# ZUSAMMENFASSUNG BAUSTATIK 3

## Ermittlung der Schnittkräfte (Kraftgrössenverfahren):

1. **Statische Unbestimmtheit** berechnen
2. **Statisch Bestimmtes Hauptsystem** bilden
3. **Lastspannungszustände** ermitteln
   **($M_0$ ; $N_0$)** (aus reellen Belastungen)
4. **Einheitsspannungszustände** ermitteln
   **($M_1$ ; $N_1$)** (aus virtuellen Belastungen)
5. **$\delta'_{jk}$ - Werte** ermitteln **(Integraltabelle)**
6. **Verformungsbedingungen** formulieren
   **($\delta'_{10} + \delta'_{11} * X_1 = 0 \leftrightarrow X_1 = - \delta'_{10} / \delta'_{11}$)**
7. Auflösen des Gleichungssystems und Ermittlung der **endgültigen Schnittkräfte ($M = M_0 + M_1 * X_1$)**
   **($N = N_0 + N_1 * X_1$)**
8. **Verformungskontrollen (z.B. $\delta'_v = \delta'_{10} + \delta'_{11} * X_1 = 0$)**

## Arbeitsgleichung (PvK):

$$\bar{1}\cdot\delta_j = \int\left\{\frac{\bar{M}M}{EI}+\frac{\bar{N}N}{EA}+\kappa_V\frac{\bar{V}V}{GA}+\frac{\bar{M}_T M_T}{GI_T} + \alpha_T\left(\bar{N}T_0+\bar{M}\frac{\Delta T}{h}\right)\right\}dx + \sum\frac{\bar{F}F}{k_F}+\sum\frac{\bar{M}M}{k_M}-\sum\bar{C}c-\sum\bar{M}_E\varphi$$

vereinfacht:

$$\boxed{\bar{1}\cdot\delta' = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx+\frac{I_c}{A}\int N\bar{N}\,dx + EI_c\left\{\int\bar{N}\alpha_T T_0\,dx+\int\bar{M}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}\,dx + \sum\frac{\bar{F}F}{k_F}+\sum\frac{\bar{M}M}{k_M}-\sum\bar{C}c-\sum\bar{M}_E\varphi\right\}}$$

$$EI_c\left\{\underbrace{\int\bar{N}\alpha_T T_0\,dx}_{\text{gleichmässige Temperatur}}+\underbrace{\int\bar{M}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}\,dx}_{\text{ungleichmässige Temperatur}}\right\}$$

(im QS)

$$EI_c\left\{\sum\frac{\bar{F}F}{k_F}+\sum\frac{\bar{M}M}{k_M}\right\}$$ Kraft Feder & Moment Feder

$$EI_c\left\{-\sum\bar{C}c-\sum\bar{M}_E\varphi\right\}$$ Auflagerverschiebung & Auflagerverdrehung

$I_c$ : Vergleichsträgheitsmoment (grösster)

## Ermittlung der Verschiebungen:

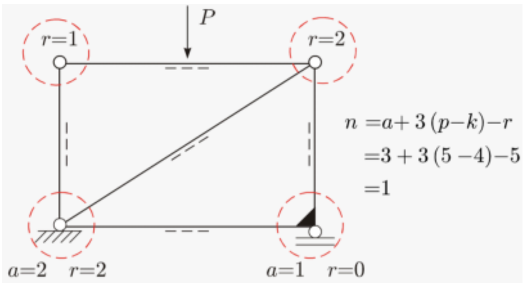
1. **Virtuelle Kraft $\bar{1}$** am gegebenen Punkt in gegebene Richtung einführen **($\bar{P}$)**
2. **Momente am Grundsystem** berechnen **($M_0$ ; $M_1$)**
3. **Momente Integrieren ($\omega_{max}$)**

## Statische Bestimmtheit:

n : Grad der statischen Unbestimmtheit
a : Anzahl der Auflagerreaktionen
p : Anzahl der Stäbe zwischen den Knoten
k : Anzahl der Knoten
r : Anzahl der Nebenbedingungen
(in der Regel Anzahl Stäbe des Knotens - 1)

$$\boxed{n = a + 3(p - k) - r}$$

Bsp.:




## Mehrfach statische Unbestimmtheit:

Verformungsbedingungen 2-fach Unbestimmt:

$$\delta'_{11}\cdot X_1+\delta'_{12}\cdot X_2+\delta'_{10} = 0$$
$$\delta'_{21}\cdot X_1+\delta'_{22}\cdot X_2+\delta'_{20} = 0$$

zu beachten: $\delta_{12} = \delta_{21}$ (gemäss Satz von Maxwell !)

$\delta_{10}$: Verformung an Ort 1 Infolge **reeller** Belastung
$\delta_{11}$: Verformung an Ort 1 Infolge **1. virtueller** Belastung
$\delta_{12}$: Verformung an Ort 1 Infolge **2. virtueller** Belastung

$\delta_{20}$: Verformung an Ort 2 Infolge **reeller** Belastung
$\delta_{21}$: Verformung an Ort 2 Infolge **1. virtueller** Belastung
$\delta_{22}$: Verformung an Ort 2 Infolge **2. virtueller** Belastung

Verformungsbedingungen n-fach Unbestimmt:

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n}\\ & & \vdots & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\\vdots\\X_n\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{10}\\\delta_{20}\\\delta_{30}\\\vdots\\\delta_{n0}\end{bmatrix}$$

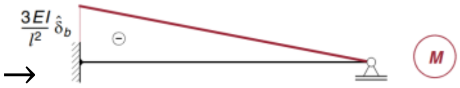
Satz von Maxwell beachten!: $\delta_{jk} = \delta_{kj}$

**$M = M_0 + M_1 * X_1 + M_2 * X_2 \;\dots + M_n * X_n$**
**$N = N_0 + N_1 * X_1 + N_2 * X_2 \;\dots + N_n * X_n$**

## *Moment infolge Auflager**verschiebung** (Bsp. Setzung):*


Grundsystem


Einheitsspannungszustand




Endgültige Momentenlinie

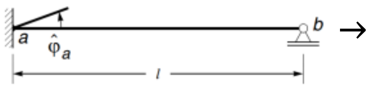
$$\delta'_{10} = -EI\left[\bar{C}c\right] = -EI\left[B_1\hat{\delta}_b\right] = -EI\left[-\frac{1}{l}\hat{\delta}_b\right] = EI\frac{1}{l}\hat{\delta}_b \rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{EI\frac{1}{l}\hat{\delta}_b}{\frac{l}{3}} = -\frac{3EI}{l^2}\hat{\delta}_b$$

$\bar{C}$ : Auflagerkraft virtuell
c : Verschiebung
(z.B. durch Setzung)

Negativ, da hier Auflagerkraft entgegengesetzt der Verschiebung

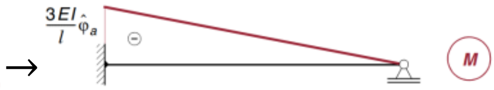
**$M_0$ = 0 da frei verschiebbar!**

## *Moment infolge Auflager**verdrehung**:*




Grundsystem


Einheitsspannungszustand




Endgültige Momentenlinie

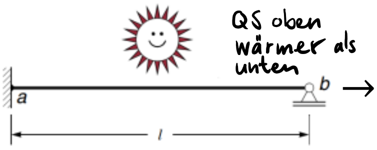
$$\delta'_{10} = -EI\cdot[\bar{M}_E\,\varphi] = -EI\cdot[M_1^a\cdot\hat{\varphi}_a] = -EI\cdot[-l\cdot\hat{\varphi}_a] = EI\cdot l\cdot\hat{\varphi}_a \rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{EI\cdot l\cdot\hat{\varphi}_a}{\frac{l^3}{3}} = -\frac{3EI}{l^2}\hat{\varphi}_a$$

$\bar{M}_E$ : Auflagermoment virtuell
φ : Verdrehung

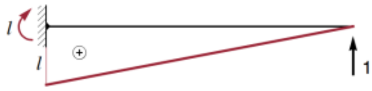
Negativ, da hier die Verdrehung nicht an der Seite wo $M_1$ Zug erzeugt

**$M_0$ = 0 da frei verdrehbar!**

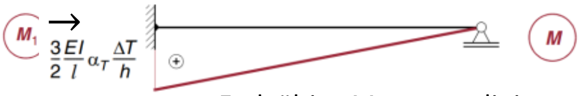
## *Moment infolge **ungleichmässiger** Temperaturdifferenz:*




Grundsystem




Einheitsspannungszustand




Endgültige Momentenlinie

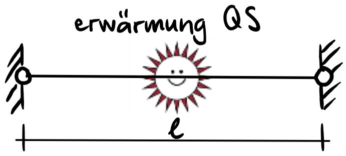
$$\delta'_{10} = EI\int\bar{M}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}dx = EI\int M_1\alpha_T\frac{\Delta T}{h}dx = -EI\cdot l\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot\alpha_T\frac{\Delta T}{h} \rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-\frac{l^2}{2}\cdot EI\cdot\alpha_T\frac{\Delta T}{h}}{\frac{l^3}{3}} = \frac{3EI}{2\,l}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}$$

$\bar{M}$ : Moment virtuell
$\alpha_T$ : Längenausdehnungskoeffizient
$\Delta T = T_U - T_O$ : Temperaturdifferenz

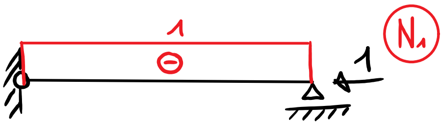
Negativ, da hier nicht Seite wärmer wo $M_1$ Zug erzeugt

1/2 da Integral aus Dreieck- und Rechteckfläche (Temperatur konstant über Länge → Rechteck)

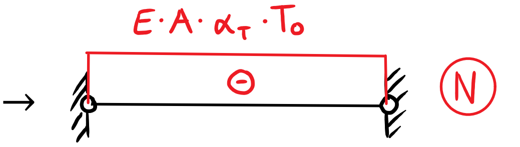
## *Normalkraft infolge **gleichmässiger** Temperaturdifferenz:*




Grundsystem




Einheitsspannungszustand




Endgültige Momentenlinie

$$\delta'_{10} = EI\int\bar{N}\alpha_T T_0\,dx = EI\int N_1\cdot\alpha_T\cdot T_0\,dx = -EI\cdot(-1)\cdot\alpha_T\cdot T_0\cdot\ell$$

$$\rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{E\cancel{I}\cdot\alpha_T\cdot T_0\cdot\cancel{\ell}}{\frac{\cancel{I}\cdot\cancel{\ell}}{A}} = -E\cdot A\cdot\alpha_T\cdot T_0$$

Negativ, da hier Ausdehnung (Verschiebung) entgegengesetzt der Ersatzkraft

$\bar{N}$ : Normalkraft virtuell
$\alpha_T$ : Längenausdehnungskoeffizient
$T_0$ : Temperaturdifferenz
(Erwärmung + ; Abkühlung -)

vereinfacht:

$$\delta'_{10} = E\cdot I\cdot\alpha_T\cdot T_0\cdot\ell$$

$$\delta_{10} = \alpha_T\cdot T_0\cdot\ell$$

Vorzeichen beachten!