1 Skalare Funktionen ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

1.1 Ableitungen

partielle AbleitungS11/28	**Gradient**S22/46	**Richtungsableitung**S20/46
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) := f_x(x_0; y_0)$	$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0; y_0) \\ f_y(x_0; y_0) \end{pmatrix}$	An der Stelle $(x_0; y_0)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(x_0; y_0) = \operatorname{grad} f(x_0; y_0) \bullet \vec{r}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x; y) = f_{xx}(x; y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x; y) = f_{xy}(x; y) = f_{yx}(x; y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x; y) = f_{yy}(x; y)$	$\operatorname{grad} f(x_1; \ldots; x_m) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1; \ldots; x_m) \\ \vdots \\ f_{x_m}(x_1; \ldots; x_m) \end{pmatrix}$	$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(x_1, \ldots, x_m) = \operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_m) \bullet \vec{r}$
partielle Ableitung der Funktion f nach dem Parameter x_1	Vektor der partiellen Ableitungen von f. Der Gradient zeigt in Richtung der grössten Steigung und steht senkrecht auf der Niveaulinie. Der Wert der Steigung entspricht $\lvert \operatorname{grad} f \rvert$	Steigung der Funktion f in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ $(\lvert\vec{r}\rvert = 1)$

1.2 Tangentialebene

2 VariablenS12 im Punkt: $x_0; y_0$	**m Variablen**S44 im Punkt: $x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}$
$g(x, y) = f(x_0; y_0) + f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$	$g(x_1; \ldots; x_m) = f(x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}) + f_{x_1}(x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}) \cdot (x_1 - x_1^{(0)}) + \ldots + f_{x_m}(x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}) \cdot (x_m - x_m^{(0)})$

Für Approximation einer Formel
Linearisierung am Punkt $(x_0; y_0)$: Tangentialebene $g(x; y)$ beim Punkt $(x_0; y_0)$
Die Lösung des approximierten Wertes liefert dann $g(x; y)$.

$$\boxed{\vec{n}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{Normalenvektor der Tangentialebene}$$

1.3 SteigungS14

$$\boxed{m = -\frac{f_x(x_0; y_0)}{f_y(x_0; y_0)}} \text{ falls in einer impliziten Form } f(x; y) = 0 \text{ und } f_y(x_0; y_0) \neq 0$$

1.4 Das totale Differenzial

Die vier Grundoperationen

$z = f(x;y)$	Standardabweichung
$z = x + y$ $z = x - y$	$\}\sigma_{\bar{z}} \approx \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2}$
$z = C \cdot x \cdot y$ $z = C \cdot \frac{x}{y}$	$\}\lvert\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\rvert \approx \sqrt{\lvert\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\rvert^2 + \lvert\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\rvert^2}$

1.4.1 totale Differential

$\boxed{\Delta z \approx dz = f_x(x_0; y_0)dx + f_y(x_0; y_0)dy}$ S16 $\boxed{\Delta f \approx df = f_{x_1}(x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}) \cdot dx_1 + \ldots + f_{x_m}(x_1^{(0)}; \ldots; x_m^{(0)}) \cdot dx_m}$ S45

1.4.2 Gauss'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\boxed{z = \bar{z} \pm \sigma_{\bar{z}} \approx f(\bar{x}, \bar{y}) \pm \sqrt{(f_x(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \sigma_{\bar{x}})^2 + (f_y(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \sigma_{\bar{y}})^2}}$$ S19

$$\boxed{y = \bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}} \approx f(\bar{x_1}; \ldots; \bar{x_m}) \pm \sqrt{[f_{x_1}(\bar{x_1}; \ldots; \bar{x_m}) \cdot \sigma_{\bar{x_1}}]^2 + \ldots + [f_{x_m}(\bar{x_1}; \ldots; \bar{x_m}) \cdot \sigma_{\bar{x_m}}]^2}}$$ S45

1.5 Kurvenapproximation

Punkte P_1 bis P_n sind gegeben.

1. Approximation durch eine Funktion: $y(x) = ax + b$
   $f(a; b) = \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$

2. $f_a = \dfrac{\partial f}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (ax_i + b - y_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i)$
   $f_b = \dfrac{\partial f}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)$

3. $\operatorname{grad} f = \begin{vmatrix} f_a(a; b) \\ f_b(a; b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a\bar{x^2} + b\bar{x} - \bar{xy}) \\ 2(a\bar{x} + b - \bar{y}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\bar{x^2} + b\bar{x} - \bar{xy} \\ a\bar{x} + b - \bar{y} \end{vmatrix} = \vec{0}$

4. Nach a und b auflösen und in die Funktion einsetzen

1.6 numerische Verfahren zum Auffinden von stationären Punkten

1.6.1 Newton Verfahren S29

1. Man startet mit einer möglichst guten Approximation $(x_0; y_0)$

2. Man löst für $n = 0, 1, 2, \ldots$ das Gleichungssystem
   $\begin{vmatrix} f_{xx}(x_n; y_n) \cdot \Delta x_n + f_{xy}(x_n; y_n) \cdot \Delta y_n = -f_x(x_n; y_n) \\ f_{xy}(x_n; y_n) \cdot \Delta x_n + f_{yy}(x_n; y_n) \cdot \Delta y_n = -f_y(x_n; y_n) \end{vmatrix}$, und setze $(x_{n+1}; y_{n+1}) := (x_n + \Delta x_n; y_n + \Delta y_n)$

3. Den letzten berechneten Punkt $(x_{n+1}; y_{n+1})$ akzeptiert man als Approximation für den stationären Punkt.

1.6.2 Gradientenverfahren S34

Beim Gradientenverfahren startet man bei einer möglichst guten Approximation und folgt, dann immer der steilsten Steigung, bis genügend Konvergenz vorliegt.

1.7 Extremalprobleme

Zwei Variablen S25

1. Randpunkte von $\mathbb{D}_f$
2. Punkte, in denen der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f$ nicht existiert.
3. Punkte, in denen der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f = \vec{0}$ ist.
   Hat die Funktion $f(x;y)$ an der Stelle $(x_0;y_0)$ einen verschwindenden Gradientenvektor $\operatorname{grad} f = 0$ und gilt für die Diskriminante $\Delta = f_{xx}(x_0;y_0) \cdot f_{yy}(x_0;y_0) - (f_{xy}(x_0;y_0))^2$
   - $\Delta > 0$, so besitz $f(x_0;y_0)$ ein lokales Extremum. Im Fall $f_{xx}(x_0;y_0) < 0$ liegt ein lokales Maximum vor, für $f_{xx}(x_0;y_0) > 0$ hingegen ein lokales Minimum.
   - $\Delta < 0$, so besitzt $f(x_0;y_0)$ in $(x_0;y_0)$ ein Sattelpunkt.
   - $\Delta = 0$, so braucht es weitere Untersuchungen, um die Art der Stelle $(x_0;y_0)$ zu bestimmen können.
   - Wenn es kein lokales Minima/Maxima gibt, dann auch kein globales!
   - Hat es ein lokales Maxima so gilt: $f(x;y) \leq M \ \forall \ (x;y) \in \mathbb{D}_f \Rightarrow M$ globales Maxima

m Variablen S46 Funktion $f(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)})$ gegeben.

- Schritte 1 - 3 sind gleich wie bei zwei Dimensionen. Kandidaten $(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)})$ bekommen.
- Bestimmung der Art der Extremalstellen: Hessesche Matrix aufstellen

$$H(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)}) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)}) & \ldots & f_{x_1x_m}(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_mx_1}(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)}) & \ldots & f_{x_mx_m}(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)}) \end{pmatrix}$$

  - m positive Eigenwerte $\lambda_i > 0$, so besitzt f in $(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)})$ ein lokales Minimum,
  - m negative Eigenwerte $\lambda_i < 0$, so besitzt f in $(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)})$ ein lokales Maximum,
  - positive und negative Eigenwerte, so besitzt f in $(x_1^{(0)};\ldots;x_m^{(0)})$ einen Sattelpunkt.
  - Wenn $\lambda_i \leqq 0$ oder $\lambda_i \geqq 0$ sind weitere Untersuchungen nötig.

1.8 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

Zwei Variablen S42

Gegeben: $f(x;y)$ unter der Nebenbedingung $n(x;y) = 0$
So kommen folgende Punkte von f in Frage:

1. Randpunkte von $\mathbb{D}_f$ wenn sie die Nebenbedingungen $n(x;y) = 0$ erfüllen und zu $\mathbb{D}_f$ gehören.
2. Punkte, in denen der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f$ und / oder $\operatorname{grad} n$ nicht existieren, und die Nebenbedingung $n(x;y) = 0$ erfüllen.
3. Lösungen des Gleichungssystems
$$\begin{vmatrix} f_x(x;y) \cdot n_y(x;y) = f_y(x;y) \cdot n_x(x;y) \\ n(x;y) = 0 \end{vmatrix}$$
4. Lösung in $f(x,y)$ einsetzen und untersuchen!

m Variablen S49

Falls eine Funktion $f(x_1;\ldots;x_m)$ unter den $k(< m)$ Nebenbedingungen $n_1(x_1;\ldots;x_m) = 0, \ldots, n_m(x_1;\ldots;x_m) = 0$ Maximal- oder Minimalstellen besitzt, kommen folgende Punkte in Frage:

1. Randpunkte von $\mathbb{D}_f$ falls sie zu $\mathbb{D}_f$ gehören und die Nebenbedingungen gleich 0 erfüllen.
2. Punkte in denen (mindestens) einer der Gradientenvektoren $\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} n_1, \ldots, \operatorname{grad} n_k$ nicht existieren oder in denen die k Vektoren $\operatorname{grad} n_1, \ldots, \operatorname{grad} n_k$ linear abhängig sind und die Nebenbedingungen erfüllen.
3. Lösungen des $(m+k) \times (m+k)$ Gleichungssystems:
$$\begin{vmatrix} \operatorname{grad} f(x_1;\ldots;x_m) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} n_1(x_1;\ldots;x_m) + \ldots + \\ \quad + \lambda_k \cdot \operatorname{grad} n_k(x_1;\ldots;x_m) \\ n_1(x_1;\ldots;x_m) = 0 \\ \vdots \\ n_k(x_1;\ldots;x_m) = 0 \end{vmatrix}$$
4. Lösungen in $f(x_1;\ldots;x_m)$ einsetzen.

2 Mehrfache Integrale S50

2.1 Oberflächenberechnung S73

Oberflächenintegral $f : G \to \mathbb{R}$	$F = \iint\limits_G \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1} \cdot d\mu$
Oberflächenintegral $f : G \to \mathbb{R}^3$	$F = \iint\limits_G \left\| \begin{pmatrix} \partial_x f_1 \\ \partial_x f_2 \\ \partial_x f_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_y f_1 \\ \partial_y f_2 \\ \partial_y f_3 \end{pmatrix} \right\| d\mu = \iint\limits_G \|D_1 f \times D_2 f\| \cdot d\mu$
Mantelfläche eines Rotationskörpers in Zylinderkoordinaten	$M = 2\pi \int\limits_0^h \varrho(z)\sqrt{1 + \varrho'(z)^2} \cdot dz$
Polarkoordinaten	$F = \iint\limits_G f(r,\varphi) \cdot r \cdot drd\varphi$

2.2 Bereichsintegral S56

$$\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \int\limits_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} f(x;y)dydx = \int\limits_{y_{min}}^{y_{max}} \int\limits_{x_{min}(y)}^{x_{max}(y)} f(x;y)dxdy$$

$$\int\limits_{x_{1_{min}}}^{x_{1_{max}}} \int\limits_{x_{2_{min}}(x_1)}^{x_{2_{max}}(x_1)} \dots \int\limits_{x_{m_{min}}(x_1;\dots;x_m)}^{x_{m_{max}}(x_1;\dots;x_m)} f(x_1;\dots;x_m)dx_m \dots dx_2 dx_1$$

2.3 Volumenberechnung S55/56/66

$$V = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \int\limits_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} f(x;y)dydx$$

$$V = \int\limits_V dV = \int\limits_{x_{1_{min}}}^{x_{1_{max}}} \int\limits_{x_{2_{min}}(x_1)}^{x_{2_{max}}(x_1)} \int\limits_{x_{3_{min}}(x_1;x_2)}^{x_{3_{max}}(x_1;x_2)} 1 dx_3 dx_2 dx_1$$

2.4 Schwerpunkt

2.4.1 einer dünnen ebener Platte S59

inhomogen:

$x_s = \frac{1}{M} \int\limits_F x \cdot \varrho(x,y,z) \cdot dF$

$y_s = \frac{1}{M} \int\limits_F y \cdot \varrho(x,y,z) \cdot dF$

homogen:

mit ϱ konstant und Objekt nur Platte (z entfaellt):

$x_s = \frac{1}{F} \int\limits_F x \cdot dF = \frac{1}{F} \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} x(y_{max}(x) - y_{min}(x)) \cdot dx$

$y_s = \frac{1}{F} \int\limits_F y \cdot dF = \frac{1}{2F} \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} (y_{max}^2(x) - y_{min}^2(x)) \cdot dx$

2.4.2 von Körpern S67

inhomogen:

$x_s = \frac{1}{M} \int\limits_V x \cdot \varrho(x;y;z)dV$ analog für y_s und z_s

homogen:

$x_s = \frac{1}{V} \int\limits_V xdV$ analog für y_s und z_s

M = totale Masse
F = Fläche

2.5 Trägheitsmoment S67

$J = \int\limits_V \varrho(x;y;z) \cdot [r(x;y;z)]^2 dV$

Für homogene Körper gilt: $J = \varrho \int\limits_V \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} dV$

2.6 Koordinatentransformation S62/64/67

$$\int_B f(x;y)dF = \int_B \underbrace{f(x(u;v);y(x;v))}_{\tilde{f}(u;v)} \cdot Korrekturfaktor(u;v)d\tilde{F}$$

$$\int_B f(x;y)dF = \int_B \underbrace{f(x(u;v);y(x;v))}_{\tilde{f}(u;v)} \cdot \left\| \frac{\partial(x;y)}{\partial(u;v)} \right\| d\tilde{F}$$

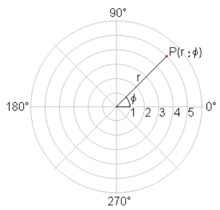
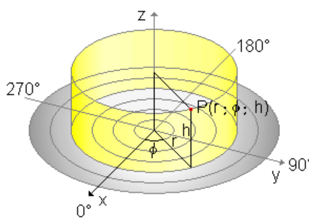
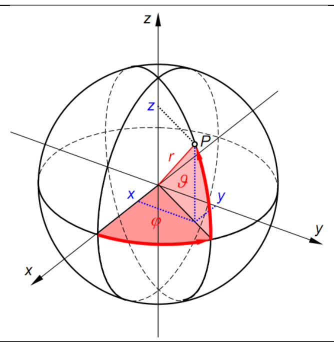
$$\int_B f(x_1;\ldots;x_m)dB = \int_{\tilde{B}} \underbrace{f(x_1(u_1;\ldots;u_m);\ldots;x_m(u_1;\ldots;u_m))}_{\tilde{f}(u_1;\ldots;u_m)} \cdot \left\| \frac{\partial(x_1;\ldots;x_m)}{\partial(u_1;\ldots;u_m)} \right\| d\tilde{B}$$

Der Korrekturfaktor ist der Betrag der Jacobideterminante $|detDf|$

2.6.1 Jacobimatrix (Funktionalmatrix) S63/67

Jacobimatrix (Df):	$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$	$\frac{\partial(x_1;\ldots;x_m)}{\partial(u_1;\ldots;u_m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}$
Jacobideterminante ($detDf$):	$\left\lvert\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\rvert = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$	$\left\lvert\frac{\partial(x_1;\ldots;x_m)}{\partial(u_1;\ldots;u_m)}\right\rvert = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$

2.7 Koordinatensysteme

$f(x,y,(z))$ $\rightarrow$	$f(r,\varphi)$ **Polar**	$f(r,\varphi,z)$ **Zylinder**	$f(r,\varphi,\vartheta)$ **Kugel**
Bilder			
Umrechnungs-formeln	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$	$x = r\cos\varphi \quad r \geq 0$ $y = r\sin\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $z = z$	$x = r\cos\varphi\cos\vartheta \quad r \geq 0,$ $y = r\sin\varphi\cos\vartheta \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ $z = r\sin\vartheta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$
Jacobi-Matrix Df	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$
$detDf$	r	r	$r^2\cos\vartheta \quad \geq 0$

3 Kurven ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)S41

3.1 Flächeninhalt einer geschlossenen ebenen KurveS73

Eine kreuzungsfreie, geschlossene Kurve $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in (r;s)$ hat einen Flächeninhalt von

$$\boxed{F = \left| \int_r^s y(t) \cdot x^{'}(t) dt \right| = \left| \int_r^s x(t) \cdot y^{'}(t) dt \right|}$$

Hat die Kurve einen Kreuzungspunkt:
$x_1(t_1) = x_2(t_2)$
$y_1(t_1) = y_2(t_2)$

Der Zeitpunkt t ist bei x_1 und x_2 **NICHT** gleich!
So kann man herausfinden, innerhalb welchen Zeitpunkten die Schleife durchgegangen wird!

3.2 Differentation einer KurveS75

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Tangente nicht partiell ableiten sondern nach t

3.3 KurvenintegraleS77

$$\boxed{I = \int_r^s f(\vec{x}(t)) \cdot |\vec{x}'(t)| dt}$$

3.4 KurvenlängeS79

	Formel	**Bedingung**
Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}(t)$	$l = \int_r^s \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2} dt$	$r \leq t \leq s$
Im Speziellen für Graphen von Funktionen $f(x)$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$	$a \leq x \leq b$

4 Vektorfelder S82

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche jedem Punkt des Raumes einen Vektor anheftet.

4.1 Wegintegral S83

Ist $\vec{F}$ ein Vektorfeld und $C : \vec{c} = \vec{c}(t), r \leq t \leq s$ eine Kurve, dann wird das Wegintegral wie folgt berechnet:

$$\boxed{\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_r^s \vec{F}(\vec{c}(t)) \bullet \dot{\vec{c}}(t) \cdot dt} \text{ z.B: } \vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1t \\ 3t \\ 5t \end{pmatrix} \Rightarrow \int \begin{pmatrix} -3t \\ 1t \\ 5t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} dt$$

Tipp: Wenn c bspw. eine gerade Linie vom Punkt (-1;0) bis (1;0) ist, dann ist:

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } -1 \leq t \leq 1$$

Eigenschaften des Wegintegrals

- Ist C eine geschlossene Kurve, also $\vec{c}(r) = \vec{c}(s)$, spricht man von einem **Umlaufintegral** und verwendet folgende Definition: $\oint\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s}$
- Ist $C = C_1 + C_2$ gilt folgendes: $\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int\limits_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}$
- Wird C in Gegenrichtung durchlaufen gilt folgendes: $\int\limits_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int\limits_{-C} \vec{F} \bullet d\vec{s}$

4.2 Konservative Felder / Potentialfelder S83

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ heisst *konservativ*, wenn das Wegintegral unabhängig vom gewählten Weg ist.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0} \quad \boxed{\int\limits_{Weg_1\, A \to B} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_{Weg_2\, A \rightsquigarrow B} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int\limits_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}} \quad \boxed{\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0}$$

Es gelten folgende Sätze: Für ein Vektorfeld $\vec{F}$ im zwei- oder dreidimensionalen Koordinatensystem gilt in einem Bereich ohne „durchgehende Löcher“, d.h. in dem sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen lässt:

- $\vec{F}$ ist konservativ, d.h die Kurvenintegrale wegunabhängig.
- $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt ein Potential $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\vec{F} = \mathrm{grad}\, \Phi(\vec{x}(t))$.
- $\vec{F}$ erfüllt die sogenannte(n) **Integrabilitätsbedingung(en)**(dient zur Überprüfung ob es konservativ ist), d.h. im
  - zweidimensionalen Fall die Gleichung $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$,
  - dreidimensionalen Fall die Gleichungen $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}$

und

- Ist $\vec{F} = \mathrm{grad}\, \Phi(\vec{x}(t))$, dann ist $\vec{F}$ *konservativ* und es gilt: $\int\limits_r^s \vec{F} \bullet \dot{\vec{x}} dt = \Phi(\vec{x}(s)) - \Phi(\vec{x}(r))$
- Ist $\vec{F}$ *konservativ*, dann gibt es eine Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ so, dass $\vec{F} = \mathrm{grad}\, \Phi(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} \Phi_{x_1} \\ \vdots \\ \Phi_{x_n} \end{pmatrix}$.

4.3 Rotation

Interpretiert man dieses Feld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde. Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall null ist, nennt man *wirbelfrei*.

2-Dimensional

$$\boxed{\operatorname{rot}(u,v) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}$$

3-Dimensional

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{F}) = \bigtriangledown \times \vec{F} = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix}}$$

4.4 Divergenz

Interpretiert man dieses Feld als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz für jede Stelle die Tendenz an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. von diesem Punkt wegfließt. Es sagt damit aus, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz größer als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld als *quellenfrei*.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \bigtriangledown \circ \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}}$$

4.5 Fluss

Der Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch das Flächenstück G mit Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\lim_{\Delta A \to 0} \sum \vec{F} \bullet \Delta\vec{A} = \int_A \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}}$$

4.6 Integralsätze

	Satz	Formel	Beschreibung
2-D	Die Greensche Formel	$\int_A \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \oint_{\partial A} \vec{F} \bullet d\vec{s}$	Die Greensche Formel beschreibt den Zusammenhang zwischen einem **Wegintegral** und einem **Oberflächenintegral**.
2-D	Der Satz von Stokes	$\int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \bullet d\vec{s}$	Der Satz von Stokes definiert einen Zusammenhang zwischen einem **Wegintegral** und einem **Flussintegral**.
3-D	Der Satz von Gauss	$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \bullet d\vec{A}$	Der Satz von Gauss definiert einen Zusammenhang zwischen einem **Flussintegral** und einem **Volumenintegral**.

5 Diverses

5.1 Rechenregeln für div, rot, grad, Δ

Sei $D \in \mathbb{R}^3, f \in C^2(D, \mathbb{R}), \vec{v} \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

- $\text{rot}(\text{grad}\, f) = 0$ "Gradientenfeld ist wirbelfrei"
- $\text{div}(\text{rot}\, \vec{v}) = 0$ "Feld der Rotation ist quellfrei"
- $\text{div}(\text{grad}\, f) = \Delta f$
- $\text{div}(f\vec{v}) = (\text{grad}\, f) \cdot \vec{v} + f\, \text{div}\, \vec{v}$
- $\text{rot}(f\vec{v}) = (\text{grad}\, f) \times \vec{v} + f\, \text{rot}\, \vec{v}$
- $\text{rot}(\text{rot}\, \vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\, \vec{v}) - \Delta\vec{v}$

(Laplace–Operator kompomentenweise anwenden!) .

Laplace-Operator(Δ):
$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$

Nabla-Operator(∇):
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

5.2 Eigenwerte

Die Eigenwerte λ erhält man folgendermassen (I ist die Einheitsmatrix):
$|\lambda I - A| = 0 \qquad \Rightarrow$ nach λ auflösen

5.3 Determinante

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

6 Idiotenseite

6.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0 °	0	0	1	0
30 °	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45 °	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60 °	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90 °	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120 °	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135 °	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150 °	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180 °	π	0	-1
210 °	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225 °	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240 °	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270 °	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300 °	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315 °	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330 °	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.2 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

6.3 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

6.4 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

6.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

6.6 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

6.7 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

6.8 Einige unbestimmte Integrale S1074

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln \lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left\lvert \frac{ax-b}{ax+b} \right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a} \ln \left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2} \right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin \frac{a}{b} x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln \left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2} \right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b} x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x + \frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a} \ln \lvert X\rvert - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2 + 2bx + c$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n ax dx = -\frac{sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left\lvert \tan \frac{ax}{2} \right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left\lvert \tan(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln \lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha \cdot \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	

6.9 Ableitungen elementarer Funktionen S436

Funktion	**Ableitung**	**Funktion**	**Ableitung**
C (Konstante)	0	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
x	1	$\sec^{-1} x$	$\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$
$x^n \ (n \in \mathbb{R})$	nx^{n-1}	$\arcsin x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arccos x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\text{arccot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq 0, x > 0)$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\text{arcsec } x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$\text{arcossec } x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{e}^{bx} \quad (b \in \mathbb{R})$	$b\mathrm{e}^{bx}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$a^x \quad (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cosh x$	$\sinh x$
$a^{bx} \quad (b \in \mathbb{R}, a > 0)$	$ba^{bx} \ln a$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\coth x \quad (x \neq 0)$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x \ln a}$	$\text{Arsinh } x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x \quad (x > 0)$	$\frac{1}{x}\lg \mathrm{e} \approx \frac{0.4343}{x}$	$\text{Arcosh } x \quad (x > 1)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\text{Artanh } x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\text{Arcoth } x \quad (\lvert x\rvert > 1)$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\tan x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$[f(x)]^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$\cot x \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -cosec^2 x$	$\ln f(x) \quad (f(x) > 0)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$