

Elektrotechnik2 FS2012

Tabea Méndez

HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Elektrotechnik

Rapperswil, 29. Oktober 2012

Dieses Dokument wurde mit \LaTeX gesetzt.

© by Roman Gassmann.

Der Inhalt dieses Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernimmt der Autor für die Richtigkeit von Angaben und Hinweisen keine Haftung. Dieses Dokument wurde komplett auf Freeware geschrieben. Die Bilder wurden mit GIMP, Inkscape und Tikz erstellt/editiert. Für geometrische Darstellungen oder Visualisierungen von Lösungen, wurde Geogebra, GNUPlot und Tikz verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik, das Elektrische Feld	4
1.1	Größen, Einheiten Volumen und Flächen	4
1.2	Coulombsches Gesetz	4
1.3	Elektrische Feldstärke \vec{E}	4
1.4	Potentialfeld von Punktladungen	5
1.5	Elektrische Spannung U und Arbeit W	5
1.6	Leiter im E -Feld	5
1.7	Flussdichte D und Elektrischer Fluss Ψ	5
1.8	Elektrische Kapazität C	6
1.9	Wichtige Kondensatoren-Beispiele	6
1.10	Geschichtete Kondensatoren	7
1.11	Schaltungen mit Kondensatoren	7
1.12	Energie W und Kräfte F im E -Feld	7
1.13	Isolator im E -Feld	7
1.14	Mehrleitersysteme, Teilkapazitäten	8
2	Das Magnetische Feld	9
2.1	Begriffe und Definitionen	9
2.2	Größen und Einheiten	9
2.3	Kräfte auf Bewegte Ladungen	9
2.4	Magnetische Flussdichte B	10
2.5	Magnetische Feldstärke H	10
2.6	Magnetische Spannung V_m	11
2.7	Durchflutung Θ und Druchflutungssatz	11
2.8	Magnetischer Fluss Φ	11
2.9	Ohmsches Gesetz des Magnetismus (R_m und Λ)	11
2.10	Induktivität L	12
2.11	Materie im magnetischen Feld	12
2.12	Der magnetische Kreis	13
2.13	Engergie W und Kräfte F im magnetischen Feld	14
2.14	Isolator im E -Feld	15
2.15	Das Wichtigste Zum Schluss	15

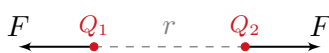
1 Elektrostatik, das Elektrische Feld

1.1 Grössen, Einheiten Volumen und Flächen

Grösse:	FZ:	Einheit:	Grösse:	FZ:	Einheit:	GF:	Formel:
Kraft	F	$N = \frac{kg}{m \cdot s^2}$	elektrisches Potential	φ	V	Kreis: u	$2 \pi r$
Arbeit, Energie	W	$Nm = Ws$	elektrische Spannung	U	V	Kreis: A	πr^2
Leistung	P	$W = \frac{Nm}{s}$	elektrische Flussdichte	D	$\frac{C}{m^2}$	Zyl: V_Z	$A h$
Energiedichte	w	$\frac{Ws}{m^3}$	elektrischer Fluss	Ψ	C	Zyl: O_Z	$2A + u h$
elektrische Feldstärke	E	$\frac{V}{m}$	elektrische Kapazität	C	$\frac{C}{V} = F$	Kugel: V_K	$\frac{4}{3} \pi r^3$
elektrische Ladung	Q	$C = As$	Flächenladungsdichte	σ	$\frac{C}{m^2}$	Kugel: O_K	$4 \pi r^2$

Permittivität	$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$	$\frac{As}{Vm}$	$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ (Elektrische Feldkonstante)	ϵ_r : Permittivitätszahl Vakuum: $\epsilon_r = 1$; Luft: $\epsilon_r \approx 1$
---------------	--	-----------------	---	--

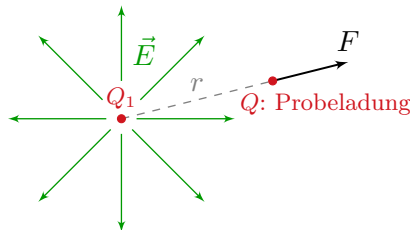
1.2 Coulombsches Gesetz



$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \pi \epsilon r^2} = Q \cdot \vec{E}$$

$F > 0$: Abstossung (+ +, - -)
 $F < 0$: Anziehung (+ -)

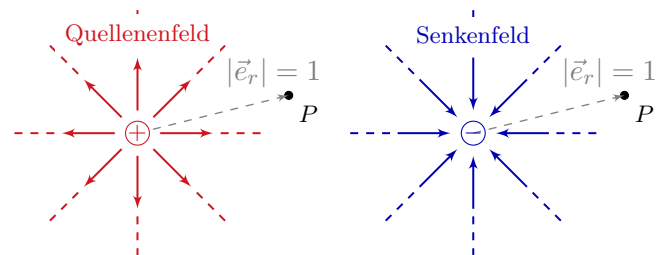
1.3 Elektrische Feldstärke \vec{E}



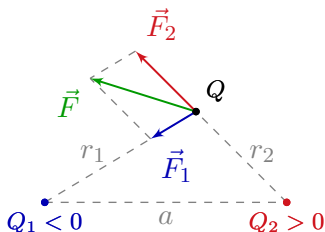
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$$

$Q_1 > 0$: Richtung von \vec{E} = Richtung von \vec{e}_r
 $Q_1 < 0$: Richtung von \vec{E} \neq Richtung von \vec{e}_r

Die Ladung Q_1 verwandelt ihre Umgebung in ein **elektrisches Feld**, wodurch nun Kräfte auf Probeladungen ausgeübt werden.

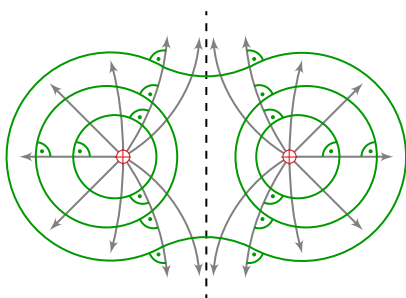


1.3.1 E-Feld mehrerer Punktladungen

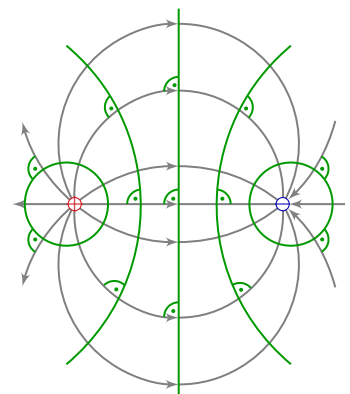


Die \vec{E} -Felder (bzw. Kräfte) aller Punktladungen können **vektoriell addiert** werden:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4 \pi \epsilon r_i^2} \vec{e}_{ri}$$



← Feldlinien gleicher Punktladungen
 Feldlinien ungleicher Punktladungen →



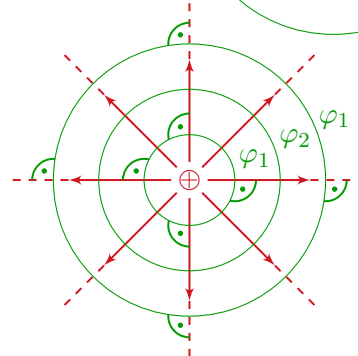
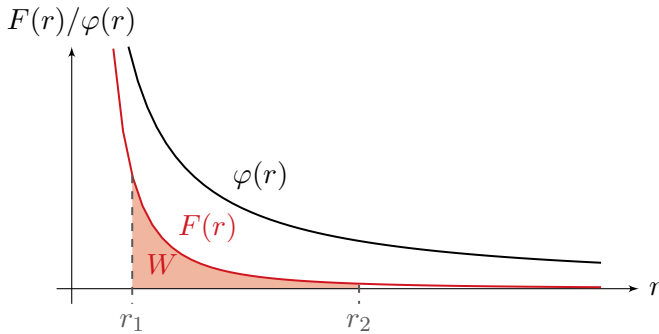
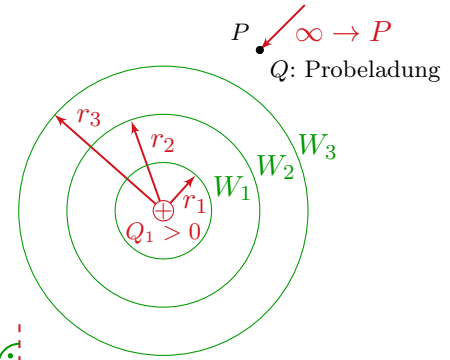
1.4 Potentialfeld von Punktladungen

Das Potential φ entspricht der Energie, die zum Heranschieben einer Probeladung vom $\infty \rightarrow P$ aufgewendet werden muss, dividiert durch die Probeladung.

$$\varphi = \frac{W}{Q} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r}$$

Bei **Überlagerung** der Potentialfelder von mehreren Punktladungen:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

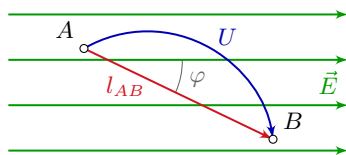


$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1 \cdot Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q_1 \cdot Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

- Das Potential nimmt in Feldlinienrichtung **ab!** ($\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$)
- Um eine Ladung auf einer Äquipotentialfläche zu verschieben, wird **keine Energie** benötigt.
- Äquipotentialflächen \perp elektrische Feldlinien.

1.5 Elektrische Spannung U und Arbeit W

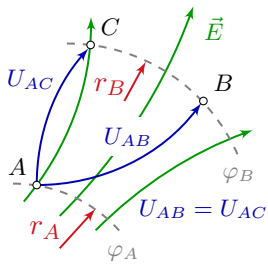
1.5.1 Homogenes E-Feld



$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \vec{l}_{AB} = E \cdot l_{AB} \cdot \cos(\varphi)$$

$$W_{AB} = U_{AB} \cdot Q$$

1.5.2 Inhomogenes E-Feld

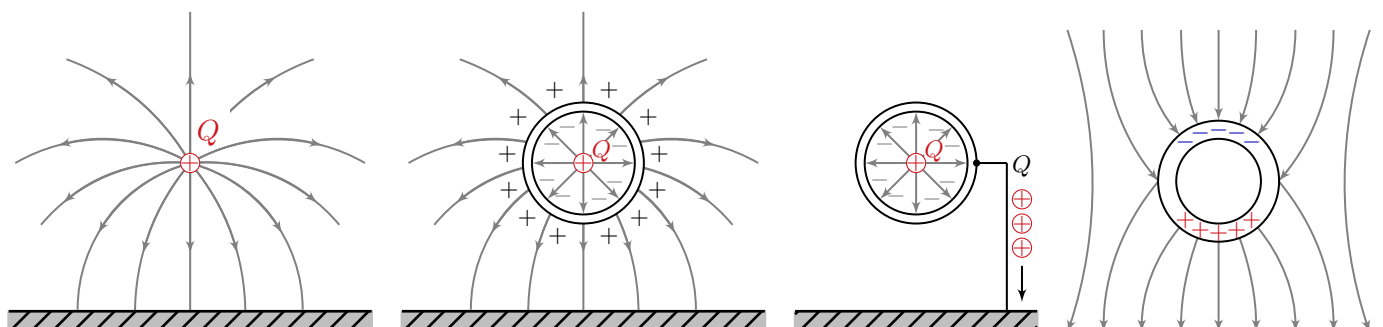


$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} = \int_A^B E(s) ds \quad | \text{ wenn } s \text{ einer Feldlinie folgt}$$

$$= \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad | \text{ für Punktladungen}$$

1.6 Leiter im E-Feld

- Das Innere eines Leiters im E-Feld ist feldfrei \Rightarrow ladungsfrei.
- Die elektrische Feldlinien \perp Leiteroberfläche \Rightarrow Oberfläche = Äquipotentialfläche
- Das E-Feld bewirkt auf ungeladenen Leitern eine Ladungstrennung \Rightarrow **Influenz**
- Das Innere eines leitenden Hohlkörpers ist frei von E-Feldern \Rightarrow **Faradayscher Käfig**



1.7 Flussdichte D und Elektrischer Fluss Ψ

$$\vec{D} = \frac{Q}{\vec{A}}$$

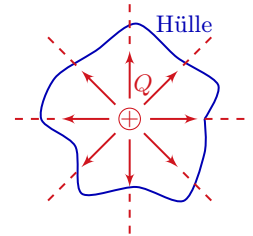
$$= \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

$$= D \cdot A \quad | \text{ wenn } \vec{D} \perp A$$

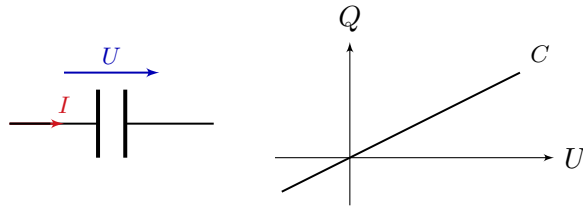
El. Fluss durch eine beliebige geschlossene Hülle:

$$\Psi_{\text{Hülle}} = \sum Q_{\text{eingeschlossen}}$$



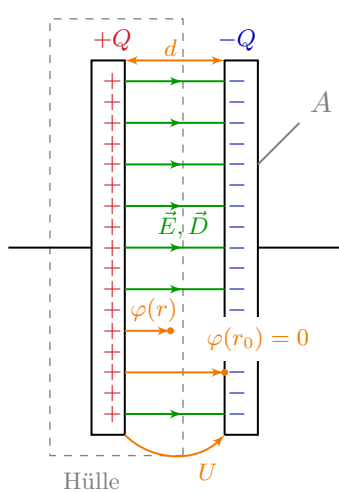
1.8 Elektrische Kapazität C

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow Q = C \cdot U = I \cdot t$$



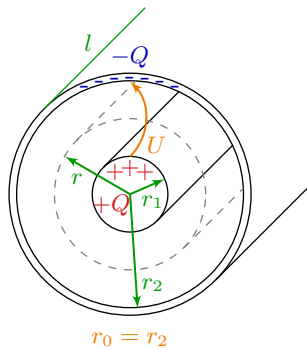
1.9 Wichtige Kondensatoren-Beispiele

Platenkondensator:



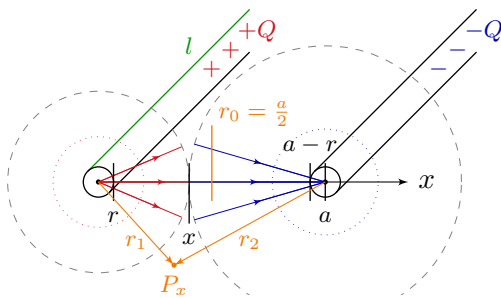
Q	$= C \cdot U$
C	$= \frac{\epsilon \cdot A}{d}$
E	$= \frac{Q}{\epsilon \cdot A}$
D	$= \frac{Q}{A}$
U	$= E \cdot d$
$\varphi(r)$	$= E(r_0 - r)$
σ	$= \frac{Q}{A}$

Zylinderkondensator:



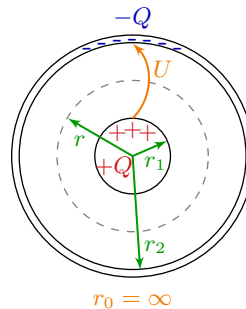
Q	$= C \cdot U$
C	$= \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$
$E(r)$	$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{1}{r}$
$D(r)$	$= \frac{Q}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r}$
U	$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
$\varphi(r)$	$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$
σ	$= \frac{Q}{2\pi l r_1}$

Paralleldrahtleitung:



C	$= \frac{\pi\epsilon l}{\ln (a-r)/r }$	U	$= \frac{Q}{\pi\epsilon l} \cdot \ln\left \frac{a-r}{r}\right $
$E(x)$	$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right)$	$\varphi(P_x)$	$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln\left \frac{r_2}{r_1}\right $
$D(x)$	$= \frac{Q}{2\pi l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right)$	σ	$= \frac{Q}{2\pi l r}$

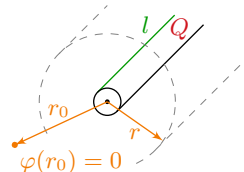
Kugulkondensator:



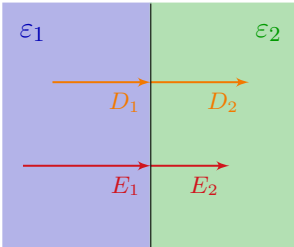
Q	$= C \cdot U$
C	$= \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$
$E(r)$	$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$
$D(r)$	$= \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$
U	$= \frac{Q \cdot (r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon r_1 r_2}$
$\varphi(r)$	$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$
σ	$= \frac{Q}{4\pi r_1^2}$

Einfacher Leiter:

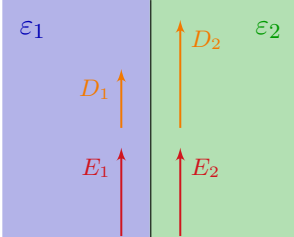
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{1}{r} \quad \varphi(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln\left|\frac{r_0}{r}\right|$$



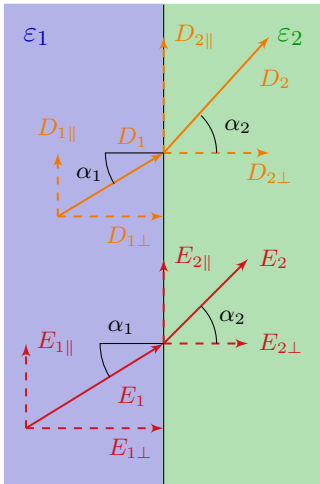
1.10 Geschichtete Kondensatoren



$D_1 = D_2$
 $E_1 \cdot \epsilon_1 = E_2 \cdot \epsilon_2$
 $\epsilon_2 > \epsilon_1 \Rightarrow E_2 < E_1$



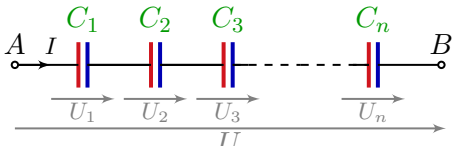
$E_1 = E_2$
 $\frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2}$
 $\epsilon_2 > \epsilon_1 \Rightarrow D_2 > D_1$



$D_{1\perp} = D_{2\perp}$
 $\frac{D_{1\parallel}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\parallel}}{\epsilon_2}$
 $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$
 $E_{1\perp} \cdot \epsilon_1 = E_{2\perp} \cdot \epsilon_2$
 $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

1.11 Schaltungen mit Kondensatoren

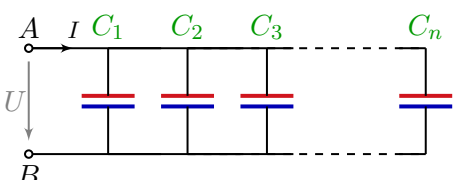
1.11.1 Serieschaltung



$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$

$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ für $n = 2$

1.11.2 Parallelschaltung



$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{k=1}^n C_k$

1.12 Energie W und Kräfte F im E-Feld

1.12.1 Energie W

Energiedichte im Kondensator:

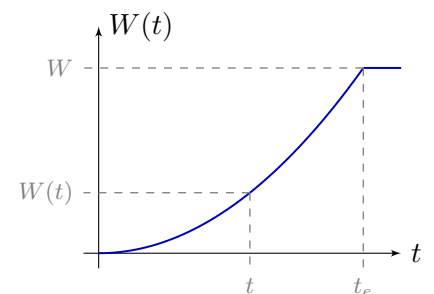
$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

Energie zur Zeit t:

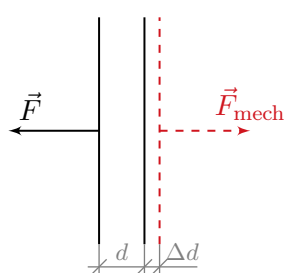
$$W(t) = \frac{I^2 \cdot t^2}{2C}$$

Im Kondensator gespeicherte Energie:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} C U^2}_{U = \text{konstant (mit Quelle)}} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{Q^2}{C}}_{Q = \text{konstant (ohne Quelle)}}$$



1.12.2 Kraft F

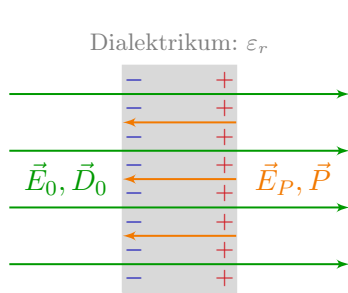


$$\Delta W_{\text{mech}} = F_{\text{mech}} \cdot \Delta s = \Delta W_{\text{Feld}}$$

$$\begin{aligned}
 F &= F_{\text{mech}} \\
 &= \left| \frac{\Delta W_{\text{Feld}}}{\Delta s} \right| \\
 &= \left| \frac{d}{ds} W_{\text{Feld}}(s) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E^2 \cdot A \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot \frac{U^2}{d^2} \cdot A
 \end{aligned}$$

1.13 Isolator im E-Feld



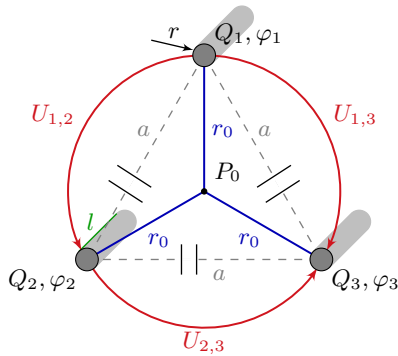
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P \Rightarrow E = E_0 - E_P \quad E_P = p \cdot E_0 \quad | 0 \leq p < 1 : \text{Polarisierbarkeit}$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P} \Rightarrow D = D_0 - P \quad P = p \cdot D_0 \quad | P : \text{el. Polarisationsvektor}$$

$$\frac{D_0}{E} = \frac{D_0}{E_0(1-p)} = \frac{D_0}{E_0} \cdot \frac{1}{(1-p)} \Rightarrow D_0 = \underbrace{\epsilon_0}_{\epsilon_0} \cdot \underbrace{(1-p)}_{\epsilon_r} \cdot E$$

$$\epsilon_r \text{ grösser} \Rightarrow E \text{ kleiner} \Rightarrow U \text{ kleiner} \Rightarrow C \text{ grösser}$$

1.14 Mehrleitersysteme, Teilkapazitäten



$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{12} \cdot U_{12} + C_{13} \cdot U_{13} \\ Q_2 &= C_{21} \cdot U_{21} + C_{23} \cdot U_{23} \\ Q_3 &= C_{31} \cdot U_{31} + C_{32} \cdot U_{32} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} l &\gg a \text{ und } a \gg r \\ Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n &= 0 \\ C_{12} &= C_{21} ; C_{13} = C_{31} ; C_{23} = C_{32} \\ U_{12} &= -U_{21} ; U_{13} = -U_{31} ; U_{23} = -U_{32} \end{aligned}$$

2 Das Magnetische Feld

2.1 Begriffe und Definitionen

Pole:	Orte stärkster Anziehung Sie treten immer Paarweise auf (N, S) gleiche Pole → Abstossung; ungleiche Pole → Anziehung
Feldlinien:	Ausserhalb: N-S; Innerhalb S-N N-Spitze eines Kompasses zeigt in Feldlinienrichtung
	Das Magnetfeld ist quellenfrei

2.2 Grössen und Einheiten

Grösse:	FZ:	Einheit:	Grösse:	FZ:	Einheit:
Kraft	F	$N = \frac{kg}{m \cdot s^2}$	Durchflutung	Θ	A
Arbeit, Energie	W	$Nm = Js$	magnetische Spannung	V_m	A
Leistung	P	$W = \frac{Nm}{s}$	magnetischer Fluss	Φ	$Vs = Wb$
Energiedichte	w_m	$\frac{Ws}{m^3}$	magnetischer Widerstand	R_m	$\frac{A}{Vs} = \frac{A}{Wb}$
magnetische Feldstärke	H	$\frac{A}{m}$	magnetischer Leitwert	Λ	$\frac{Vs}{A} = H$
magnetische Flussdichte	B	$\frac{Vs}{m^2} = T$	Induktivität	L	$\frac{Vs}{A} = H$

Permeabilität	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$	$\frac{Vs}{Am}$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ (Magnetische Feldkonstante)	μ_r : Permeabilitätszahl Vakuum: $\mu_r = 1$
Elektron	$Q_e = e$	C	$e = -1.602 \cdot 10^{-19} C$	
Masse-e	m_e	kg	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$	

2.3 Kräfte auf Bewegte Ladungen

2.3.1 Ampèresche Kraft F_A

$$F_A = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q_1 v_1 \cdot Q_2 v_2}{r^2}$$

Q_1 und Q_2 auf **gleicher Höhe**

Richtung von \vec{F}_A :

Anziehung:	\vec{v}_1, \vec{v}_2 gleiche Richtung	und $Q_1 \cdot Q_2 > 0$
	\vec{v}_1, \vec{v}_2 entgegengesetzte Richtung	und $Q_1 \cdot Q_2 < 0$
Abstossung:	\vec{v}_1, \vec{v}_2 gleiche Richtung	und $Q_1 \cdot Q_2 < 0$
	\vec{v}_1, \vec{v}_2 entgegengesetzte Richtung	und $Q_1 \cdot Q_2 > 0$

2.3.2 Lorenzkraft F_L auf Punktladungen

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

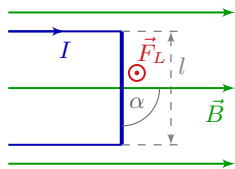
$$F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

$F_L \perp \vec{B} \cap F_L \perp \vec{v}$
 $\alpha =$ Winkel zwischen \vec{v} und \vec{B}

Richtung von \vec{F}_L (Rechte Hand Regel):

\vec{v} :	Daumen	für $Q > 0$!
\vec{B} :	Zeigefinger	falls $Q < 0$;
\vec{F}_L :	Mittelfinger	⇒ Richtung von F_L umkehren

2.3.3 Lorenzkraft F_L auf stromführenden Leiter



$$\vec{F}_L = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

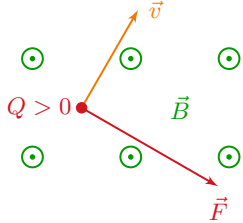
$$F_L = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_L \perp \vec{B} \cap F_L \perp \vec{l}$$

\vec{l} hat die Richtung des Stromes.

α = Winkel zwischen \vec{l} und \vec{B}

2.4 Magnetische Flussdichte B



⊙ Vektor aus der Ebene

⊗ Vektor in die Ebene

Die **magnetische Flussdichte** B hängt direkt mit den **Wirkungen** (Kräfte) des Magnetfeldes zusammen.

$$B = \frac{F}{Q \cdot v} \quad \text{mit} \quad \vec{v} \perp \vec{B}$$

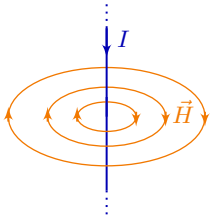
2.5 Magnetische Feldstärke H

Die **magnetische Feldstärke** H hängt direkt mit der **Ursache**(d.h. mit den Strömen, die das magnetische Feld erzeugen) des Magnetfeldes zusammen.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

2.5.1 Magnetfelder H bei verschiedenen Geometrischen Anordnungen

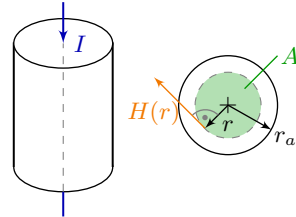
Ausserhalb eines langen, geraden Leiters:



$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad H \sim \frac{1}{r}$$

$r \geq$ Drahtradius

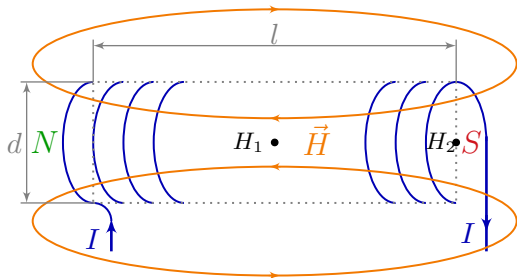
Innerhalb eines langen, geraden Leiters:



$$H(r) = \frac{I \cdot r}{2\pi r_a^2} \quad H \sim r$$

$0 \leq r \leq r_a$

Zylinderspule:

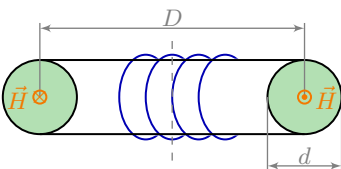


$$H \approx \frac{N \cdot I}{l} \quad \text{nur wenn: } l \gg d$$

sonst:

$$H_1 = \frac{N \cdot I}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{d}{l})^2}} \quad H_1 = \frac{N \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{d}{2l})^2}}$$

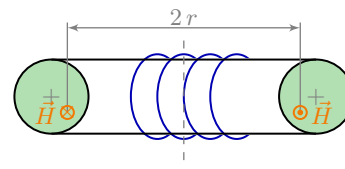
Toroidspule, Spulenmitte:



$$H = \frac{N \cdot I}{D \cdot \pi}$$

ausserhalb der Spule ≈ 0

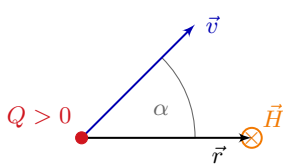
Toroidspule, ausserhalb der Mitte:



$$H = \frac{N \cdot I}{2r \cdot \pi}$$

ausserhalb der Spule ≈ 0

Bewegte Punktladungen:

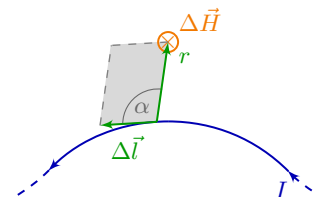


$$H = \frac{Q}{4\pi r^3} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})$$

$$H = \frac{Q v \sin(\alpha)}{4\pi r^2}$$

Richtung von \vec{H} ändert für $Q < 0$

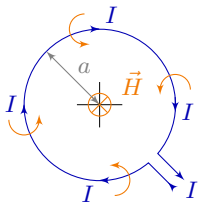
Ströme beliebiger Leiterformen:



$$H = \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

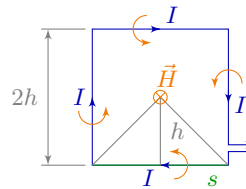
S = Stromkreis

Zentrum einer kreisförmigen Leiterschleife:



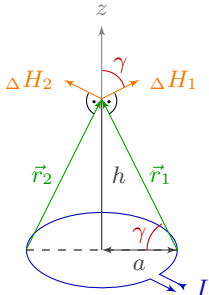
$$H = \frac{I}{2a}$$

Zentrum einer quadratischen Leiterschleife:



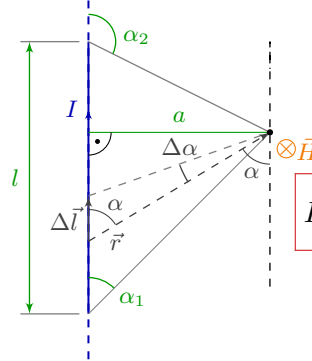
$$H = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot h} = \frac{I \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot s}$$

Achse einer kreisförmigen Leiterschleife:



$$H = \frac{I \cdot a^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2}^3}$$

Ausserhalb eines endlichen, geraden Leiters:



$$H = \frac{I}{4\pi a} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2))$$

2.6 Magnetische Spannung V_m

Aufsummierung der Feldstärke H über den Weg s :

$$V_m = \int_A \vec{H}(s) d\vec{s}$$

Homogenes H -Feld:

$$V_m = H \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)$$

α = Winkel zwischen \vec{H} und \overline{AB}

H -Feld eines geraden Leiters:

$$\overset{\circ}{V}_m = H \cdot 2\pi r$$

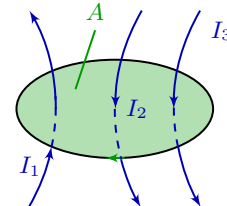
Umlaufspannung $\overset{\circ}{V}_m \neq 0$

2.7 Durchflutung Θ und Durchflutungssatz

Durchflutung Θ einer Fläche A = Gesamtstrom I durch A

$$\Theta = \int_A \vec{J} d\vec{A} + \sum_{k=1}^n I_k$$

konkrete Ströme I_k dürfen im Integral nicht mitgerechnet werden!!!



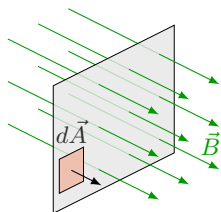
$$\Theta = -I_1 + I_2 + I_3$$

festgelegte Umlaufrichtung

Durchflutungssatz:

$$\overset{\circ}{V}_m = \oint \vec{H}(s) d\vec{s} = \Theta$$

2.8 Magnetischer Fluss Φ



Aufsummierung der Flussdichte B über die Fläche A :

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Homogenes B -Feld:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$

α = Winkel zwischen \vec{B} und \vec{A} (bzw. \vec{e}_n)

B -Feld \perp auf A :

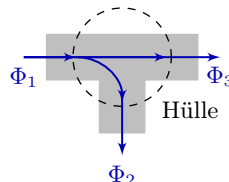
$$\Phi = \int_A B dA$$

Gesamtfluss Φ durch eine beliebige Hülle:

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

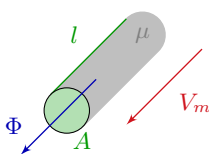
bzw.

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0$$



$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

2.9 Ohmsches Gesetz des Magnetismus (R_m und Λ)



Magnetischer Widerstand R_m bzw. magnetischer Leitwert Λ :

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi}{V_m}$$

Ohmsches Gesetz

des magnetischen Kreises:

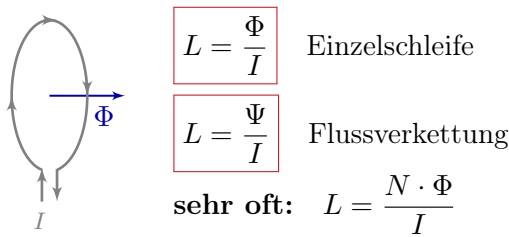
$$V_m = \Theta = R_m \cdot \Phi$$

$$\Phi = \Theta \cdot \Lambda$$

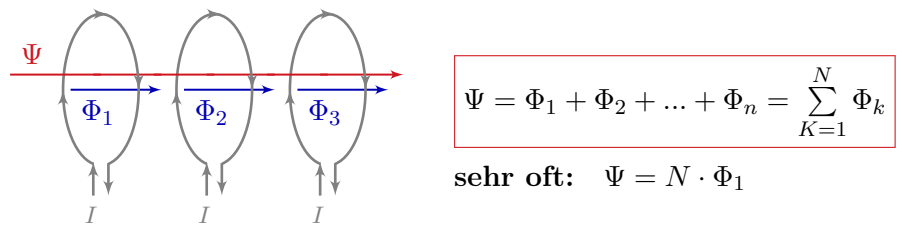
2.10 Induktivität L

2.10.1 Selbstinduktivität, Flussverkettung

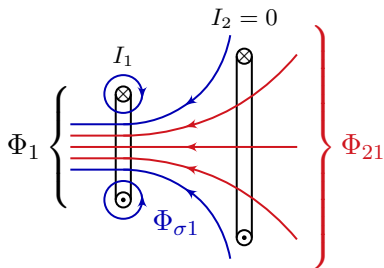
Selbstinduktivität:



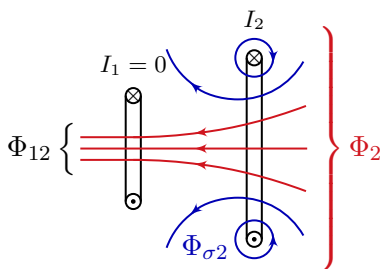
Verketteter Fluss:



2.10.2 Gegeninduktivität



$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$ meistens: $M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}$
 1. Index: Wirkung
 2. Index: Ursache
 Φ_{21} : Teil von Φ_1 , welcher Spule 2 durchsetzt \Rightarrow **Hauptfluss**, Nutzfluss
 $\Phi_{\sigma 1}$: Teil von Φ_1 , welcher nicht an Kopplung beteiligt \Rightarrow **Streufuss**
 $\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_{21} + \Phi_{\sigma 1}$



$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$ meistens: $M_{12} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$
 1. Index: Wirkung
 2. Index: Ursache
 Φ_{12} : Teil von Φ_2 , welcher Spule 1 durchsetzt \Rightarrow **Hauptfluss**, Nutzfluss
 $\Phi_{\sigma 2}$: Teil von Φ_2 , welcher nicht an Kopplung beteiligt \Rightarrow **Streufuss**
 $\Rightarrow \Phi_2 = \Phi_{12} + \Phi_{\sigma 2}$

\Rightarrow Rezipozität: $M_{12} = M_{21} = M$ für $\mu = \text{konst.}$

Ideale Kopplung:

$\Phi_{21} = \Phi_1 \cap \Phi_{\sigma 1} = 0$

bzw. $\Phi_{12} = \Phi_2 \cap \Phi_{\sigma 2} = 0$

$\Rightarrow M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

nicht-ideale Kopplung:

$\Phi_{21} < \Phi_1 \cap \Phi_{\sigma 1} \neq 0$

bzw. $\Phi_{12} < \Phi_2 \cap \Phi_{\sigma 2} \neq 0$

$\Rightarrow M < \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

Kopplungsfaktor:

$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$

Streukoeffizient:

$\sigma = 1 - k^2$

$k = 1$: ideale Kopplung

$k \approx 1$: feste Kopplung

$k < 0.8$: lose Kopplung

2.10.3 Äussere und innere Induktivität

Zusätzlich zur äusseren Induktivität L_a ausserhalb des Leiters, gibt es auch noch eine innere Induktivität L_i im innern des Leiters.

$L = L_a + L_i$ sehr oft: $L_i \ll L_a \Rightarrow L \approx L_a$

L_i eines Leiters: $L_i = \frac{\mu \cdot l}{8\pi}$

2.11 Materie im magnetischen Feld

Im Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ In Materie: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$

Diamagnetische Stoffe: $\mu_r < 1 \quad \mu_1 \approx 1$

\rightarrow Magnetfeld in Materie schwächer als in der Luft.

Bsp: Kupfer, Silber, Wismut, Blei, Glas

Paramagnetische Stoffe: $\mu_r > 1 \quad \mu_1 \approx 1$

\rightarrow Magnetfeld in Materie stärker als in der Luft.

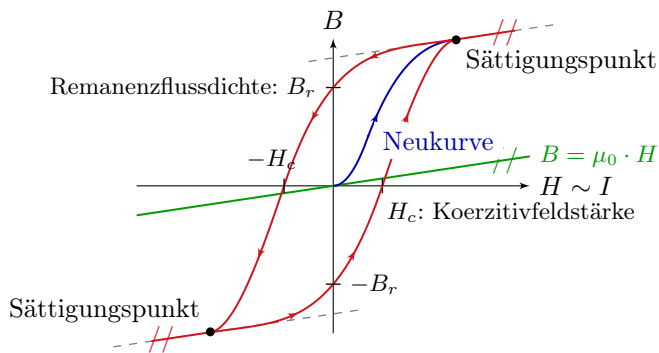
Bsp: Aluminium, Platin

Ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \gg 1 \quad \mu_1 \approx 10^5$

\rightarrow grösste Praktische Bedeutung, da "magnetisch leitend"

Bsp: Eisen, Nickel, Kobalt

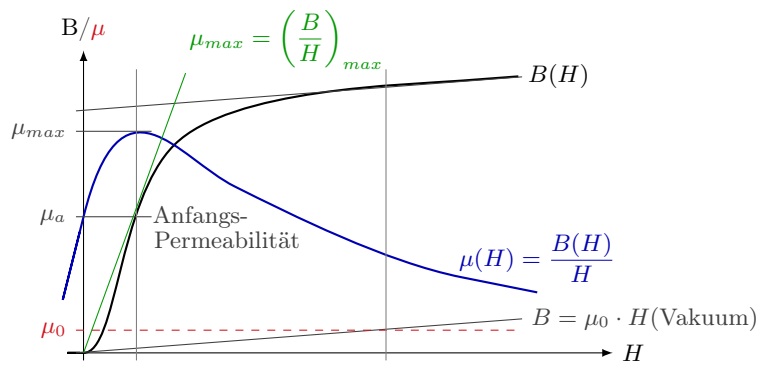
2.11.1 Magnetisierungskennlinie (Hystereseschleife)



Weichmagnetische Stoffe:

Stoffe mit kleiner Koerzitivfeldstärke H_c

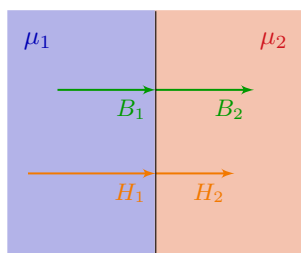
2.11.2 Magnetisierungskurve \approx Neukurve



Hartmagnetische Stoffe:

Stoffe mit grosser Koerzitivfeldstärke H_c

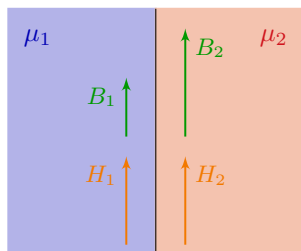
2.11.3 Geschichtete Materie



$$B_1 = B_2$$

$$H_1 \cdot \mu_1 = H_2 \cdot \mu_2$$

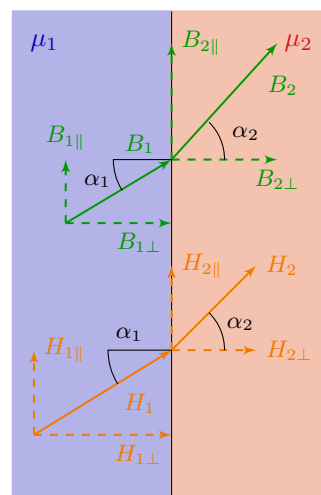
$$\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow H_2 < H_1$$



$$H_1 = H_2$$

$$\frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_2}{\mu_2}$$

$$\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow B_2 > B_1$$



$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$\frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2}$$

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$$

$$H_{1\perp} \cdot \mu_1 = H_{2\perp} \cdot \mu_2$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

2.12 Der magnetische Kreis

Magnetkreise: Anordnungen aus Magnetfeld-Quellen (Spulen, Dauermagnete) und ferromagnetischen Teilen (führen Magnetfluss auf einem vorgeschriebenen Weg)

- Unterscheidungen: $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ unverzweigt, verzweigt} \\ - \text{ mit, ohne Luftspalt} \\ - \text{ linear } (\mu = \text{konst.}), \text{ nicht linear} \end{array} \right.$

2.12.1 Füllfaktor, Luftspalt

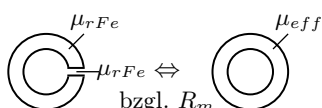
Füllfaktor F :

Da das Eisen aus dünnen, voneinander isolierten Blechen aufgebaut ist, entspricht der geometrische Querschnitt nicht genau dem Eisenquerschnitt: $\Rightarrow A_{Fe} = F \cdot A_{geom} \quad F < 1$

Luftspalt:

Für den Luftspalt entspricht der geometrische Querschnitt ungefähr dem Luftquerschnitt (wenn Rand- und Streueffekte vernachlässigt werden): $\Rightarrow A_L \approx A_{geom} = \frac{A_{Fe}}{F} \Rightarrow A_L > A_{Fe}$

2.12.2 Effektive Permeabilität μ_{eff} , Luftspaltkenngrosse α

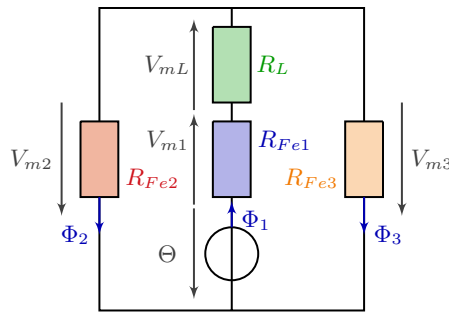
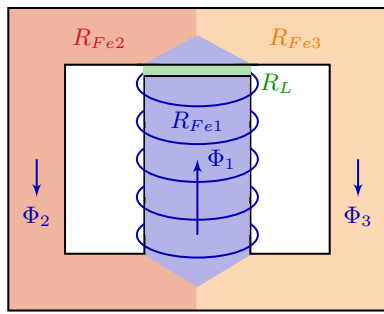


Magn. Widerstand des Eisenkern mit Luftspalt (μ_{rL} und μ_{rFe}) = Magn. Widerstand des Eisenkern ohne Luftspalt (μ_{reff})

Effektive Permeabilität: $\mu_{reff} = \frac{\alpha \cdot \mu_{rFe}}{\alpha + \mu_{rFe}}$

Luftspaltkenngrosse: $\alpha = \frac{l_{Fe} \cdot A_L}{l_L \cdot A_{Fe}}$

2.12.3 Ersatzschaltbild des Magnetkreises



	el. Kreis:	mag. Kreis:
Fluss	I	Φ
Spannung	U	V_m
Quelle	U_q	Θ
Widerstand	R	R_m
Leitwert	G	Λ
Ohmsches Gesetz	$U = R \cdot I$	$V_m = R_m \cdot \Phi$
Maschensatz	$U_q = \sum_{k=1}^n U_k$	$\Theta = \sum_{k=1}^n V_{mk}$
Knotensatz	$\sum_{k=1}^n I_k = 0$	$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0$

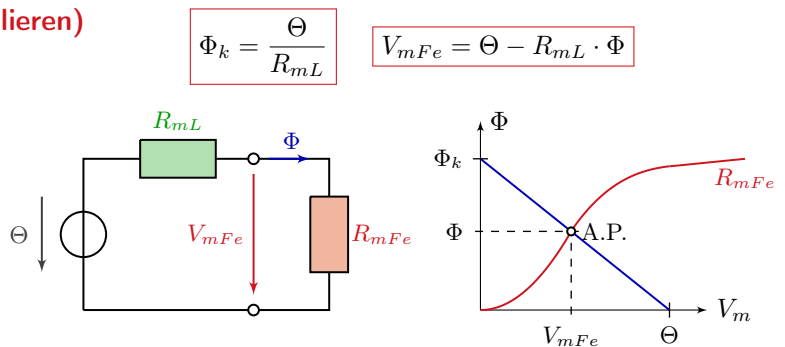
2.12.4 Nicht-Lineare Magnetkreise

Gegeben: Φ bzw. B
 Gesucht: Θ } \Rightarrow Nichtlinearität des Eisens kein Problem (H aufgrund von B aus Kurve ablesbar)

Gegeben: Θ
 Gesucht: Φ bzw. B } \Rightarrow Nichtlinearität des Eisens verursacht Probleme (R_{mFe} ist abhängig vom gesuchten Φ)

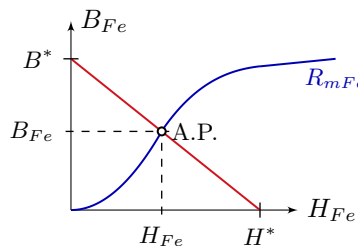
2.12.4.1 Quellenersatzschaltung (Achsen Umskalieren)

- linear Teil $\rightarrow R_{mL}$
 nicht linearer Teil $\rightarrow R_{mFe}$
- Achsen im $B = f(H)$ -Diagramm umskalieren.
 $\Phi_{Fe} = B_{Fe} \cdot A_{Fe}$ $V_{mFe} = H_{Fe} \cdot l_{Fe}$
- Φ_k berechnen und "Quellenkennlinie" einzeichnen
- Am Arbeitspunkt Φ und V_{mFe} herauslesen



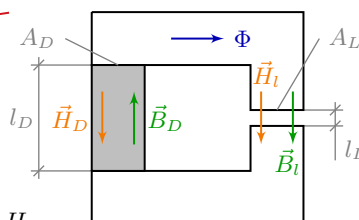
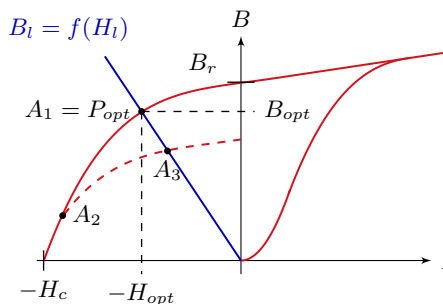
2.12.4.2 Quellenersatzschaltung (Quellen-Werte umrechnen in $B = F(H)$ -Diagramm)

- linear Teil $\rightarrow R_{mL}$
 nicht linearer Teil $\rightarrow R_{mFe}$
- B^* und H^* berechnen
 $B^* = \frac{\mu_0 A_L \Theta}{l_l A_{Fe}}$ $H^* = \frac{\Theta}{l_{Fe}}$
- "Quellenkennlinie" einzeichnen
- Am Arbeitspunkt B_{Fe} und H_{Fe} herauslesen



Achtung:
 Nur Anwenden, wenn im ganzen (unverzweigten) Magnetkreis der Eisenquerschnitt konstant ist!

2.12.5 Magnetischer Kreis mit Permanentmagnet



optimaler Betriebspunkt (H_{opt}, B_{opt}) :

Optimal bez. Volumen:
 $\Rightarrow |H \cdot B|_{max} = H_{opt} \cdot B_{opt}$

$$l_D = \frac{H_L \cdot l_L}{H_{opt}} = \frac{B_L \cdot l_L}{\mu_0 \cdot H_{opt}} \quad A_D = \frac{B_L \cdot A_L}{s \cdot B_{opt}}$$

Strefaktor s : $\Phi_L = s \cdot \Phi_D \quad s < 1$

Fluss Φ : $\Phi = \Phi_D$

Magn. Spannung V_m : $V_{mD} = -V_{mL} \Leftrightarrow H_D \cdot l_D = -H_L \cdot l_L$

Luftspalt: $B_L = -\frac{\mu_0 \cdot H_D \cdot l_D}{l_L} = \frac{s \cdot A_D \cdot B_D}{A_L}$

Magnetkreis wird im Optimum betrieben:

\rightarrow Luftspalt wird vergrößert $\rightarrow A_2$

\rightarrow Luftspalt wird wieder verkleinert $\rightarrow A_3$

\rightarrow Magnetische Kraft (B -Feld) geht verloren!

2.13 Energie W und Kräfte F im magnetischen Feld

2.13.1 Energie W_m

Energie im homogenen Feld:

$$W_m = w_m \cdot V = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \cdot V$$

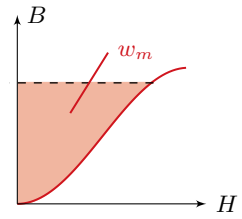
Energie im allgemeinen Feld:

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \stackrel{\text{oft}}{=} \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Phi \cdot I$$

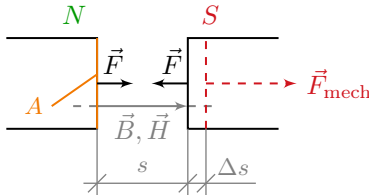
Energiedichte:

$$w_m = \int_0^B \vec{H} d\vec{B} \stackrel{\text{oft}}{=} \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$$

Grossteil der Energie steckt im Luftspalt, da dort R_m und somit H sehr gross ist.



2.13.2 Kraft F



$$\Delta W_{\text{mech}} = F_{\text{mech}} \cdot \Delta s = \Delta W_{\text{Feld}}$$

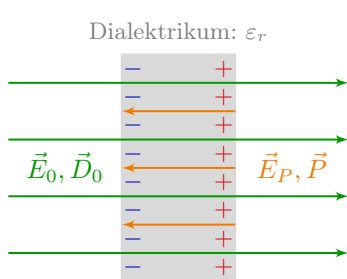
$$F = F_{\text{mech}} = \left| \frac{\Delta W_{\text{Feld}}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d}{ds} W_{\text{Feld}}(s) \right|$$

$$F = \frac{B \cdot H \cdot A}{2} = \frac{\mu_0 \cdot H^2 \cdot A}{2} = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{\Phi \cdot B}{2 \cdot \mu_0}$$

Kraft ist vom ferromagnetischen Material zur nichtferromagnetischen Umgebung gerichtet

⇒ **Induktivität vergrössern**

2.14 Isolator im E -Feld



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P \Rightarrow E = E_0 - E_P \quad E_P = p \cdot E_0 \quad |0 \leq p < 1 : \text{Polarisierbarkeit}$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P} \Rightarrow D = D_0 - P \quad P = p \cdot D_0 \quad |P : \text{el. Polarisationsvektor}$$

$$\frac{D_0}{E} = \frac{D_0}{E_0(1-p)} = \underbrace{\frac{D_0}{E_0}}_{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{D_0}{(1-p)D_0}}_{\epsilon_r} \Rightarrow D_0 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E$$

$$\epsilon_r \text{ grösser} \Rightarrow E \text{ kleiner} \Rightarrow U \text{ kleiner} \Rightarrow C \text{ grösser}$$

2.15 Das Wichtigste Zum Schluss

Kreisförmige Schleife:

$$\Lambda = \frac{\mu D}{2} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

Kreisrahmenspule:

$$\Lambda = \frac{\mu D}{2} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

Zylinderspule:

$$\Lambda = \frac{\mu A}{l} = \frac{\mu \pi d^2}{4l}$$

Toroidspule:

$$\Lambda = \frac{\mu A}{l_m} = \frac{\mu d^2}{4 D_m}$$

Ringspule mit rechteckf. Querschnitt:

$$\Lambda = \frac{\mu a}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

Koaxialleitung:

$$\Lambda = \frac{\mu l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Paralleldrahtleitung:

$$\Lambda = \frac{\mu l}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-r}{r}\right)$$

2.15.1 Allgemeingültige Formeln:

Durchflutung:

$$\Theta = \Phi \cdot R_m$$

Feldstärke:

$$H = \frac{V_m}{l} = \frac{\Theta}{l}$$

Flussdichte:

$$B = H \cdot \mu$$

Fluss:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \Theta \cdot \Lambda$$

Induktivität:

$$L = \Lambda \cdot N^2 = \frac{N^2}{R_m}$$

Spannung:

$$U = B \cdot l \cdot v$$

$$\Theta \stackrel{\text{oft}}{=} N \cdot I$$

$$\Phi = B \cdot A$$

$$L = \frac{\Psi}{I} \stackrel{\text{oft}}{=} \frac{\Phi \cdot N}{I}$$

Stichwortverzeichnis

Elektrostatik, 4

Kugelkondensator, 6

Magnetismus, 9

Paralleldrahtleitung, 6

Platenkondensator, 6

Zylinderkondensator, 6