

Reale Abtastung: Ideale Abtastung: Ideale Abtastung schiebt das Originalspektrum an jede ganzzahlige Frequenz der Abtastung.

Natural Sampling: Signal s(t) mit periodischer Rechteckpulsfolge multipliziert.

Flat Top: Im Gegensatz zur idealen Abtastung erscheint das Spektrum des ursprünglichen Signals nicht einfach periodisch fortgesetzt; das periodische Spektrum wird noch mit einer Gewichtsfunktion G(omega) beaufschlagt, bestehend aus dem Spektrum des Abtastimpulses (sin(pi/2 \* omega) / (pi/2 \* omega)) multipliziert mit 1/T kontinuierlich gewichtet.

Sample & Hold: Da T=T\_s ist die erste Nullstelle gleich bei omega\_c, da omega\_c = 2pi/T

Abtasttheorem: Die Abtastfrequenz muss jederzeit größer als zweimal die maximale Frequenz des Signals sein. omega\_c > 2 \* omega\_max bzw. f\_c > 2 \* f\_max sonst entsteht Aliasing (Spektrumsüberlappung) => meist wird Antialiasing-Tiefpass oder Presampling Filter eingesetzt um Aliasing zu verhindern.

Rekonstruktion:

Zero Order Hold (ZOH): Halteglied nullter Ordnung Impulsantwort:

Lineare Interpolation: Ist mit zwei Punkten möglich! Können aber auch beliebig viele sein. Hat sicher immer die Verzögerung von 1 Sample.

First Order Hold (FOH): Halteglied erster Ordnung Wird eingesetzt wenn ZOH zu wenig gut approximiert und die Verzögerung der linearen Approximation nicht tragbar ist.

Energie und Leistung von rekonstruierten Signalen

$N = T \sum_{m=0}^{N-1} s^2(m \cdot T)$  gilt nur wenn Abtasttheorem eingehalten. Das mit Zero Order Hold oder Sample & Hold abgetastete Signal weist die gleiche Energie  $T \cdot s^2(m \cdot T)$  bzw. Leistung wie das rekonstruierte Signal auf.

Abtastung

Wenn man in der Zeit abtastet, wird das Spektrum periodisch. Wenn man eine Signalfunktion in der Zeit abtastet und mit einer FFT in den Frequenzbereich nimmt, wiederholt sich dort das Spektrum alle Periodendauern T der Abtastzeit periodisch fortsetzen => abtasten Zeitbereich \* Frequenzbereich

Periodisch fortsetzen

$C_n = \frac{1}{T} \cdot S(n \cdot \omega_0)$   
 $C_n = A \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n \cdot \pi \cdot \tau / T)}{n \cdot \pi \cdot \tau / T}$

Fouriertransformation

$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt$   
 $s(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega$   
 $W = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \cdot d\omega$  Energie oder Leistung

Fourierreihe

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$   
 $C_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt$   
 $P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$

Delta-Funktion (eine Distribution)

$\delta(t) \leftrightarrow 1 \cdot 1 \leftrightarrow 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$   
 $e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \leftrightarrow 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$   
 $\cos(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

Sätze der Fouriertransformation

Linearität:  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$   
 $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$   
 $\alpha_1 \cdot s_1(t) + \alpha_2 \cdot s_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 \cdot S_1(\omega) + \alpha_2 \cdot S_2(\omega)$   
Verschiebung:  $s(t-t_0) \leftrightarrow S(\omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}$   
 $s(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \leftrightarrow S(\omega - \omega_0)$   
Faltung:  $f(t) * s(t) \leftrightarrow F(\omega) \cdot S(\omega)$   
Symmetrie:  $S(\omega) \leftrightarrow 2 \cdot \pi \cdot s(-\omega)$   
Vertauschen  $\omega \leftrightarrow t$ :  $\frac{1}{\omega} \cdot S(-t) \leftrightarrow s(\omega)$   
Modulation:  $2 \cdot s(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)$   
 $2 \cdot s(t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \leftrightarrow j \cdot [S(\omega - \omega_0) - S(\omega + \omega_0)]$   
Ableitung:  $\frac{d^n s(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j \cdot \omega)^n \cdot S(\omega)$   
 $(-j \cdot \omega)^n \cdot s(t) \leftrightarrow \frac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}$

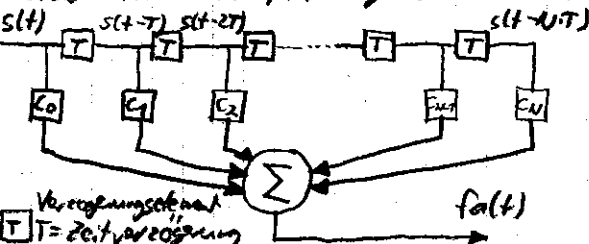
Rechteck transformieren

$R_T(\omega) = A \cdot T \cdot \frac{\sin(\frac{T \cdot \omega}{2})}{\frac{T \cdot \omega}{2}}$   
 $R_T(f) = A \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi \cdot T \cdot f)}{\pi \cdot T \cdot f}$   
 $R_T(f) = \frac{C \cdot \omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t}$   
 $R_T(f) = 2 \cdot C \cdot f_0 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}$

Gerade Funktion (spiegelsymmetrisch Ordinatenachse) =>  $C_n = a_n$ ;  $b_n = 0$  (kein Imaginäranteil). Ist der Reziprokwert des Tastverhältnisses d.h.  $T/C$  eine ganze Zahl, so sind die Komponenten  $n=4$  bei  $T=1$  mit Ordnungen, die ein ganzzahliges Vielfaches davon sind, gerade gleich Null.

# FIR-Filter (Finik Impulse Response)

- zeitlich begrenzte Impulsantwort
- nur Nullstellen
- kann nicht schwingen, da keine Rückkopplungen
- auch Transversalfilter genannt



Verzögerungselement  
T = Zeitverzögerung  
Gewicht  
C<sub>n</sub> Multiplikation mit C<sub>n</sub>

$$f(t) = \sum_{n=0}^N s(t-n \cdot T) \cdot C_n$$

N+1 = Filterlänge  
N = Filterordnung

$$f_d(t) = T \sum_{n=0}^N s[(l-n) \cdot T] \cdot h(nT)$$

⇒ diskretes Faltung (mit FFT machbar)

- Unter der Einschränkung der Zeitbegrenzung sind beliebige Formen der Stossantwort realisierbar, dabei sind Amplitudengang und Phasengang unabhängig voneinander veränderbar.

## Filterspezifikationen

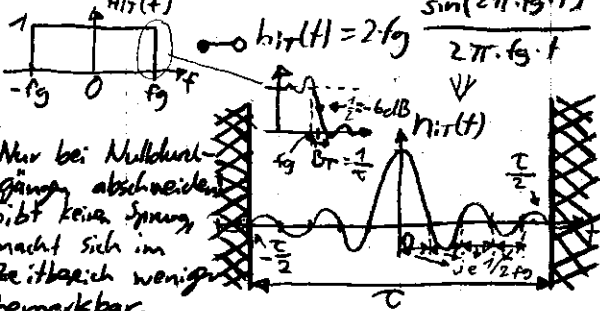
(Bild S. 6-12)

- f<sub>1</sub> = untere Eckfrequenz
- f<sub>2</sub> = obere Eckfrequenz
- f<sub>g</sub> = Grenzfrequenz f<sub>g</sub> = (f<sub>1</sub> + f<sub>2</sub>) / 2
- B<sub>T</sub> = Übergangsbandsbreite B<sub>T</sub> = f<sub>2</sub> - f<sub>1</sub>
- S<sub>2</sub> bzw. K<sub>S2dB</sub> = Max. Sperrbereichsrippel
- S<sub>1</sub> = Max. Durchlassbereichsrippel

Je kleiner B<sub>T</sub>, desto länger wird das FIR Filter. ⇒ grosse Verzögerung, lange Filterlänge

## Dimensionieren nach der Fensterfunktion

- Ausgangspunkt ist ideales Tiefpass



Nur bei Nullpunktgang abschneiden, gibt keine Sprung, macht sich im Zeitbereich weniger bemerkbar.

$$T = K_c / 12 \cdot f_g$$

$$B_T = K_B / T$$

Bestimmen für den Filtertyp ist damit der maximale Rippel im Sperrbereich!

Filtertyp	Maximaler Rippel im Sperrbereich (%)	Maximaler Rippel im Durchlassbereich (%)
Rechteck	90	90
Trapez	44	44
Parabell	28	28
Blackman	11	11
Hanning	28	28
Hamming	41	41
Blackman	11	11

das Rechteckfenster hat für gegebenes Streifenbreite, das kürzeste B<sub>T</sub>, jedoch grossen Rippel

## Bandpass

$$C_{nBP} = 2 \cdot C_{nTP} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot n \cdot T) = 2 \cdot C_{nTP} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_m n / f_c)$$

n = 0, ±1, ±2, ..., ±N/2

## Hochpass

$$C_{nHP} = C_{nTP} \cdot \cos(\pi \cdot f_c \cdot n \cdot T) = C_{nTP} \cdot \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n \cdot C_{nTP}$$

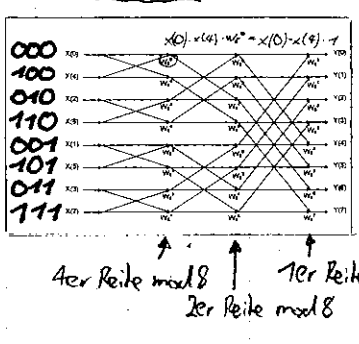
n = 0, ±1, ±2, ..., ±N/2 (für Nullphasenlage)

## Bandspare

$$C_{nBS} = C_{nTP} + C_{nHP}$$

C<sub>nTP</sub> = Koeffizienten des äquivalenten Tiefpasses

## FFT-Butterfly



## Bsp FFT/DFT

x(n) = 1, 1, 0, 1 ⇒ N=4 ⇒ X(k) = ∑\_{n=0}^3 x(n) e^{-j2πkn/4}

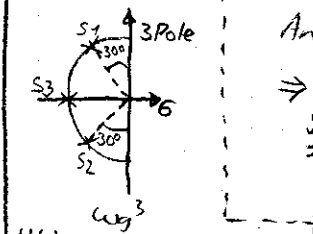
X(0) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3

X(1) = 1 + 1e^{-jπ/2} + 0 + 1e^{jπ/2} = 1 - j + j = 1

X(2) = 1 + 1e^{-jπ} + 0 + 1e^{jπ} = 1 - 1 + 1 = 1

X(3) = 1 + 1e^{-j3π/2} + 0 + 1e^{j3π/2} = 1 + j - j = 1

## Bsp Partialbruchzerlegung



Ansatz:  $\frac{A+s \cdot B}{(s^2 + \omega_g s + \omega_g^2)} + \frac{C}{s + \omega_g} = \frac{C}{s + \omega_g}$

⇒ (A+sB)(s+ω<sub>g</sub>) + C(s<sup>2</sup>+ω<sub>g</sub>s+ω<sub>g</sub><sup>2</sup>) = ω<sub>g</sub><sup>3</sup>

s(A+ω<sub>g</sub>B+C) + s<sup>2</sup>(B+C) + ω<sub>g</sub>A + ω<sub>g</sub><sup>2</sup>C = ω<sub>g</sub><sup>3</sup>

⇒ s<sup>2</sup>: B+C=0 ⇒ B=-C

s<sup>1</sup>: A+ω<sub>g</sub>B+ω<sub>g</sub>C=0 ⇒ A=0

s<sup>0</sup>: ω<sub>g</sub>A+ω<sub>g</sub><sup>2</sup>C=ω<sub>g</sub><sup>3</sup> ⇒ C=ω<sub>g</sub>

B=-ω<sub>g</sub>

$$H(s) = \frac{-s \cdot \omega_g}{(s^2 + \omega_g s + \omega_g^2)(s + \omega_g)}$$

f<sub>0</sub> = 10 kHz (Taktfrequenz)  
f<sub>g</sub> = 1 kHz (Grenzfrequenz)

$$H(s) = \frac{-s \cdot \omega_g}{(s^2 + \omega_g s + \omega_g^2)(s + \omega_g)}$$

⇒ z-Transformieren (T = 1/f<sub>0</sub>; ω<sub>g</sub> = 2π · f<sub>g</sub>)

## Dimensionierungsanleitung mit Grenzfrequenz f<sub>g</sub> und der Fensterfunktion

- Sperrbereichsrippel: - zulässiger Maximalrippel Δs<sub>2</sub>  
- gefordertes Ableitungen  
⇒ Filtertyp, Filterkantenfaktor K<sub>B</sub>
- Übergangsbandsbreite: - B<sub>T</sub> festlegen  
⇒ Fensterlänge:  $T = K_B / B_T$
- Festsetzen der Taktfrequenz: - Abtasttheorem einhalten  
⇒ Grenzfrequenzfaktor:  $K_C = f_c / f_g$   $T_c = 1/T$   
K<sub>C</sub> zwischen 5 und 10
- Bestimmen der Filterlänge: - Verhältnis T/T<sub>c</sub> auf geraden Wert (N+1) aufrunden  
⇒ korrigierte effektive Fensterlänge:  $T_{eff} = (N+1) \cdot T$
- Bestimmung der Filterkoeffizienten

Nullphasenlage:  $C_n = \frac{2}{K_C} \cdot \frac{\sin(\frac{2\pi n}{K_C})}{\frac{2\pi n}{K_C}} \cdot \omega_g \ln T$ ; n = 0, ±1, ±2, ..., ±N/2

f<sub>g</sub> · T = 1/K<sub>C</sub>

Kausallage:  $C_n = \frac{2}{K_C} \cdot \frac{\sin(\frac{2\pi(n-N/2)}{K_C})}{\frac{2\pi(n-N/2)}{K_C}} \cdot \omega_g \ln T$ ; n = 0, 1, 2, 3, ..., N

- Fensterfunktionen für Kausallage:
- ⇒ Hanning-Fenster:  $w(t) = \sin^2(\pi \cdot t/T)$
  - ⇒ Hamming-Fenster:  $w(t) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos(2\pi \cdot t/T)$
  - ⇒ Blackman-Fenster:  $w(t) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos(2\pi \cdot t/T) + 0.08 \cdot \cos(4\pi \cdot t/T)$

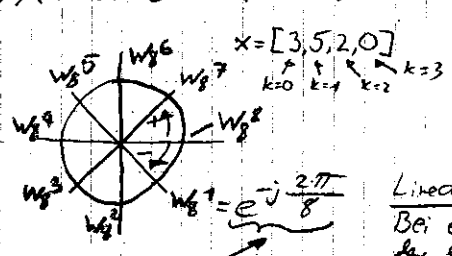
DFT

Die DFT transformiert jeweils eine Wertefolge  $X(n), n=0,1,2,\dots,N-1$  wieder in eine Wertefolge von  $Y(k), k=0,1,2,\dots,N-1$ . für  $N=4$ :  $\Rightarrow Y(k) = x(0) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{4} \cdot 0} + x(1) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{4} \cdot 1} + x(2) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{4} \cdot 2} + x(3) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{4} \cdot 3}$

DFT  
IDFT

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{N} \cdot n}$$

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{N} \cdot k}$$



Rechenaufwand:  $N^2$  Wertezahl!  
 $Z = N^2$  (komplexe Multiplikation und Additionen)

$W_N^p = e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot p}{N}}$  = Drehoperator (gibt die Winkelgröße an die gedreht werden muss um einen Wert auf dem Kreis weiter zu kommen.)  
Linearität: Bei einer gegebenen DFT, kann man bei gleicher Vektorwahl für einzelnen Samples direkt auf den resultierenden Vektor schließen z.B. Alle Werte des Vektors um 1 erhöhen

Periodizität und Aliasing:

Aliasing (überlappen der Spektren)  $\Rightarrow$  kleineres  $T$  (schneller abtasten)  
Frequenzablösung  $\Rightarrow$  größeres  $T$   
Zero padding: (S. 5-7)

Zyklische Verschiebung um  $T$  Takt:  
 $x_1(n) = x_0(n-i) \Rightarrow Y_1(k) = Y_0(k) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot k}$

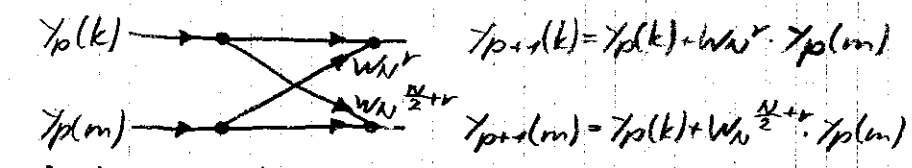
$\Rightarrow$  durch Linearität bleibt der gesamte Ausgangsvektor gleich, außer das erste Element (DC-Wert).  
Dies ändert sich nach der Summe aller einzelnen Samples der Eingangsvektors (bei 8 Samples wäre es hier eine Addition von +8 der DC-Wert)

Bewusstes Einfügen von Nullwerten in eine Serie von Messwerten erhöht die Anzahl der Messpunkte und so die Genauigkeit. Werden genau so viele Nullen wie Messwerte in den Frequenzbereich transformiert, misst zwischen jeder Spektrallinie die ohne die Nullen vorher höchstens eine Spektrallinie aufzutreten.

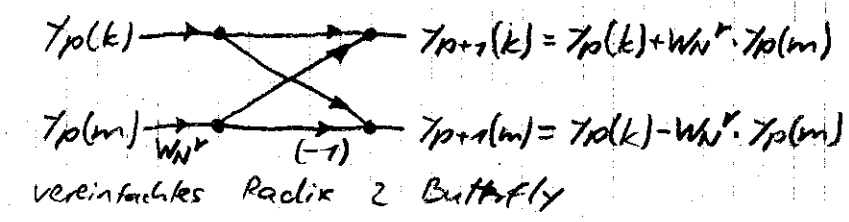
FFT

Rechenaufwand:  
 $Z_m = N \cdot \log_2(N)$  wenn Wertezahl  $N$  eine Zweierpotenz ist.

$s(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$   
 $\cos(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$



Radix 2 Butterfly  
weil  $W_N^{\frac{N}{2}} = (-1)$



decimation in Time (Eingangswerte müssen speziell geordnet übergeben werden) (bedeutet das die gesamte FFT Struktur vom Eingang (Zeitbereich) her aufgebaut wird)  
Bit Reverse  
Beim decimation in frequency wäre die Aufteilung der Werte in Folgepaare vom Ausgang (Frequenzbereich) her angefangen. Dabei existieren die Ausgangswerte im Bit Reverse Modus.

IFFT (inverse FFT)

Die Eingangswerte  $Y(k)$  müssen konjugiert komplex eingegeben werden (DFT/FFT auf die Werte  $Y^*(k)$  anwenden, d.h. Vorzeichen des Imaginärteils wechseln). Dazu kommt noch eine Division durch die Wertzahl  $N$

$$X^*(m) = \frac{\text{DFT } Y^*(k)}{N}$$

Bit Reverse:

Vertauscht man die Reihenfolge der Bitstellen des binär dargestellten Index  $n$  (rückwärts lesen), so erhält man den Platz des Elements  $X(n)$   
z.B. für  $N=8 \Rightarrow X(13) = X(071)$  in Platz 710=

Leakage / Fensterfunktionen

Leakage ist eine Erscheinung im Frequenzbereich die von den zeitlich begrenzten Ausschnitten im Zeitbereich her rührt, d.h. Leakage tritt auf wenn das Auswertintervall  $T$ , wesentlich kürzer ist als der vorliegende zu analysierende Vorgang.

(Tabelle S. 5-21) (Bild S. 5-19)

Oftware leist Frequenzverdoppelung

