

Digitale Signalverarbeitung 2

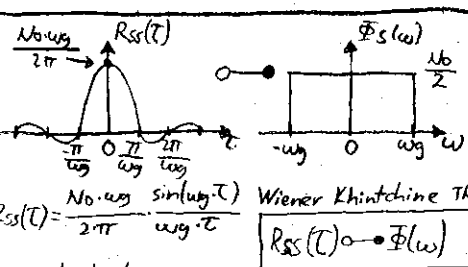
$$m_s = s(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot dt$$

$$P_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) \cdot dt$$

$$s_{eff} = \sqrt{P_s}$$

$$v_s = \sigma_s^2 = \overline{[s(t) - m_s]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) - m_s]^2 \cdot dt$$

m_s = Linearer Mittelwert (DC-Wert)
 P_s = Quadratischer Mittelwert (Leistung)
 s_{eff} = Effektivwert
 v_s = Varianz (AC-Leistung)



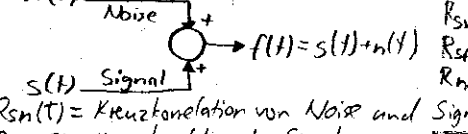
lange, breite, langsam abklingende AKF "Grosse Korrelation", d.h. Korrelation auch über lange Zeit in z-rale T hinweg

Signal mit kleiner Bandbreite, d.h. schmalen Leistungsdichtespektrum

Kreuzkorrelation und Kreuzspektrum:

a) Signale aus unabhängigen Quellen:
 $R_{sf}(T) = 0$; z.B. Rauschen und Sprachsignal sind vollständig unkorreliert & statistisch unabhängig

b) Überlagerung unkorrelierter Signale:
 $n(t)$ Noise



$R_{sn}(T) = 0$
 $R_{sf}(T) = R_{ss}(T)$
 $R_{nf}(T) = R_{nn}(T)$

c) Verzögerung eines Signals:
 $S(t)$ Signal, $f(t) = s(t-T)$

$$R_{ff}(T) = R_{ss}(T)$$

$$R_{sf}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot f(t+T) \cdot dt$$

Die KKF $R_{sf}(T)$ ist im allgemeinen eine geraden symmetrische Funktion.

$$R_{sf}(T) = R_{sf}(-T)$$

$$R_{sf}(T) \leftrightarrow \Phi_{sf}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{sf}(T) \cdot e^{-jwT} \cdot dt$$

$$\Phi_{sf}(w) = \text{Kreuzleistungsdichtespektrum (nicht rein reell)}$$

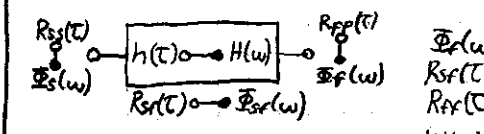
$$\Phi_{sf}(w) = \Phi_{fs}^*(w)$$

Methoden der digitalen Signalverarbeitung:

	kontinuierlich	diskret	Wertenummern
Signal	$s(t)$	$s(m \cdot \Delta t)$	$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$
Signal	$f(t)$	$f(m \cdot \Delta t)$	$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$
AKF	$R_{ss}(T)$	$R_{ss}(n \cdot \Delta t)$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
KKF	$R_{sf}(T)$	$R_{sf}(n \cdot \Delta t)$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Leistungsdichtespektrum	$\Phi_s(f)$	$\Phi_s(k \cdot \Delta f)$	$k = 0, 1, 2, 3, \dots$
Kreuzspektrum	$\Phi_{sf}(f)$	$\Phi_{sf}(k \cdot \Delta f)$	$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Autokorrelation und Energiedichtespektrum:

Energiebegrenzendes Signal: $s(t) \rightarrow S(w)$
 Energiedichtespektrum: $E(w) = |S(w)|^2 = S(w) \cdot S^*(w)$
 $E(w) \leftrightarrow e(t) = s(t) * s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(\tau+t) \cdot d\tau$
 Energiebegrenzte AKF: $e(t) = R_{ss}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t+T) \cdot dt$
 Signalenergie: $R_{ss}(0) = W$; $R_{ss}(T) \rightarrow |S(w)|^2 = E(w)$
 ↑ Signal $s(t)$ und Abbild $s(t+T)$ sind identisch



Die AKF ist eine gerade, positive und rein reelle Funktion.
 Die KKF gibt an wie ähnlich sich zwei Signale sind. Je größer der Wert, desto ähnlicher sind sich die Signale an diesem Ort.
 $R_{ss}(0)$ = Leistung des Signals

Die AKF ist ein Mass für die Übereinstimmung des Signals (bei des Signalverlaufs, der Signalform) mit dem eigenen, um T verschoben Abbild $s(t+T)$, und zwar als Funktion der Verschiebung T.
 ⇒ Die AKF wird nie höher als der Wert an der stelle Null

$$\Phi_f(w) = \Phi_s(w) \cdot |H(w)|^2$$

$$|H(w)|^2 = H(w) \cdot H^*(w)$$

$$R_{ff}(T) = R_{ss}(T) * h(T)$$

$$R_{ff}(T) = R_{ss}(T) * R_{hh}(T)$$

$$R_{hh}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot h(t+T) \cdot dt$$

$$|H(w)| = \sqrt{\frac{\Phi_f(w)}{\Phi_s(w)}}$$

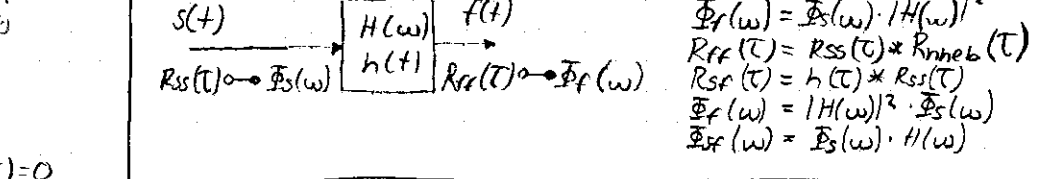
$\Phi_s(w)$ = Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals [V²/m]
 $\Phi_f(w)$ = Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals [V²/m]
 $R_{ss}(T)$ = Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals
 $R_{ff}(T)$ = Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals
 $h(T)$ = Stossantwort des Systems im Zeitbereich
 $H(w)$ = Stossantwort des Systems im Frequenzbereich

Signal endlicher Leistung:

	Frequenzbereich	Zeitbereich
Energiebegrenzendes Signal:	$W_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_s(w) \cdot dw$	$W_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt$
Leistungsbegrenzendes Signal:	$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(w) \cdot dw$	$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) \cdot dt$

$\Phi_s(w) = 2 \cdot \Phi_s(w) \cdot w$
 Φ_s = zweiseitiges Leistungsdichtespektrum [V²/m]
 $\Psi_s(w) =$ einseitiges Leistungsdichtespektrum

Stochastische Signale und lineare Systeme:



$$\Phi_f(w) = \Phi_s(w) \cdot |H(w)|^2$$

$$R_{ff}(T) = R_{ss}(T) * R_{hh}(T)$$

$$R_{ff}(T) = h(T) * R_{ss}(T)$$

$$\Phi_f(w) = |H(w)|^2 \cdot \Phi_s(w)$$

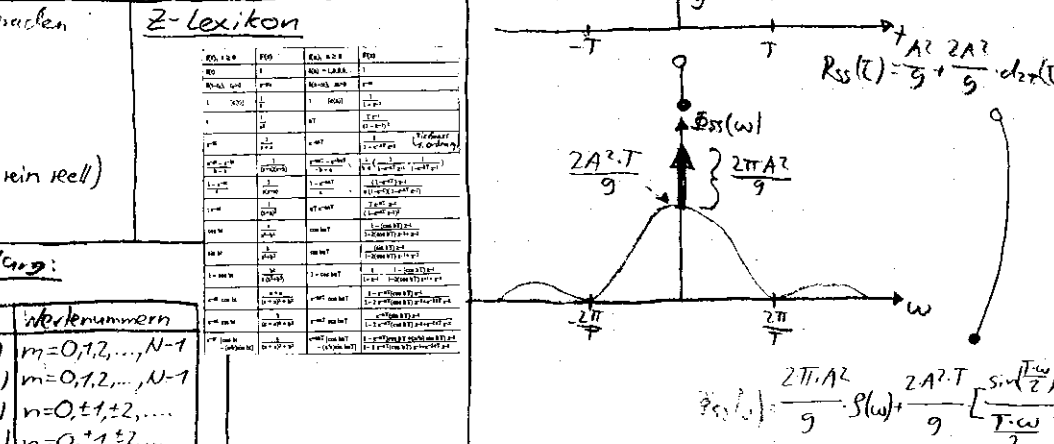
$$\Phi_{ff}(w) = \Phi_s(w) \cdot |H(w)|^2$$

Autokorrelation für digitale Signale

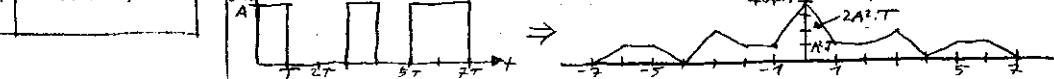
bsp: $p_0 = \frac{2}{3}$; $p_1 = \frac{1}{3}$ (Wahrscheinlichkeiten für 1 oder 0)

Amplitude für 1 ist $A_1 = A$
 Amplitude für 0 ist $A_2 = 0$

$$R_{ss}(0) = A_1^2 \cdot p_1 + A_2^2 \cdot p_0 = \frac{A^2}{3}$$
 (Leistung)
$$R_{ss}(|T| > T) = A_1 \cdot A_1 \cdot p_1 \cdot p_1 + A_1 \cdot A_0 \cdot p_1 \cdot p_0 + A_0 \cdot A_1 \cdot p_0 \cdot p_1 + A_0 \cdot A_0 \cdot p_0 \cdot p_0$$

$$R_{ss}(|T| > T) = \frac{A^2}{9}$$


Autokorrelation für Energiebegrenzendes Signal



Z-Lexikon

Symbol	Bedeutung	Symbol	Bedeutung
Δ	Differenz	σ	Standardabweichung
Φ	Dichtespektrum	τ	Zeitverschiebung
Ψ	einseitiges Dichtespektrum	ω	Winkelgeschwindigkeit
ρ	Korrelationskoeffizient	ω_c	Winkelgeschwindigkeit des Trägers
σ	Standardabweichung	ω_m	Winkelgeschwindigkeit der Modulation
τ	Zeitverschiebung	ω_{mod}	Winkelgeschwindigkeit der Modulation
ω	Winkelgeschwindigkeit	ω_{port}	Winkelgeschwindigkeit des Ports
ω_c	Winkelgeschwindigkeit des Trägers	ω_{stop}	Winkelgeschwindigkeit des Stopps
ω_m	Winkelgeschwindigkeit der Modulation	ω_{start}	Winkelgeschwindigkeit des Starts
ω_{mod}	Winkelgeschwindigkeit der Modulation	ω_{stop}	Winkelgeschwindigkeit des Stopps
ω_{port}	Winkelgeschwindigkeit des Ports	ω_{start}	Winkelgeschwindigkeit des Starts
ω_{stop}	Winkelgeschwindigkeit des Stopps	ω_{stop}	Winkelgeschwindigkeit des Stopps
ω_{start}	Winkelgeschwindigkeit des Starts	ω_{stop}	Winkelgeschwindigkeit des Stopps

Filter:

FIR-Filter:
 $H_f(z) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot z^{-k}$
 (nur Nullstellen)

IIR-Filter:
 $H_i(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \cdot z^{-k}}{1 \pm \sum_{k=1}^n a_k \cdot z^{-k}}$

Rein rekursives-Filter:
 $H_r(z) = \frac{1}{1 \pm \sum_{k=1}^n a_k \cdot z^{-k}}$

Wiener Filter:

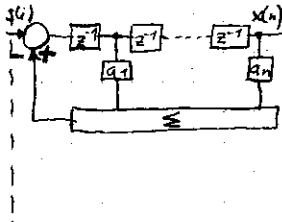
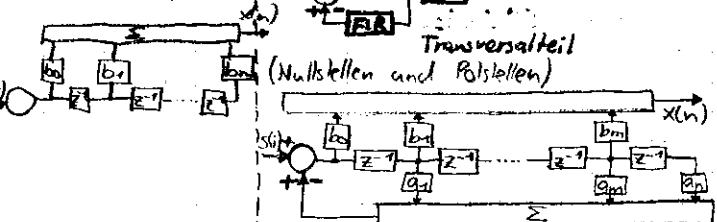
Auch Wiener Lösung genannt.
 $s(n) = x(n) + n(n)$
 $\hat{x}(n)$

Bilinearer Nachdruck

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

$$T = \frac{1}{f_0}$$

$$\omega_g = 2 \cdot \pi \cdot f_g$$



$$H(\omega) = \frac{\Phi_{xx}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)}$$

$\Phi_{xx}(\omega)$ = Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals
 $\Phi_{nn}(\omega)$ = Leistungsdichtespektrum des rauschen
 $H(\omega)$ = Übertragungsfunktion des Wiener-Filter

FIR und IIR-Filter als Entzerrer:

Verzerrer: $H_v(z)$, $sv(t)$, $sv(i)$
 Entzerrer: $H_e(z)$, $Se(t)$, $Se(i)$

Ein Entzerrer kann keine Verzerrung rückgängig machen. Es kann nur korrigiert werden, wenn beim Entzerrer eine zusätzliche Laufzeit t_e zugelassen wird, die mindestens so gross ist wie t_v .

$$H_v(\omega) = H_v(\omega) \cdot e^{-j\omega t_v}$$

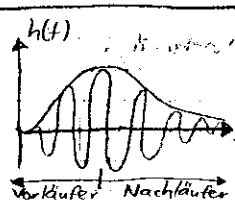
$$\Rightarrow H_e(\omega) = \frac{1}{H_v(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_e} = \frac{1}{H_v(\omega)} \cdot e^{j\omega t_v - j\omega t_e}$$

diskret: $H_v(z) \cdot H_e(z) = z^{-m}$

$h_{tot}(n) = h_v(n) * h_e(n) = s(n)$
 mit Zusatzlaufzeit: $h_{tot}(n) = h_v(n) * h_e(n) = s(n-m)$

Entzerrung von Polen:

Verzerrung durch rein rekursives System
 Entzerrer ist ein FIR-Filter (stabiles System)
 Rekursive Systeme sind zur Polentzerrung nicht sinnvoll (können instabil werden)



$$h_v(n) * h_e(n) = s(n) \Rightarrow H_v(z) \cdot H_e(z) = 1$$

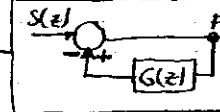
Die Pole werden durch die Nullstellen des FIR-Filters kompensiert. Die Nachschwinger $h_v(n), n > 0$ der Impulsantwort des Verzerrers werden durch transversales nachwirken unterdrückt.

$$H_v(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} ; |a| < 1$$

$$H_e(z) = 1 - a \cdot z^{-1} \text{ mit Nullstelle } z_0 = a$$

weil $H_e(z) = \frac{1}{H_v(z)}$

Rückkopplung

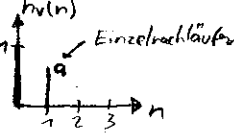


$$H(z) = \frac{1}{1 \mp G(z)} = \frac{F(z)}{S(z)}$$

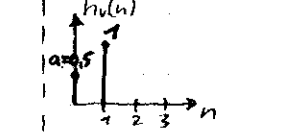
Entzerrung von Nullstellen

Diese Art von Verzerrungen (Nullstellen) entstehen durch unterschiedliche Laufzeiten und Dämpfungen des Übertragungspfad.

Einzelnachläufer



Einzelvorkläufer



$H_v(z) = 1 + a \cdot z^{-1} ; |a| < 1$
 Nullstelle ist $z_0 = -a$ und liegt innerhalb des Einheitskreises für $|a| < 1$.
 A.h. wenn der Hauptwert $n=0$ grösser ist als der nachfolgende Wert.

$H_v(z) = a + z^{-1} ; |a| < 1$
 Nullstelle ist $z_0 = -\frac{1}{a}$ und liegt ausserhalb des Einheitskreises für $|a| < 1$.
 Ein rekursiver Entzerrer ist in diesem Fall instabil.

Rekursive Nachläuferentzerrung:

$H_e(z) = \frac{1}{H_v(z)} = \frac{1}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots}$
 Der Entzerrer ist ein rekursives System, das aufgrund der Nachläufer Voraussetzung stabil ist: die innerhalb des Einheitskreises liegenden Nullstellen des Verzerrers werden zu den Polen des Entzerrers. Wenn zusätzlich Vorkläufer vorkommen würden, wäre das Verfahren schlecht. Dann muss auf transversale (FIR-) Vorläuferentzerrung gewechselt werden.

bsp: fünfstufiger FIR-Zero-Forcing Entzerrer

$$H_v(z) = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} ; |a| < 1$$

beschränkt auf 5 Stufen $\Rightarrow c_0, c_1, c_2, c_3$ und c_4 sind zu bestimmen

$$\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a c_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 c_0 & a c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c_1 & a c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 c_2 & a c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_0 = 1 ; c_1 = -a ; c_2 = 0 ; c_3 = a^2 ; c_4 = a^4$

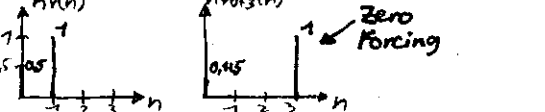
Transversale (FIR-) Vorläuferentzerrung

Die inverse Verzerrerübertragungsfunktion lässt sich rückwärts in eine Potenzreihe entwickeln (zum Fall Nachläuferentzerrung zeitinverse Situation)

$$H_e(z) = \frac{z^{-m}}{z^{-m} + c_1 z^{-(m-1)} + \dots + c_{m-1} z^{-1} + c_m}$$

m = Anzahl verwendete Koeffizienten
 Bsp mit 3 Koeffizienten:
 $H_e(z) = \frac{z^{-3}}{z^{-3} + a} = z^{-3} \cdot \frac{1}{z^{-3} + a}$ (erhalten durch Division: $z^3 \cdot (z^{-3} + a)$)

Terme mit pos. Exponenten von z weglassen!
 $H_{tot}(z) = H_v(z) \cdot H_e(z) = a^3 + z^{-3}$

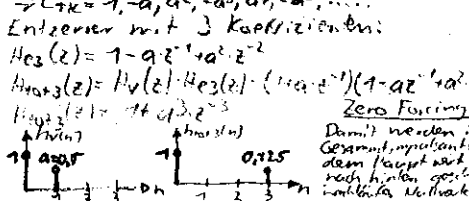


Transversale (FIR-) Nachläuferentzerrung

Kommen beim verzerrenden System zu zusätzlich Vorkläufer dazu, so wird das rein rekursive Entzerrersystem instabil.

$$H_e(z) = \frac{1}{H_v(z)} = \frac{1}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots} = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

Die Potenzreihenentwicklung gibt die Impulsantwort.
 Bsp:
 $H_e(z) = \frac{1}{1 + a z^{-1}} = 1 - a z^{-1} + a^2 z^{-2} - a^3 z^{-3} + a^4 z^{-4} - a^5 z^{-5} + \dots$
 $\Rightarrow c_k = 1, -a, a^2, -a^3, a^4, -a^5, \dots$
 Entzerrer mit 3 Koeffizienten:
 $H_e(z) = 1 - a z^{-1} + a^2 z^{-2}$
 $H_{tot}(z) = H_v(z) \cdot H_e(z) = (1 + a z^{-1})(1 - a z^{-1} + a^2 z^{-2})$



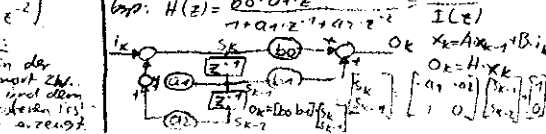
Impulsantwort berechnen

bsp: $H_v(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$
 $\Rightarrow h_v(n) = (1 + \frac{1}{2} z^{-1}) \cdot (1 - \frac{1}{2} z^{-1})^{-1}$ = Impulsantwort

Impulsantwort zu Übertragungsfunktion

bsp: $h(n) = [1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \dots]$
 $\Rightarrow H(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}$

Kalman mit Systemmatrix

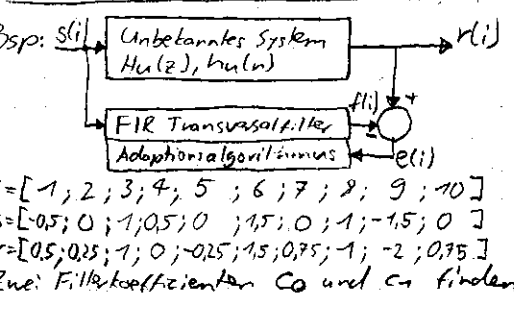


$$\sum_{k=0}^N c_k \cdot R_{ss}(n-k) = R_{sr}(n); n=0, 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & R_{ss}(2) & \dots & R_{ss}(N) \\ R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & \dots & R_{ss}(N-1) \\ R_{ss}(2) & R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & \dots & R_{ss}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{ss}(N) & R_{ss}(N-1) & R_{ss}(N-2) & \dots & R_{ss}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sr}(0) \\ R_{sr}(1) \\ R_{sr}(2) \\ \vdots \\ R_{sr}(N) \end{bmatrix}$$

$$R_{ss}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot s(t+T) \cdot dt$$

$$R_{sr}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot r(t+T) \cdot dt$$



$$\begin{bmatrix} R_{ss}(0) & R_{ss}(1) \\ R_{ss}(1) & R_{ss}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sr}(0) \\ R_{sr}(1) \end{bmatrix}$$

Zyklische Autokorrelation:
 $R_{ss}(1) = \frac{1}{10} (1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot (-1,5)) = \frac{1}{10} (-1) = -\frac{1}{10}$

Zyklische Kreuzkorrelation:
 $R_{sr}(1) = \frac{1}{10} ((-0,5) \cdot 0,25 + 0,5 \cdot (-0,25) + 1,5 \cdot (-0,75) + 1 \cdot (-2) + 0,75 \cdot (-1,5)) = -\frac{4,5}{10}$

$R_{ss}(0)$ und $R_{sr}(0)$ funktionieren genau gleich! Nur ohne Verschiebung!

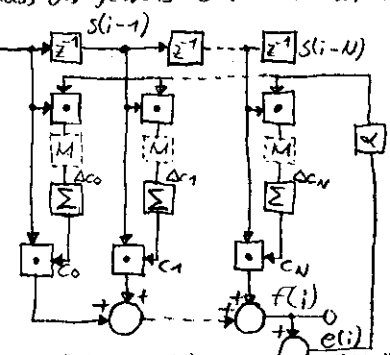
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7 \cdot 7 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 7 \cdot 7 + 1 \cdot (-4,5) \\ 1 \cdot 7 + 7 \cdot (-4,5) \end{bmatrix} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 44,5 \\ -24,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9271 \\ -0,5104 \end{bmatrix}$$

MS-Gradientenalgorithmus

beim LMS Algorithmus werden die Koeffizienten nicht direkt berechnet sondern schrittweise, dh. mit jedem Signal bzw. Rechenzeit, so korrigiert, dass der jeweils neue MSE-Wert kleiner wird als der alte



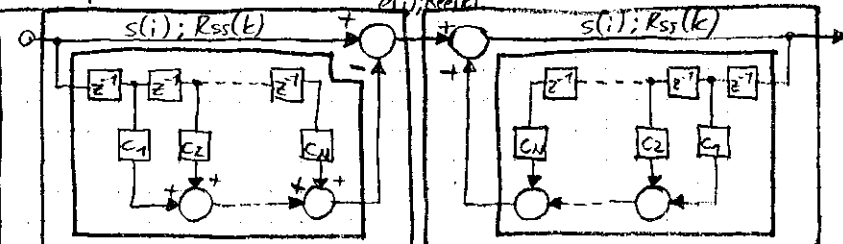
Für zwei Koeffizienten:

$$e(i) = f(i) - r(i)$$

$$f(i) = s(i) \cdot c_0(i-1) + s(i-1) \cdot c_1(i-1)$$

$$c_0(i) = c_0(i-1) + \alpha \cdot e(i) \cdot s(i)$$

$$c_1(i) = c_1(i-1) + \alpha \cdot e(i) \cdot s(i-1)$$



Prädiktor: $H_{pr}(z) = \sum_{j=1}^N c_j \cdot z^{-j}$ Prädiktor: $H_{pr}(z) = \sum_{j=1}^N c_j \cdot z^{-j}$

Detonator: $H_{dk}(z) = 1 - \sum_{j=1}^N c_j \cdot z^{-j}$ Korrelator: $H_{kz}(z) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^N c_j \cdot z^{-j}}$

Der FIR-Filter Koeffizient c_0 existiert bei den Prädiktoren, jeweils nicht (ausführbar in LS und LMS jeweils ohne c_0)
 Bei idealer Prediktion (Vorthersage), wird $Ree(k)$ unkorrelativ sein "weisses Rauschen"
 AR-Modell: Auto Regressiv (Korrelator, rein Rekursiv)
 MA-Modell: Moving Average (FIR-Filter)
 ARMA-Modell: Kombination von beidem (IIR-Filter)

Prediktor mit LS-Algorithmus

Der Filterkoeffizient c_0 (siehe oben) existiert nicht! \Rightarrow Matrix vereinfacht sich nicht!

$$\begin{bmatrix} R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & R_{ss}(2) & \dots & R_{ss}(N-1) \\ R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & \dots & R_{ss}(N-2) \\ R_{ss}(2) & R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & \dots & R_{ss}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{ss}(N-1) & R_{ss}(N-2) & R_{ss}(N-3) & \dots & R_{ss}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sr}(1) \\ R_{sr}(2) \\ R_{sr}(3) \\ \vdots \\ R_{sr}(N) \end{bmatrix}$$

Kalman Init: $P_{k-1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$ \Rightarrow Die Varianz ist 10^{-5} und groß, die Messung wird dominiert

- $x_k = A \cdot x_{k-1} + B \cdot u_k + w_k$ (Status eqn.) $x_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 - $z_k = H \cdot x_k + v_k$ (messwert eqn.)
 - Anfangsparameter: \hat{x}_{k-1} = Schätzung vor Messung, u_{k-1}
 - $\hat{x}_k = A \cdot \hat{x}_{k-1} + B \cdot u_{k-1}$ \Rightarrow wir machen aber \hat{x}_k
 - $P_k = A \cdot P_{k-1} \cdot A^T + Q$
 - $K_k = P_k \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k \cdot H^T + R)^{-1}$
 - $P_k = [I - K_k \cdot H] \cdot P_{k-1} / M$; $0 \leq M \leq 1$
 - $\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k \cdot (z_k - H \cdot \hat{x}_{k-1})$ (je kleiner M, desto besser, das Filter)
- Algorithmus geht von ①-⑧ (Vergleichen mit Systembeschreibung ist ①)

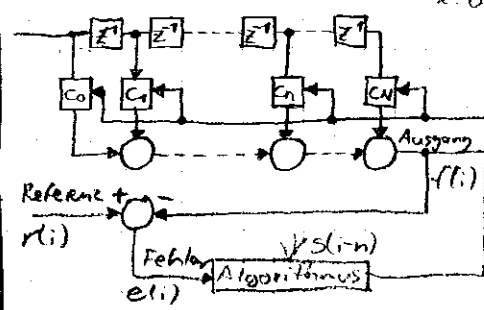
RLS-Algorithmus

- Entsteht aus LS, diese kann aber nur Blockweise arbeiten. Der RLS arbeitet Sample weise, und muss dadurch nicht immer alle $R_{ss}(T)$ und $R_{sr}(T)$ berechnen, nur beim LS wenn ein neues Sample hinzukommt.
- $K(n) = \frac{P(n-1) \cdot u(n)}{1 + u(n)^T \cdot P(n-1) \cdot u(n)}$
 - $\hat{x}(n) = d(n) - u(n)^T \cdot \hat{h}(n-1)$
 - $\hat{h}(n) = \hat{h}(n-1) + K(n) \cdot \hat{x}(n)$
 - $P(n) = \frac{P(n-1) - K(n) \cdot u(n)^T \cdot P(n-1)}{1 + u(n)^T \cdot P(n-1) \cdot u(n)}$
- Diese Algorithmus wird bei jedem neuen Sample durchlaufen
 P = Fehlerkorrektionsmatrix
 u = Gain Vektor
 \hat{x} = Schätzfehler

MSE-Algorithmus

$$MSE = e^2(i) = Q(c_0, c_1, \dots, c_N)$$

$$Q = [r(i) - f(i)]^2 = [r(i) - \sum_{k=0}^N c_k \cdot s(i-k)]^2$$



$\frac{\partial Q}{\partial c_n} = 0; n=0, 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$ Gleichungen aufstellen und lösen, ergibt Filterkoeffizienten

Bsp: MSE (wie Bsp Zooning bei LMS) $Q = \sum_{n=0}^N (h_{opt}(n) - h_{opt,LS}(n))^2$

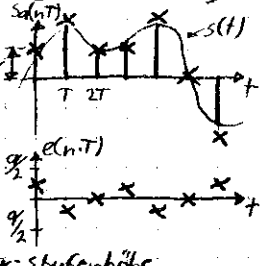
$$Q = (c_0 - 1)^2 + (a \cdot c_0 + c_1)^2 + (a^2 \cdot c_0 + a \cdot c_1 + c_2)^2 + (a^3 \cdot c_0 + a^2 \cdot c_1 + a \cdot c_2 + c_3)^2 + \dots$$

nun muss Q nach allen Filterkoeffizienten abgeleitet werden

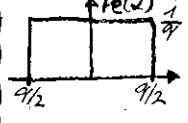
$$\frac{\partial Q}{\partial c_0} = 2(c_0 - 1) + 2(a \cdot c_0 + c_1) + 2(a^2 \cdot c_0 + a \cdot c_1 + c_2) + \dots$$

nach allen Ableitungen wird wieder ein lineares Gleichungssystem wie beim Zooning aufgestellt und nach den Filterkoeffizienten $c_0 - c_4$ gelöst

Quantisierung, Quantisierungsfehler



Falls die Verteilungsfunktion des Quantisierungsfehlers Gleichverteilung ist, entspricht dies einer guten Aussteuerung des Quantisierers. Formeln gelten nur bei guter Aussteuerung.



$$P_e = \frac{q^2}{12} ; \sigma_e = \frac{q}{\sqrt{12}} ; q = \frac{A_{pp}}{2^B}$$

$$P_e = \frac{A_{pp}^2}{12 \cdot 2^{2B}} ; N = 2^B$$

$$SNR_{lin} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_s \cdot 12}{A_{pp}^2} \cdot 2^{2B}$$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = K + 6.02 \cdot B$$

Der Quantisierungsfehler ist DC-frei!

P_s = Leistung des Signals ; P_e = Quantisierungsfehlerleistung
 B = Wortlänge (Bit/Abtastwert) ; q = Quantisierungsstufenhöhe
 A_{pp} = Aussteuerungsbereich (Dynamikbereich) ; N = Quantisierungsstufenzahl

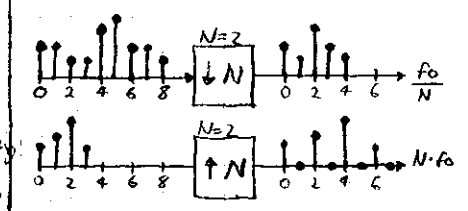
$K = 10 \cdot \log(k) = 10 \cdot \log\left(\frac{12 \cdot P_s}{A_{pp}^2}\right)$
 Bei Eingang mit Gleichverteilung ist $K = 0$
 Bei sinusförmigen Eingangssignal ist $K = +1.67 \text{ dB}$
 Bei normalverteiltem Eingangssignal ist $K = -8.5 \text{ dB}$

Pro zusätzliche Bitstelle (entspricht der Verdopplung von N einer doppelt so feinen Auflösung) erreicht man eine Erhöhung des SNR um 6,02 dB.

Fourier-Sätze

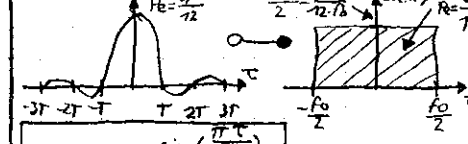
Parameter	Symbol	Einheit	Formel
Abtastfrequenz	f_s	Hz	$f_s = \frac{1}{T}$
Abtastperiode	T	s	$T = \frac{1}{f_s}$
Abtastfrequenz	f_0	Hz	$f_0 = \frac{1}{2T}$
Abtastperiode	T_0	s	$T_0 = 2T$
Abtastfrequenz	f_0	Hz	$f_0 = \frac{1}{2T}$
Abtastperiode	T_0	s	$T_0 = 2T$

System mit mehreren Taktraten



$\downarrow N$ = Downsampling (Abtasttheorem muss auch mit tieferer Taktfrequenz erfüllt sein) (nach Konvention kommt immer die Nullte Wert dazu)
 $\uparrow N$ = Upsampling (es muss im allg. eine Interpolation der eingetasteten Werte folgen)

Leistungsdichtespektrum des Fehlers



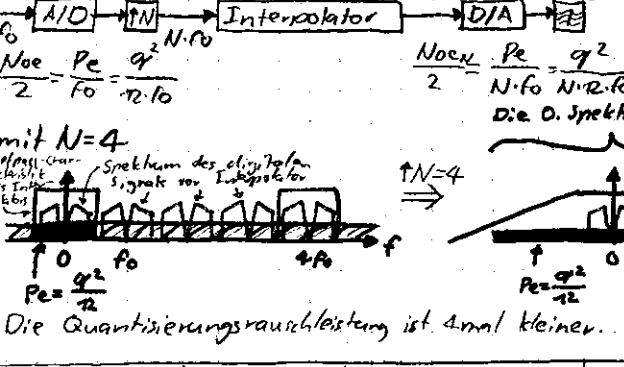
$$P_{ee}(f) = P_e \cdot \frac{\sin^2(\frac{\pi f T}{2})}{(\frac{\pi f T}{2})^2}$$

$$P_{ee}(k) = \frac{q^2}{12} S(k) \circ \text{Fault} = \frac{N_{oe}}{2} = \frac{q^2}{12 \cdot f_0}$$

$$P_{ee}(k) = P_e \cdot \frac{\sin^2(\frac{\pi k T}{2})}{(\frac{\pi k T}{2})^2} \circ \text{Fault} = \frac{N_{oe}}{2} = \frac{q^2}{12 \cdot f_0}$$

Der Quantisierungsfehler ist ein zeitdiskretes, gleichverteiltes weißes Rauschen und ist DC-frei.

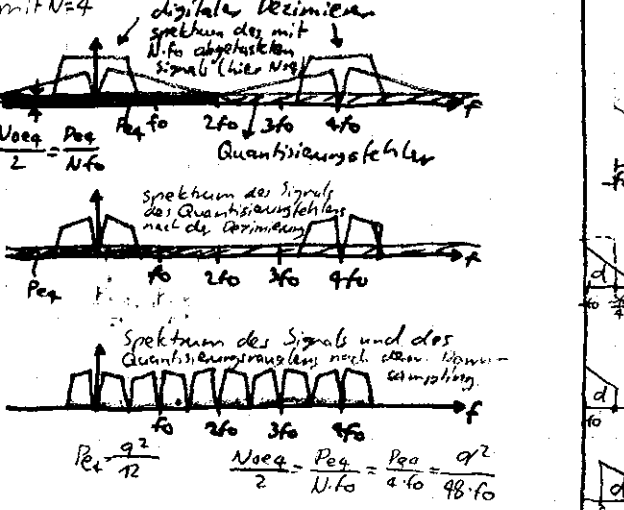
Upsampling / Interpolation



Abtastfrequenzänderung
 Bsp. von 48 kHz auf 24 kHz
 Filterbank: 48 kHz / 2 = 24 kHz

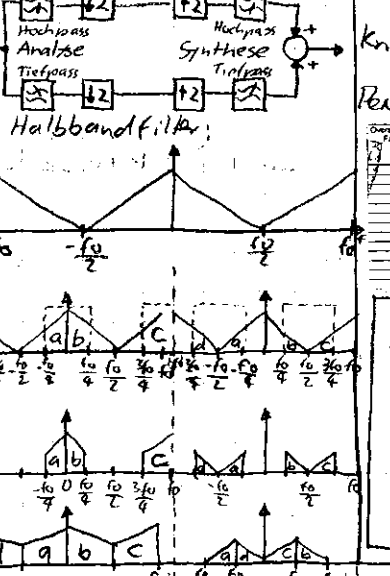
Die Quantisierungsrauschleistung ist 4mal kleiner. $P_e = \frac{q^2}{48 \cdot f_0}$

Decimierung / Downsampling



$\Rightarrow +1 \text{ Bit} \Rightarrow 4 \text{ mal tiefere Abtastrate}$
 $-1 \text{ Bit} \Rightarrow 4 \text{ mal höhere Abtastrate}$
 für gleiche Rauschleistung (gleiches SNR)

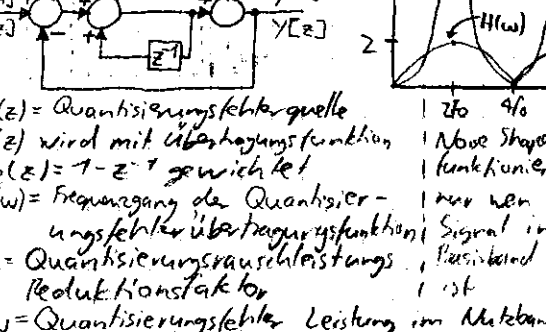
Filterbanken



$$Y(z) = \frac{1}{2}(X(z^2) + X(-z^2))$$

$$Y(z) = X(z^2)$$

Noise Shaping



$E(z)$ = Quantisierungsfehlerquelle
 $E(z)$ wird mit Übertragungsfunktion $H(z) = 1 - z^{-1}$ gewichtet
 $H(w)$ = Frequenzgang der Quantisierungsfehler übertragungsfunktion
 k_n = Quantisierungsrauschleistungsreduktionsfaktor

Order	Noise Shaping	Noise Shaping
1	2.5000	3.51
2	0.1553	1.98
3	0.0186	1.02
4	0.0023	0.56
5	0.0003	0.31
6	0.0000	0.17
7	0.0000	0.09
8	0.0000	0.05
9	0.0000	0.03
10	0.0000	0.02

$$P_{eN} = k_n \cdot \frac{q^2}{12}$$

$$k_n = \frac{2}{N} \left[1 - \frac{N}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \approx \frac{\pi^2}{3N^3} \quad \text{1. Ordnung}$$

$$k_n = \frac{\pi^4}{5 \cdot N^5} \quad \text{2. Ordnung}$$

HP \Leftrightarrow TP transformation

$$H_{TP}(z) = H_{HP}(-z) \quad \text{bsp. } H_{TP}(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1}) \Leftrightarrow H_{HP}(z) = \frac{1}{2}(1-z^{-1})$$

Systemverzögerung

