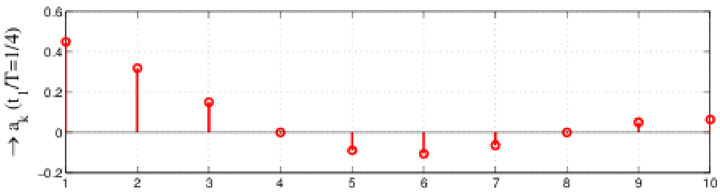
gerade Funktion	**ungerade Funktion**	**Halbperiode 1**	**Halbperiode 2**
			
$f(-t) = f(t)$ $b_k = 0$ $a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t)dt$	$f(-t) = -f(t)$ $a_k = 0$ $b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t)dt$	$f(t) = f(t+\pi)$ $a_{2k+1} = 0$ $b_{2k+1} = 0$	$f(t) = -f(t+\pi)$ $a_{2k} = 0$ $b_{2k} = 0$

4.2 Rechtecksignale

$$a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-t_1/2}^{t_1/2} A\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2AT}{2\pi Tk}\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\Bigg|_{-t_1/2}^{t_1/2} = \frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi t_1}{T}k\right)$$

Für Verhältnisse $\frac{T}{ggT(t_1,T)} = n \in \mathbb{N}$ verschwinden die n. Harmonische und deren Vielfache.





5 Fourier-Integral / Fourier-Transformation

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega} = \boxed{\int_{0}^{\infty}[a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)]d\omega} = \boxed{\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))]d\omega}$$

$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad \boxed{a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \quad \text{und} \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt}$$

$$a(\omega) = \frac{Re[F(j\omega)]}{\pi} \quad b(\omega) = -\frac{Im[F(j\omega)]}{\pi} \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi}|F(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = arg[F(j\omega)] \quad F(j\omega) = \pi[a(\omega) - jb(\omega)] = \pi A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

5.1 Symmetrie

Es gelten die gleichen Symmetrien wie bei der Fourierreihe.

5.2 Eigenschaften

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha \cdot F(j\omega) + \beta \cdot G(j\omega)$
Zeitumkehrung (Spiegelung an der Y-Achse)	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(-j\omega) = F^*(jw)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(j(\omega \mp \omega_0))$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (j\omega)^n F(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(j\omega)}{j\omega} + F(0)\pi\delta(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j^n \frac{\partial F(j\omega)}{\partial\omega^n}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(j\omega) \cdot G(j\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * G(j\omega)$
Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(j\omega)$ $F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \cdot f(-j\omega)$
Modulation	$\cos(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot [F(j(\omega-\alpha)) + F(j(\omega+\alpha))]$ $\sin(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2j} \cdot [F(j(\omega-\alpha)) - F(j(\omega+\alpha))]$
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$
Bessel's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\omega)\rvert^2 d\omega$
Anfangswerte	$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega \qquad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$
∞ lange Folge von δ-Impulsen	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{t_0}\delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$

6 Laplace-Transformation

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt} \qquad s = \sigma + j\omega$$

- Definitionsbereich nur für kausale Systeme $t \geq 0$
- Integrierbar über das Intervall $(0, \infty)$
- Wachstum kleiner als der von eienr Exponentialfunktion
- Gegenüber $j\omega$ bei der Fourier-Transformation ist bei der Laplace-Transformation s verallgemeinert zu $s = \sigma + j\omega$. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ durch die Laplace-Transformation $F(s)$ ausgedrückt werden kann.

6.1 Eigenschaften

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \cdot G(s)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi)G(s-\xi)d\xi$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0+)$
Ableitungen im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}\frac{\partial f(0+)}{\partial t} - \ldots - s^0 \frac{\partial^{n-1} f(0+)}{\partial t^{n-1}}$
Multiplikation mit t	$t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-\partial F(s)}{\partial s}$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n}$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)e^{\pm t_0 s}$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t)e^{\mp \alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet F(s \pm \alpha)$
Integration	$\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$
Anfangswert	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$, wenn $\lim_{t\to 0} f(t)$ existiert.
Endwert	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, wenn $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert.

6.2 Rücktransformation

6.2.1 Vorgehen

1. Kürzen oder vereinfachen
2. Partialbruchzerlegung falls nötig
3. Rücktransformation mittels Tabelle
4. $h(t)$ _nicht_ < 0

6.3 Lösung linearer Differentialgleichungen

7 Diverses

7.1 Partialbruchzerlegung

$f(x) = \dfrac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} \Rightarrow$ Nenner faktorisieren mit Hornerschema, Binom, etc. $\Rightarrow x^3+4x^2-11x-30 = (x+2)(x^2+2x-15) = (x+2)(x+5)(x-3)$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5)+B(x-3)(x+5)+C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{array}{l} x_1 = 3: \ -9+60+149 = A\cdot 5\cdot 8 \ \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2: \ -4-40+149 = B(-5)\cdot 3 \ \Rightarrow B = -7 \\ x_3 = -5: \ -25-100+149 = C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{array} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:

$$f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

7.2 Hornerschema

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	b_1x_1	b_0x_1
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden!!)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

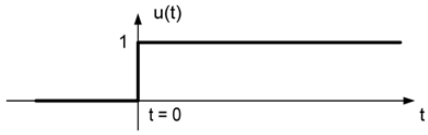
Beispiel:
$f(x) = x^3 - 67x - 126$

	1	0	-67	-126
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$
	1	-2	-63	$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	b_2	b_1	b_0	

$\Rightarrow f(x) = (x-x_1)(b_2x^2+b_1x+b_0) = (x+2)(x^2-2x-63)$

7.3 Schrittfunktion - unit step

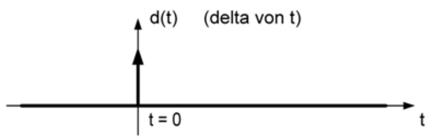
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}\text{(praxis) oder undef. (math.)} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



7.4 Impulsfunktion - dirac delta function

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$



8 Wichtige Formeln

$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$

8.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0 °	0	0	1	0
30 °	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45 °	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60 °	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90 °	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120 °	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135 °	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150 °	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180 °	π	0	-1
210 °	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225 °	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240 °	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270 °	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300 °	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315 °	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330 °	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.2 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

8.3 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$

$\sin(\pi - a) = \sin(a)$

$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$

$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

8.4 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

8.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

8.6 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

8.7 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

8.8 Diverses

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

9 Integralrechnung

Partielle Integration: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

9.1 Einige wichtige Integrale

$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$	$\int \sin(a+bx)dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)$
$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\sin(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\sin(bx+d) - b\cos(bx+d))$
$\int \cos(x)dx = \sin(x)$	$\int \cos(a+bx)dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\cos(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\cos(bx+d) + b\sin(bx+d))$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
$\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$\int x^2e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$
$\int x^ne^{ax}dx = \frac{1}{a}x^ne^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$	

10 Differentialrechnung

10.1 Einige wichtige Differentiale

Funktion	**Ableitung**	**Funktion**	**Ableitung**
C (Konstante)	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x
e^{bx}	be^{bx}	a^x	$a^x\ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\ln[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$