1 Varianten der Integraltransformationen

Signalart	diskret	kontinuierlich
periodisch	Diskrete Fourier-Transformation	Fourierreihe
impulsförmig	"Fourierreihe mit $T = Impulsdauer$"	Fourierintegral
kausal	Z-Transformation	Laplace-Transformation

2 Signale und Systeme

Linearität	**Zeitinvarianz**
$\mathcal{L}(x1 + x2) = \mathcal{L}(x1) + \mathcal{L}(x2)$	$\mathcal{L}(x(t)) = y(t)$
$\mathcal{L}(c \cdot x) = c \cdot \mathcal{L}(x)$	$\mathcal{L}(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$

2.1 Amplitudengang

$$|H(\omega)| = \begin{cases} < 1 \text{ Dämpfung} \\ > 1 \text{ Verstärkung} \end{cases}$$

2.2 Lineare Systeme

Basissignale

- Lineare Systeme sind durch die Antworten auf die Basissignale bestimmt.
- Basissignale müssen linear unabhängig voneinander sein, d.h. ein Basissignal darf nicht durch **Linearkombination** anderer Basissignale darstellbar sein
- Alle möglichen Eingangs-Funktionen müssen durch eine Linearkombination der Basissignale dargestellt werden können. $\Rightarrow$ **Periode des Eingangssignals = Anzahl Basissignale**

Berechnung der Systemantwort aufgrund der Basissignale und der Anregung

1. Eingangssignal x als Linearkombination der Basisvektoren darstellen $\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem
$\Rightarrow x = r \cdot a + s \cdot b + t \cdot c$ (x = Eingangssignal; a, b, c = Basisvektoren; r, s, t = Linearkombinationsparameter)
2. Systemantwort $y = r \cdot \mathcal{L}(a) + s \cdot \mathcal{L}(b) + t \cdot \mathcal{L}(c)$; ($\mathcal{L}(a)$ = Systemantwort der Basis a)

2.3 Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

LTI-Systeme sind durch ihre Impulsantwort h vollständig bestimmt

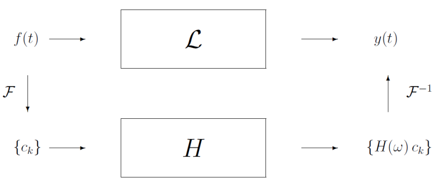
Berechnung der Systemantwort von diskreten LTI-Systemen

$y = x * h$ (y = Systemantwort; x = Eingangssignal; h = Impulsantwort)

Berechnung der Systemantwort von kontinuierlichen LTI-Systemen

$$f_2(t) = h(t) * f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_2(s) = H(s)F_1(s)$$

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(s)$$



2.4 Eigenfrequenz, Frequenzgang

Zu jeder Frequenz gehört der eigene Frequenzgang mit $a, b \in \mathbb{C}$

$$ae^{j\omega_1 t} + be^{j\omega_2 t} \rightarrow aH(\omega_1)e^{j\omega_1 t} + bH(\omega_2)e^{j\omega_2 t}$$

Frequenzgang bei Spektraldarstellung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(\omega k) e^{jk\omega t}$$

2.5 Faltung

$y(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = (f * g)(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \cdot g(u)\,du$
($g(t-u)$ entspricht einer Spiegelung an der Y-Achse und ist um t nach rechts geschoben)

Hat $g(t)$ **keine negative** Argumente dann gilt : $(g * f)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(u) \cdot g(t-u)\,du$

Hat $f(t)$ keine negative Argumente (Einschaltvorgang) dann gilt : $(g * f)(t) = \int\limits_{0}^{t} f(u) \cdot g(t-u)\,du$

Bei einer Faltung mit einer $\delta(t)$Funktion gilt:$f(t) * \delta(t) = f(t)$

Faltungssatz:	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) * G(\omega)$
	$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi} F(\omega) \cdot G(\omega)$

grafische Interpretation:

1. einfacheres Signal ($g(t)$) an der Y-Achse spiegeln
2. Verschiebung um t nach rechts
3. Multiplikation und Integration der beiden Signale

Bestimmung der Grenzen bei $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u)\,du$:

1. Koordinatensystem: X-Achse: t, Y-Achse: u
2. $f(u)$ unterteilen → Streifen parallel zur X-Achse
3. $g(t-u)$ → Streiffen parallel zur 45°-Geraden
4. In u-Richtung sind die Integralgrenzen für ein bestimmtes t abzulesen

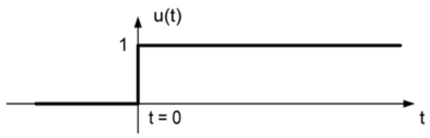
(Beispiel 4.2, Skript S.33)

3 Funktionen

3.1 Schrittfunktion - unit step

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}\text{(praxis) oder undef. (math.)} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = \Sigma(\omega)$
$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$



3.2 Impulsfunktion - dirac delta function

$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$

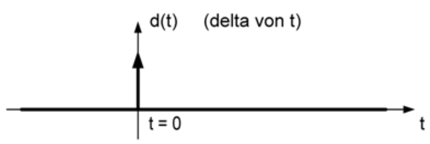
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \cdot f(t) dt = \frac{1}{|a|} \cdot f(0)$

$s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

Fouriertransformierte von $\delta(t)$:

$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 1(\omega)$ $\quad \delta(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j\omega t_0}$ $\quad 1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega)$



3.3 Signumfunktion

$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ -1 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$ $\quad sgn(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{j\omega}$ $\quad \frac{1}{\pi t} \circ\!\!-\!\!\bullet -jsgn(\omega)$

3.4 Rechteckimpuls

$r_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega T) \Rightarrow$ sinc-Funktion

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi & \text{falls } a > 0 \\ -\pi & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

4 Fourierreihe

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{jk\omega_1 t}} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k\cdot e^{jk\omega_1 t}+\overline{c_k}\cdot e^{-jk\omega_1 t}\right)}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)\right]} = \boxed{\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)} \quad k\in\mathbb{Z},\quad \omega_1=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

$$\boxed{c_k=\overline{c_{-k}}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jk\omega_1 t}dt\ ;\ c_0=\frac{a_0}{2}} \quad \boxed{a_0=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)dt,\quad a_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt,\quad b_k=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)dt}$$

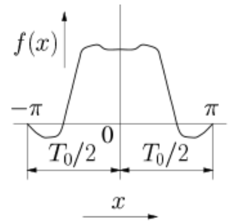
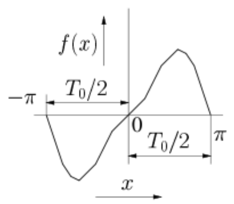
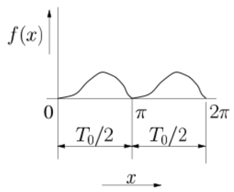
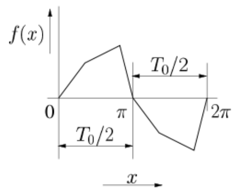
a_0, c_0, A_0 sind *Konstanten*, ω_1 ist die *Grundkreisfrequenz*, a_k und b_k sind die *reellen Koeffizienten*, c_k ist der *komplexe Koeffizient*, A_k ist die *Amplitude* und φ_k ist die *Phase*.

$a_k=c_k+\bar{c_k}=2\,\mathrm{Re}(c_k)=A_k\cos(\varphi_k)$	$b_k=j(c_k+\bar{c_k})=-2\,\mathrm{Im}(c_k)=-A_k\sin(\varphi_k)$
$c_k=\frac{a_k-jb_k}{2}=\frac{A_k}{2}e^{j\varphi_k}=\frac{\pi}{T}F(jk\omega)$	$c_{-k}=\overline{c_k}=\frac{a_k+jb_k}{2}=\frac{A_k}{2}e^{-j\varphi_k}$
$A_k=2\lvert c_k\rvert=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$	$\varphi_k=\arg(c_k)$ oder unten ↓

Berechnung von φ_k aus a_k und b_k

$a_k>0:$	$\varphi_k=-\arctan(\frac{b_k}{a_k})$	$a_k<0:$	$\varphi_k=-\arctan(\frac{b_k}{a_k})+\pi$
$a_k=0\wedge b_k>0:$	$\varphi_k=-\frac{\pi}{2}$	$a_k=0\wedge b_k<0:$	$\varphi_k=\frac{\pi}{2}$
$a_k=0\wedge b_k=0:$	$\varphi_k=$ nicht definiert		

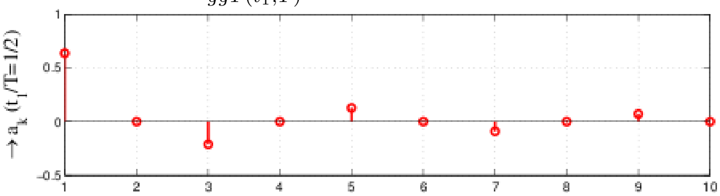
4.1 Symmetrie

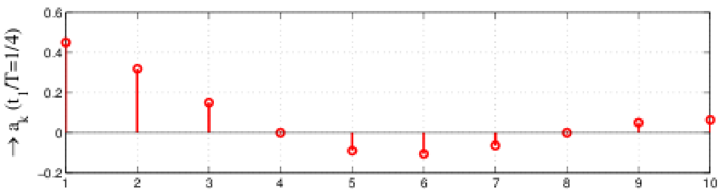
gerade Funktion	**ungerade Funktion**	**Halbperiode 1**	**Halbperiode 2**
			
$f(-t)=f(t)$ $b_k=0$ $a_k=\frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot\cos(k\omega_1 t)dt$	$f(-t)=-f(t)$ $a_k=0$ $b_k=\frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)dt$	$f(t)=f(t+\pi)$ $a_{2k+1}=0$ $b_{2k+1}=0$	$f(t)=-f(t+\pi)$ $a_{2k}=0$ $b_{2k}=0$

4.2 Rechtecksignale

$$a_k=\frac{2}{T}\int\limits_{-t_1/2}^{t_1/2}A\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt=\frac{2AT}{2\pi Tk}\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\Bigg|_{-t_1/2}^{t_1/2}=\frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi t_1}{T}k\right)$$

Für Verhältnisse $\frac{T}{ggT(t_1,T)}=n\in\mathbb{N}$ verschwinden die n. Harmonische und deren Vielfache.





5 Fourier-Transformation

Fouriertransformierte:	$F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
Rücktransformierte:	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
Dies ergibt das **Korespondenzpaar:**	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$
mit der **Symetrie:**	$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi \cdot f(-\omega)$
$F(\omega) = R(\omega) - jX(\omega)$ wobei: ($f(t)$ reell!)	$R(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt$ $\quad X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt$
	$f(t)$ gerade: $X(\omega)$ verschwindet, f(t) ungerade: $R(\omega)$ verschwindet

f sei stückweise stetig $\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}dt$

Jede reelle $f(t)$ lässt sich aus Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion beschreiben:

$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ mit	$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$	$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$
Also:	$R(\omega) = 2\int\limits_0^{\infty} f_e(t)\cos(\omega t)\, dt$	$X(\omega) = 2\int\limits_0^{\infty} f_o(t)\sin(\omega t)\, dt$
Und:	$f_e(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} R(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega$	$f_o(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} X(\omega)\sin(\omega t)\, d\omega$

Bei **kausalen** Funktionen gilt:

$f(t) = 0$ falls $t < 0$ $\quad f_e(t) = f_o(t) = \frac{1}{2}f(t)$ $\quad f(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} R(\omega)\cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} X(\omega)\sin(\omega t)\, dt$

Spektraldichte / Spektraldarstellung	$F(\omega)$	KEINE absoluten Werte für Amplitude & Phase
Amplitudendichte	$\lvert F(\omega)\rvert$	f reell $\rightarrow \lvert F(\omega)\rvert$ symetrisch zur Ordinatenachse
Phasendichte	$arg(F(\omega))$	f reell $\rightarrow arg(F(\omega))$ punktsymetrisch zum Ursprung
Kosinusamplitudendichte	$R(\omega)$	f reell $\rightarrow R(\omega)$ gerade
Sinusamplitudendichte	$X(\omega)$	f reell $\rightarrow X(\omega)$ ungerade
Amplitudengang	$A(\omega) = \lvert H(\omega)\rvert$	$= \sqrt{H(\omega) \cdot \overline{H(\omega)}} \quad \begin{cases} < 1 \text{ Dämpfung} \\ > 1 \text{ Verstärkung} \end{cases}$
Dämpfung	$\dfrac{1}{A(\omega)} = \left\lvert \dfrac{1}{H(\omega)} \right\rvert$	
Phasenverschiebung	$\Phi(\omega) = arg(H(\omega))$	$= \arctan(\frac{Im(H(\omega))}{Re(H(\omega))})$
Systemantwort	$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$	

5.1 Symmetrie

Es gelten die gleichen Symmetrien wie bei der Fourierreihe.

5.2 Eigenschaften

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$
Zeitumkehrung (Spiegelung an der Y-Achse)	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(-\omega) = F^*(w)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $F(\alpha\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(\frac{t}{\alpha})$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich (Modulationstheorem)	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega \mp \omega_0)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (j\omega)^n F(\omega) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$
Integration im Zeitbereich	$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(\omega)}{j\omega} + F(0)\pi\delta(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j^n \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega^n}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) \cdot G(\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ $F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \cdot f(-\omega)$
Modulation	$\cos(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot [F(\omega - \alpha) + F(\omega + \alpha)]$ $\sin(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2j} \cdot [F(\omega - \alpha) - F(\omega + \alpha)]$
Parseval's Theorem	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega$
Bessel's Theorem	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2 d\omega$
Anfangswerte	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \qquad F(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$
∞ lange Folge von δ-Impulsen	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{t_0} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$

5.3 Beispiele

Rechteckimpuls r_T der Breite $2T$ $\quad r_T \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2 \cdot \sin(\omega T}{\omega}$

Signum-Funktion $\quad \frac{1}{\pi \cdot t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j \cdot sgn(\omega) \qquad sgn(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{j\omega}$

5.4 Hilbertransformation

Fourier-Transformierte:	$F(\omega) = \Re(\omega) + \mathrm{j}\Im(\omega) = \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re(u) + \mathrm{j}\Im(u)}{\omega - u} du$
Hilbert-Transformationspaar:	$\Re(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(u)}{\omega - u} du$ (Realteil) $\Im(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re(u)}{\omega - u} du$ (Imaginärteil)
Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$:	$\mathcal{H}(f(t)) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{t - u} du = f(t) * \frac{1}{\pi t}$
Analytisches Signal:	$s_R(t) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s_I(u)}{t - u} du$ (Realteil) $s_I(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s_R(u)}{t - u} du$ (Imaginärteil)

Die Hilbert-Transformation eines Signals $s(t)$ ist gegeben durch die Faltung $s(t) * \frac{1}{\pi t}$ mit $\frac{1}{\pi t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -jsgn(\omega)$.
Durch die Hilbert-Transformation lässt es sich einfach die Fourier-Transformierte berechnen, wenn der Realteil oder der Imaginärteil gegeben ist.

6 Abtasttheorem, diskrete Fouriertransformation

Periodisieren	○—●	Abstasten
Abtasten	○—●	Periodisieren

Abtasten einer Funktion mit idealem Abtaster mit Abtastintervall Δt.
$f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot f(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t)$

6.1 Abtasttheoreme

Kardinalreihe: $S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\frac{\pi}{T}) \cdot \frac{\sin(\omega T - k\pi)}{\omega T - k\pi}$ mit $S(k\frac{\pi}{T}) = 2Tc_k$

Abtasttheorem für die Frequenz: Für ein Signal von endlicher Dauer $2T$ ist die Fouriertransformierte durch ihre Abtastwerte an den Stellen $k\frac{\pi}{T}$ vollständig bestimmt.

Abtasttheorem von Shannon: Ist ein Signal bandbegrenzt mit Grenzfrequenz ω_g, so lässt sich das Signal an Hand der Abtastwerte zu den Zeitpunkten $k\frac{\pi}{\omega_g}$ vollständig rekonstruieren.

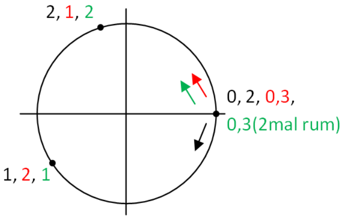
6.2 diskrete Fouriertransformation

$$\hat{c_k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

mit N Abtastpunkten
- Die DFT liefert nur $\frac{N}{2}$ unabhängige Koeffizienten, da $\hat{c_k}$ und $\hat{c_{-k}}$ konjugiert komplex sind.
- Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so gross sein, wie die zu beobachtende Frequenz.

6.3 Alias-Effekt

Ist die Abtastfrequenz zu klein, können die Frequenzen nicht mehr sauber getrennt werden, der sogenannte Alias-Effekt tritt auf: die Anteile aller Frequenzen werden der jeweils betragsmässig kleinsten passenden Frequenz zugeordnet.



Abtastfrequenz:	24
Frequenz:	8
Frequenz:	16
Frequenz:	-8

Summeneigenschaft: $\hat{c_k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN}$

7 Laplace-Transformation

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt} \qquad s = \sigma + j\omega$$

- Definitionsbereich nur für kausale Systeme $t \geq 0$
- Wachstum kleiner als der von eienr Exponentialfunktion
- Gegenüber $j\omega$ bei der Fourier-Transformation ist bei der Laplace-Transformation s verallgemeinert zu $s = \sigma + j\omega$. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ durch die Laplace-Transformation $F(s)$ ausgedrückt werden kann.
- mit $\begin{cases} \sigma = 0 & \to \text{Amplitude bleibt konstant} \\ \sigma > 0 & \to \text{explodiert die Amplitude für } 0 < t \to \infty \\ \sigma < 0 & \to \text{klingt die Amplidute für} 0 < t \to \infty \text{ auf 0 ab} \end{cases}$

7.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$
Ähnlichkeit / Streckung	$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \cdot G(s)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi)G(s-\xi)d\xi$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0^+)$
Ableitungen im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} \frac{\partial f(0^+)}{\partial t} - \ldots - s^0 \frac{\partial^{n-1} f(0^+)}{\partial t^{n-1}}$
Multiplikation mit t	$t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{-\partial F(s)}{\partial s}$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n}$
Verschiebung im Zeitbereich nach rechts	$f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)e^{-t_0 s}$
Verschiebung im Zeitbereich nach links	$f(t+t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{t_0 s} \cdot [F(s) - \int_0^{t_0} f(t) \cdot e^{-st}dt]$
Verschiebung im Frequenzbereich (Dämpfungssatz)	$f(t)e^{\mp\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s \pm \alpha)$
Integration (Sprungantwort)	$\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s}$
Anfangswert	$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s),$ wenn $\lim_{t\to 0} f(t)$ existiert.
Endwert	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s),$ wenn $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert.

7.2 Laplace-Tabelle

$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t) \cdot t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$
$\sigma(t) \cdot t^2$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{s^3}$
$\sigma(t) \cdot t^n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot e^{\alpha t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sigma(t) \cdot t \cdot e^{\alpha t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$

$\sigma(t) \cdot t^2 \cdot e^{\alpha t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{(s-\alpha)^3}$
$\sigma(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sigma(t) \cdot \cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$1(s)$
$\delta(t-\alpha)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-\alpha s}$

7.3 Rücktransformation

7.3.1 Vorgehen

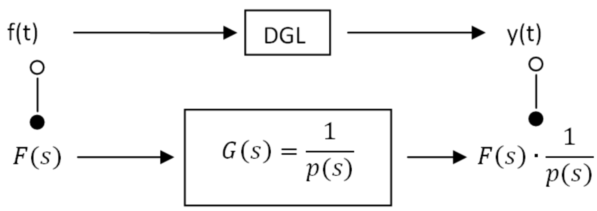
1. Kürzen oder vereinfachen
2. Partialbruchzerlegung falls nötig
3. Rücktransformation mittels Laplace-Tabelle
4. $h(t)$ <u>*nicht*</u> < 0

7.3.2 Residuensatz

Beispiel:
$F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}, \qquad (0 < \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha \neq \beta)$
$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum\limits_{i=1}^{k} Res(F(s_k)e^{s_k t})$
$= \lim_{s\to-\alpha}((s+\alpha)F(s)e^{st}) + \lim_{s\to-\beta}((s+\beta)F(s)e^{st})$
$= \frac{e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha} + \frac{e^{-\beta t}}{\alpha-\beta} = \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$

7.4 Lösung linearer Differentialgleichungen

Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{1}{p(s)}$ $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s)$
Frequenzgang	$G(j\omega) = H(\omega)$
Impulsantwort	$y_\delta(t) = g(t) = y'_\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s) = \frac{1}{p(s)} = Y_\delta(s)$
Sprungwantwort	$y_\sigma(t) = \int\limits_0^t g(u)du \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s\cdot p(s)} = Y_\sigma(s)$
Eigenschwingung	$\frac{h(s)}{p(s)}$
äussere Erregung	$\frac{F(s)}{p(s)}$
stationärer Zustand	= ungedämpfte Eigenschwingung



Beispiel: $y'' + 8y' + 25y = \sigma t \cdot \sin(2t)$ mit $y(0) = 2, y'(0) = -1$

$\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{2}{s^2+4}$

$\Rightarrow Y(s)(s^2 + 8s + 25) = 2s + 15 + \frac{2}{s^2+4}$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{2s+15}{s^2+8s+25} + \frac{2}{(s^2+4)(s^2+8s+25)} = \underbrace{\frac{2s+15}{s^2+8s+25}}_{\text{Eigenschwinung durch Anfangszustand}} + \underbrace{\frac{As+B}{s^2+4}}_{\text{stationärer Zustand}} + \underbrace{\frac{Cs+D}{s^2+8s+25}}_{\text{Eigenschwinung durch Einschalten}}$$

7.4.1 Eigenschwingungen

Aus der Eigenschwingung können die Nullstellen des charakteristischen Polynom $p(s)$ direkt abgelesen werden.
Beispiel:

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}\sin(3t) - \tfrac{2}{3}e^{-2t}\cos(2t) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}\frac{1}{2j}(e^{3jt} - e^{-3jt})}_{NS=EW=-1\pm3j} - \underbrace{\frac{2}{3}e^{-2t}\frac{1}{2}(e^{2jt} + e^{-2jt})}_{NS=EW=-2\pm2j}$$

Damit ist das char. Polynom $p(s) = (s - NS_1)(s - NS_2)\dots(s - NS_n)$

Der stationäre Zustand ist $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{p(0)}$

7.5 Eigenschwinung

spezielle Anfangswerte bei einem System ohne äussere Einflüsse:
$y(0) = 0, y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-2)} = 0, y^{(n-1)} = 1$
in diesem Fall wird $h(s) = 1$

$$\begin{aligned} y(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) \\ y'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; sY(s) - y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n)} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \underbrace{s^n Y(s)}_{Y(s)\cdot p(s)} \underbrace{-s^{n-1}y_0 - \cdots - y^{(n-1)}}_{h(s)} \end{aligned}$$

8 Diverses

8.1 Partialbruchzerlegung

$f(x) = \dfrac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow$ Nenner faktorisieren mit Hornerschema, Binom, etc. $\Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2+2x-15) = (x+2)(x+5)(x-3)$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{aligned} x_1 &= 3: \; -9 + 60 + 149 = A \cdot 5 \cdot 8 \quad \Rightarrow A = 5 \\ x_2 &= -2: \; -4 - 40 + 149 = B(-5) \cdot 3 \; \Rightarrow B = -7 \\ x_3 &= -5: \; -25 - 100 + 149 = C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 6} = \frac{A(x^2 + 4x + 6) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 6)}$$

Variante mit Koeffizientenvergleich:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 6s + 13)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 6s + 13}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(s^2 + 6s + 13) + s(Bs + C) \\ 1 &= s^2(A + B) + s(C + 6A) + 13A \\ &\Rightarrow 1 = 13A; (A + B) = 0; (C + 6A) = 0 \\ &\Rightarrow A = \frac{1}{13}; B = -\frac{1}{13}; C = -\frac{6}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 &: A + B = 0 \\ s^1 &: 6A + C = 0 \\ s^0 &: 13A = 1 \end{aligned}$$

8.2 Hornerschema

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	$b_1 x_1$	$b_0 x_1$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden!!)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

Beispiel:
$f(x) = x^3 - 67x - 126$

	1	0	-67	-126
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$
	1	-2	-63	$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	b_2	b_1	b_0	

$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$

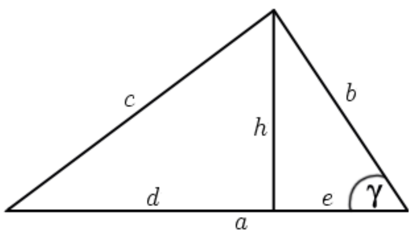
9 Riisä Tricks und Merksätze

- $H(s)$ = UTF = Laplace-Transformierte der Impulsantwort ($y_\delta(t)$)
- $H(j\omega)$ = Frequenzgang = UTF auf imaginärer Achse ($j\omega$ für s einsetzen)
- $y_\sigma(t) = \int\limits_0^t y_\delta(u)du$
- $\left|\frac{ja+b}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$
- Dirac-Funktion: $s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$
- Antwort eines LTI-Systems auf eine harmonisches Schwingung mit Frequenz $\omega \Rightarrow$ harmonische Schwingung mit gleicher Frequenz aber anderer Amplitude und Phase ($\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = H(\omega) \cdot e^{j\omega t}$)
- $H(\omega)$ = komplexwertige Funktion der Frequenz ω, die für jede Frequenz ω die Änderung von Amplitude und Phase durch das System speichert = Frequenzgang = Antwort auf harmonische Schwingung beliebiger Frequenz

9.1 Dreiecksformeln

Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

Pythagoras beim Sinus

$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$
$$\cot\beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

9.2 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.3 Periodizität

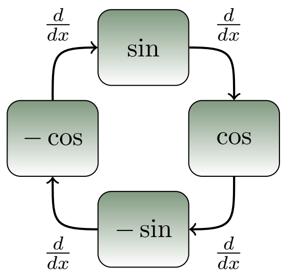
$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

9.4 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

9.5 Ableitungen



9.6 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

9.7 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

9.8 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

9.10 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

9.9 Euler-Formeln

$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$
$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j\sin(y))$
$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$

10 Integralrechnung

Partielle Integration: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

10.1 Einige wichtige Integrale

$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$	$\int \sin(a+bx)dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)$
$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\sin(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\sin(bx+d) - b\cos(bx+d))$
$\int \cos(x)dx = \sin(x)$	$\int \cos(a+bx)dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\cos(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\cos(bx+d) + b\sin(bx+d))$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
$\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$\int x^2e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$
$\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$	

11 Differentialrechnung

11.1 Einige wichtige Differentiale

Funktion	**Ableitung**	**Funktion**	**Ableitung**
C (Konstante)	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x
e^{bx}	be^{bx}	a^x	$a^x\ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\ln[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

11.2 Einige unbestimmte Integrale S1074

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x+\frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2 + 2bx + c$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n ax dx = -\frac{sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2} ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2} ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha \cdot \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	