1. Grundbegriffe der Lehre von den reellen Funktionen

1.1. Grundlagen

Definitionsbereich von f	$DB(f) = \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ / (ohne; mit] \ { … }
Argument / Input	x
Wert / Output	$f(x)$
T = Teilmenge von D	Bild von T → $f(T)$
Graph = Menge von Zahlenpaaren	$Graph(f) = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$
Bild = Menge der definierten Werte	$\{\dots\}$

Die Funktion sin(x)

Funktion	sin
Wert dieser Funktion an der Stelle x	sin(x)

$PlotGraph([f_{(1)}, f_{(2)}],\ AbsBereich,\ OrdBereich,\ AbsTic,\ OrdTic)$

$PlotGraph([\tan, \sin]$, -PI..2*PI, -5..5, PI/2, 1$)$

Termen

Pfeilschreibweise	$f := x \mapsto \sqrt{2x}$
Auswertung	$f(2) = \sqrt{2} \cdot 2$
Zuweisung: $f := x -> T$	Auswertung: $f(x)$

Substitution bei Termen	$T\big\|_{x=S}$ (x wird durch S ersetzt)
Graph dieser Funktion	$\{(x,y) \mid y = T\}$
$subs(T,\ x = S)$	x = formale Argument / T = Zuordnungsterm

1.2. Spezielle Eigenschaften von Funktionen

gerade	$\forall x \in DB(f): f(-x) = f(x)$
ungerade	$\forall x \in DB(f): f(-x) = -f(x)$
periodische	$\forall x \in DB(f): f(x+p) = f(x)$
Umkehrbarkeit	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
monoton steigend	$\forall x_1, x_2 \in DB(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	$\forall x_1, x_2 \in DB(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

primitive Periode = kleinste positive Periode

1.3. Definitionsbereich bestimmen

$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$	$\frac{y}{x} \Rightarrow x \neq 0$
$\arcsin(x) \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$	$\arccos(x) \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$
$\arctan(x) \Rightarrow$ Wertebereich zwischen $-\frac{\pi}{2} / \frac{\pi}{2}$	Anwendbare Funktion $\tan_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$
$\ln(x) \Rightarrow x > 0$	

1.4. Gleichungsregeln

Wurzel auf der linken Seite entfernen ($\sqrt{R} = S$)

- Wenn $S \geq 0$ ist, so ist die Gleichung äquivalent zu $R = S^2$
- Wenn $S \leq 0$ ist, so ist die Gleichung unerfüllbar.

Streng monoton steigende Funktion

Man darf beidseitig einer Ungleichung dieselbe streng monoton steigende Funktion anwenden, wenn beide Seiten in ihrem Definitionsbereich liegen. Bei den folgenden Funktionen ($\sin, \cos, \tan, abs, sqr$) muss man den Bereich definieren. Die linke und rechte Seite der Gleichung, muss entweder positiv oder negativ sein.

Streng monoton fallende Funktion

Man darf beidseitig einer Ungleichung dieselbe streng monoton fallende Funktion anwenden, wenn beide Seiten in ihrem Definitionsbereich liegen. Dabei ist aber das Vorzeichen umzudrehen. ($chs, rez_{(0;\infty)}, \arccos$)

1.5. Analyse der Eigenschaften von Funktionen

Funktion gerade / ungerade ?	x durch $-x$ ersetzen, in den Anfangszustand bringen, vergleichen
Funktion periodisch?	x durch $x+p$ ersetzen, in den Anfangszustand herbringen, vergleichen
Funktion umkehrbar?	x durch x_1 und x_2 ersetzen, beide Funktionen auflösen, vergleichen
Funktion monoton?	$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$, vergleichen

1.6. Operationen mit Funktionen

Arithmetische Grundoperationen mit Funktionen

f und g seien reele Funktionen, c eine Zahl

$-f := x \mapsto -f(x)$	$(f+c) := x \mapsto f(x) + c$
$f+g := x \mapsto f(x) + g(x)$	$(f-c) := x \mapsto f(x) - c$
$f-g := x \mapsto f(x) - g(x)$	$(c-f) := x \mapsto c - f(x)$
$f \cdot g := x \mapsto f(x) \cdot g(x)$	$(f \cdot c) := x \mapsto f(x) \cdot c$
$\frac{f}{g} := x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f}{c} := x \mapsto \frac{f(x)}{c}$ für $c \neq 0$
	$\frac{c}{f} := x \mapsto \frac{c}{f(x)}$

Verkettung

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f\ @\ g)(x)$

Graphische Auswirkung der Verkettung von beliebigen Funktionen mit linearen Funktionen

$$F := x \mapsto A \cdot f(ax+b) + B$$

1. Horizontalverschiebung um $|b|$ und zwar
   - nach *links*, wenn $b > 0$
   - nach *rechts*, wenn $b < 0$
2. Horizontale Skalierung um den Faktor $\frac{1}{|a|}$
   - Wenn $a < 0$ zusätzlich eine Spiegelung an der 2. Koordinatenachse.
3. Vertikale Skalierung um den Faktor $|A|$
   - Wenn $A < 0$ zusätzlich eine Spiegelung an der 1. Koordinatenachse.
4. Vertikalverschiebung um $|B|$ und zwar
   - nach *oben*, wenn $B > 0$
   - nach *unten*, wenn $B < 0$

Umkehrfunktion

Entspricht der Spiegelung einer Funktion an der 1. Quadrantenhalbierenden.

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$	$(f^{-1})^{-1} = f$

Graphen von Umkehrfunktionen

Sei f eine umkehrbare Funktion. Dann ist der Graph von f^{-1} das Spiegelbild des Graphen von f an der 1. Quadranten**halbierenden**.

Verkettung einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion

Sei f eine umkehrbare Funktion.

$\forall x \in DB(f): f^{-1}(f(x)) = x$	$f^{-1} \circ f = id_{DB(f)}$

1.7. Grenzwerte

Berechnen von Grenzwerten in MuPAD

$x \mapsto \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	limit(f(x),x=infinity)
$x \mapsto a+$	$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$	limit(f(x),x=a,Right)
$x \mapsto a-$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$	limit(f(x),x=a,Left)

Stetig

Wenn die reelle Funktion f an der Stelle a definiert ist und folgendes gilt, dann heisst die Funktion bei a stetig.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

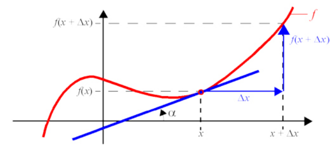
2. Differenzialrechnung

2.1. Grundbegriffe

Ableitung / Grenzwert

Wenn der Grenzwert im eigentlichen Sinne existiert, so heisst die Funktion f an der Stelle x differenzierbar und der Grenzwert heisst die Ableitung von f an der Stelle x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



1. $f(x+\Delta x)$ und $f(x)$ durch gegebener Funktion $f(x)$ austauschen
2. Dann x durch $x + \Delta x$ und x austauschen, auflösen

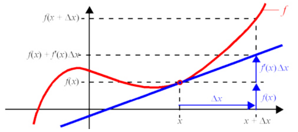
limit((f(x+dx) – f(x)) / dx, dx = 0)

Wichtige Funktionswerte

α	$0°$	$30° / \pm\frac{\pi}{6}$	$45° / \pm\frac{\pi}{4}$	$60° / \pm\frac{\pi}{3}$	$90° / \pm\frac{\pi}{2}$	$180° / \pm\pi$	$270° / \pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$	$\pm\frac{2\pi}{3}$
sin	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	0	$-1 \mid +1$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$
tan	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert	0	nicht definiert	0	$-\sqrt{3} \mid +\sqrt{3}$

Abschätzung

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$



Ableitungsfunktion

Funktion	Ableitungsfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
f'	$x \mapsto f'(x)$	f'	$x \mapsto f'(x)$
$id := x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\sin$	$\cos$
$sqr := x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\cos$	$-\sin$
$rez := x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\tan$	$1 + \tan^2$
$sqrt := x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\exp := x \mapsto e^x$ $\exp := x \mapsto e^{-x}$	$\exp := x \mapsto e^x$ $\exp := x \mapsto -e^{-x}$	$\arccos$	$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln$	$rez := x \mapsto \frac{1}{x}$	$\arctan$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	tan	$1 + \left(\frac{\sin}{\cos}\right)^2$
$x \mapsto \tan(x) - x$	$x \mapsto \tan(x)^2$		

Linearitätsregel

f und g seien differenzierbare Funktionen, ebenfalls Term S und T. c sei eine Konstante.

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

Produkt- und Quotientenregel

f und g seien differenzierbare Funktionen, ebenfalls Term S und T.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $\frac{d}{dx}(S \bullet T) = \left(\frac{dS}{dx}\right)T + S\left(\frac{dT}{dx}\right)$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{S}{T}\right) = \frac{\left(\frac{dS}{dx}\right)T - S\left(\frac{dT}{dx}\right)}{T^2}$

Potenzregel

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Kettung für Ableitungen

f und g seien differenzierbare Funktionen,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

Ableitung in MuPAD

Der Ableitungsstrich gehört zu einer Funktion, der Differenzialquotient zu einem Term.

$\mathrm{diff}(1/x, x) = -(1/x^2)$ | $(1/x)' = -(x'/x^2)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{diff}(1/x, x) \neq (1/x)'$

$\mathrm{diff}(\sin(x), x) = \cos(x)$ | $\mathrm{diff}(\sin, x) = 0$ | $\mathrm{diff}(\sin) = \sin$

Ableitungsfunktion	Ableitung von Termen	
$f' = D(f)$ (neue Funktion $x \mapsto f'$)	$\mathrm{diff}(f, x) = 0$	$\mathrm{diff}(f(x), x)$

Ausgangslage	
$f := x -> \exp(2 \cdot x)$	$g := x -> 2 \wedge x$

$f'(3) = 2 \cdot e^6$ $D(f)(3) = 2 \cdot e^6$ $D(f(3)) = 0$	$f' = x \mapsto 2 \cdot e^{2x}$ $D(f) = x \mapsto 2 \cdot e^{2x}$	$\mathrm{diff}(f(x), x) = 2 \cdot e^{2x}$ $\mathrm{diff}(f(y), x) = 0$	$\mathrm{diff}(f, x) = 0$

In der Ableitungsfunktion das x durch 3 ersetzen → Geht bei diff nicht! = 0

zweite und höhere Ableitung	Vergleich: Ableitung von Termen
$f'' = D(D(f)) = (D@D)(f)$ $f''' = D(D(D(f))) = (D@@3)(f)$ $f'' = x \mapsto 4 \cdot e^{2x}$ | $f''' = x \mapsto 8 \cdot e^{2x}$	$\mathrm{diff}(f(x), x, x) = 4 \cdot e^{2x}$ $\mathrm{diff}(f(x), x\$3) = 8 \cdot e^{2x}$

$(D(f)@g)(1) = 2 \cdot e^2$ | $D(f@g)(1) = 4 \cdot e^2$

Funktionseigenschaften

Funktion	gerade	ungerade	periodisch	umkehrbar	m. steigend	m. fallend
exp/ln				x	x	
sin/tan		x	x			
arcsin		x		x	x	
arctan		x		x	x	
arccos				x		x
sqr/abs	x					
cos	x		x			
sig		x				
id		x		x	x	
chs		x		x		x
sqrt				x	x	
rez		x		x		

2.2. Linearisierung

Linearisierung ist immer eine Methode der Wahl, wenn
- die exakte Berechnung aufwendig oder gar unmöglich ist
- nur lokale Eigenschaften interessieren
- ein gewisser Fehler toleriert werden kann

Linearisierungsformel

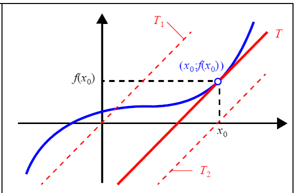
f sei eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion.

$T := x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Die Tangentenfunktion liefert in der Umgebung des Berührungspunktes eine einfache und gute Approximation der Funktionswerte.

$f(x) \approx T(x)$

$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



1. Aus der Gleichung eine Funktion erstellen $f_1 = 0 \Rightarrow f := x \mapsto f_1$
2. Steigung mittels der Ableitungsfunktion bestimmen = $f'(x_0)$
3. Horizontalverschiebung um x_0 (kann auch negativ sein → - · - = +)
4. Vertikalverschiebung um $f(x_0)$

Lineare Näherungsformel

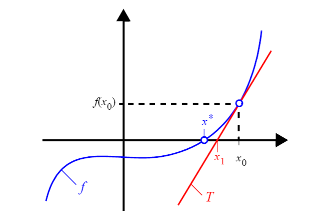
$T := x \mapsto f'(x_0)((x_0 + \Delta x) - x_0) + f(x_0)$

1. nach der Linearisierungsformel vorgehen
2. $f(x_0 + \Delta x)$ auswerten

Algorithmus von Newton (Nullstelle / Schnittpunkt zweier Funktionen)

Dies kann mehrmals durchgeführt werden, damit der Wert genauer wird.

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

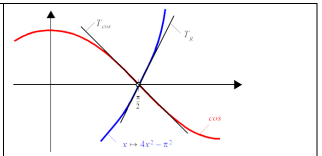


1. Aus der Gleichung eine Funktion erstellen $f_1 = 0 \Rightarrow f := x \mapsto f_1$
2. Wurde x_0 nicht angegeben, dann den Startwert aus den Graphen herauslesen. Anderenfalls den Definitionsbereich beachten und mit diesen Werten die Funktion auswerten. Wechsel von negativ zu positiv oder umgekehrt von Werten = Bereich liegt dazwischen.
3. Funktion mit x_n auswerten $f(x_n)$
4. Ableitung mit x_n auswerten $f'(x_n)$
5. In der Formel einsetzen
6. Weitere genauere Auswertungen ab Punkt 3 wiederholen
7. Genauer Wert erreicht, sobald $f(x_{n+1}) \approx 0$ ist

Regel von Bernoulli-l'Hôpital

Man darf bei Grenzwerten den Zähler und den Nenner ableiten, wenn entweder beide nach 0 oder beide nach $\pm\infty$ gehen.

$\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \right)$



1. Überprüfen ob beide Funktionen (Zähler und Nenner) nach 0 oder nach $\pm\infty$ gehen.
2. Zähler wie auch Nenner ableiten
3. Gehen Zähler und Nenner immer noch nach 0 oder $\pm\infty$, dann Punkt 2 wiederholen.
4. Fertig sobald min. Zähler oder Nenner nicht mehr nach 0 oder $\pm\infty$ gehen

2.3. Approximation von Funktionen

Höhere Ableitungen und Ableitungsfunktionen

Sei f eine differenzierbare Funktion. Wenn ihre Ableitungsfunktion f' an der Stelle x differenzierbar ist, so bezeichnet man sie als 2. Ableitung von f an der stelle x.

2. Ableitung von f	4. Ableitungsfunktion
$f''(x)$ statt mit $(f')'(x)$	$f^{(4)}$ statt f''''

McLaurin – Polynom

Ist ein Spezialfall vom Taylorpolynom, wenn das Argument 0 ist.

$M_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$

$T_{x_0,n} := x \mapsto M_n(x) + R_n(x)$

$T(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right) + R_n(x)$

Bestimmungsgleichung

$c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

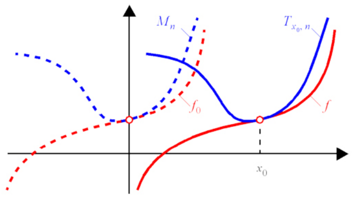
Taylorpolynome

$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n$

$f(x) = T(x) + R_n(x)$

$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k \right) + R_n(x)$

Graph zu McLaurin und Taylorpolynom



3. Theoreme

Doppelwinkeltheorem	$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
Additionstheorem	$\sin(x-y) = \sin(x)\cdot\cos(y) - \cos(x)\cdot\sin(y)$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$ $\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot\sin(y)$ $\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
Potenzen	$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Multiplikation	$\sin(x)\cdot\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ $\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

4. Integralrechnung

4.1. Grundregeln für Integrale

Grundregeln für Integrale

$\int_a^b f = -\int_b^a f$	$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$
$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$	$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_{x=a}^{b}$	$F(x) = \text{Stammfunktion von } f(x)$

4.2. Numerische Berechnung von Integralen

Definition Integral

$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $x_i = a + i \cdot \Delta x$

Rechteckregel

$\int_a^b f \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

Trapezregel

$\int_a^b f \approx \left[\dfrac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \cdot \Delta x$

Simpsonregel

$S_n = \dfrac{\Delta x}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right)$ $y_i = f(x_i)$

$E_n = \left(\int_a^b f \right) - S_n = \dfrac{b-a}{180} \Delta x^4 \cdot f^{(4)}(\xi)$ für ein $\xi \in [a;b]$

Fassregel (Simpson mit 2 Teilintervallen)

$\int_a^b f = \dfrac{y_a + 4y_m + y_b}{3} \cdot \Delta x$ $y_i = f(x_i)$

4.3. Geometrische Anwendungen in der Ebene

Flächenberechnungen

$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

Bogenlängen von Funktionsgraphen

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Schwerpunktformel

$A = \int_a^b f$	$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$	$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f^2$

Momente bezüglich Abszissen-/Ordinatenachse (x/y)

$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2$	$M_y = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$

Moment Kurvenstück

$M_x = \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$	$M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

4.4. Integral Cookbook

$\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot (f(x))^2 + c$	
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(\vert f(x) \vert) + c$	
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot [f(x)]^{n+1} + c$	
$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	*Kann x nur mit einem Exponenten geschrieben werden?*
$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$	*Kann eine Konstante herausgenommen werden? Oder kann es umgeformt werden, indem man z.B. ½ rechnet und den Zähler * 2?*
$\int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1}\,dx$	*Kann der Wert auseinander genommen werden?*

5. Fouriertransformation

5.1. Fourier Entwicklung

Berechnung

$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ $T = \text{Periodendauer}$

Amplituden-Phasen-Form (Spektralform)

$fn := t \mapsto A_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t - \varphi_k) \right]$

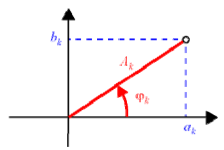
$A_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2},\ A_0 = a_0$

Wenn a_k positiv → $\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

Wenn a_k negativ → $\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi$

Wenn $a_k = 0$ und b_k positiv → $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$

Wenn $a_k = 0$ und b_k negativ → $\varphi_k = -\frac{\pi}{2}$



Sinus-Cosinus-Form

$fn := t \mapsto a_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) \right]$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_T s(t)\,dt$		
$a_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t)\,dt$	$a_k = \cos(\varphi_k) \cdot A_k$	$a_k = 0$ wenn fn **ungerade**
$b_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t)\,dt$	$b_k = \sin(\varphi_k) \cdot A_k$	$b_k = 0$ wenn fn **gerade**

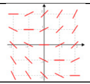
- **Spiegelung an Vertikale (Ordinate)**
  - $b_k \to \widetilde{b_k} = -b_k$
$\varphi_k \to \widetilde{\varphi_k} = -\varphi_k$
- **Spiegelung an Horizontalen (Abszisse)**
  - $a_0, a_k, b_k \to \widetilde{a_0} = -a_0, \widetilde{a_k} = -a_k, \widetilde{b_k} = -b_k$
$A_0, \varphi_k \to \widetilde{A_0} = -A_0, \widetilde{\varphi_k} = \varphi_k \pm \pi$
- **Verschiebung allgemein**

  $\widetilde{fn} := t \mapsto \widetilde{a_0} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\widetilde{a_k} \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + \widetilde{b_k} \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) \right]$
  - $\widetilde{a_0} = a_0, \widetilde{a_k} = a_k \cdot \cos(k \cdot \gamma) - b_k \cdot \sin(k \cdot \gamma)$
$\widetilde{b_k} = a_k \cdot \sin(k \cdot \gamma) - b_k \cdot \cos(k \cdot \gamma), \gamma = \omega_1 \cdot \tau = \frac{2\pi \cdot \tau}{T}$
- **Verschiebung um eine halben Periode**
  - **Ungerade** Koeffizienten ändern das Vorzeichen $a / b_{2n+1} = -a / b_{2n+1}$
  - $\varphi_k = \varphi_k \pm \pi$

6. Differenzialgleichung

6.1. Richtungsfeld

Definition

$f'(x) = F(x, f(x))$	Für jeden Punkt $(x,y) \in M$ des Richtfeldes die Steigung $F(x,y)$ eintragen
$2g'(x) = x + g(x)$ 	Zeichen Sie ihr Richtungsfeld im Bereich $x \in [-2;2]$ und $g(x,y) \in [-2,2]$ von Hand, wobei Sie ein Gitter mit der Maschenweite verwenden.

6.2. Das Verfahren von Euler

$f'(x) = G(x, f(x))$	$P_n = (x_n, y_n)$ $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$
$x_{n+1} = x_n + \Delta x$	$y_{n+1} = y_n + s_n \cdot \Delta x$
$s_n = G(x_n, y_n)$	

6.3. Das Verfahren von Runge-Kutta

Ähnliches Verfahren wie Euler, s_n wird speziell berechnet.

$s_n = \frac{t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4}{6}$	
$t_1 = G(x_n, y_n)$	$t_2 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + t_1 \frac{\Delta x}{2}\right)$
$t_3 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + t_2 \frac{\Delta x}{2}\right)$	$t_4 = G(x_n + \Delta x, y_n + t_3 \Delta x)$

6.4. Separierbare Differenzialgleichungen

Definition

Eine Differentialgleichung für die Funktion f heisst *separierbar*, wenn sie auf diese Form gebracht werden kann

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

Substitution

$f(x) = y$ $x = x$	$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Beispiel

$f(x) \cdot f'(x) + x = 0$	
$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}$	Zuerst prüfen wir, ob sie explizit gemacht werden kann.
$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$	Wir führen die Substitutionen ein.
$dy \cdot y = -x \cdot dx$	Nun *separieren* wir die Variablen, das heisst, wir bringen alle Teilterme, welche y enthalten auf die eine und alle, welche x enthalten auf die andere Seite und zwar so, dass die Differenziale dx und dy als Faktoren im Zähler erscheinen.
$\int y dy = \int -x dx$	Nun schreiben wir beidseitig ein Integralzeichen.
$\frac{y^2}{2} + c_1 = \frac{-x^2}{2} + c_2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = c$	
$f(x)^2 + x^2 = c$	Wir ersetzen die Variable y wieder durch den ursprünglichen Funktionswert $y = f(x)$
$f(x) = \pm\sqrt{c - x^2}$	Wir isolieren den Funktionswert.

Die die Graphen der allgemeinen Lösung (= Lösungsmenge) dieser Differenzialgleichung bilden also eine Schar von Kreisen, deren Zentren im Ursprung liegen und welche den Radius $\sqrt{c}$ haben.

6.5. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Definition

Eine Differenzialgleichung, bei welcher eine linearkombination der gesuchten Funktion f gleich einer vorgegebenen Funktion sein muss, also

$a_0 f + a_1 f' + a_n f^{(n)} = s$	$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} = s$

wobei die a_k Konstanten und s eine vorgegebene Funktion ist, heisst lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die a_k heissen die Koeffizienten, s die Störfunktion .Wenn die Störfunktion die Nullfunktion ist, heisst die Differenzialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Homogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$2f(x) + 3f'(x) = 0$	
$f_1 := x \mapsto e^{sx}$	Ansatz mit einer noch unbekannten Konstanten s.
$f_1' := x \mapsto se^{s(x)}$	Ableitungsfunktion
$2e^{sx} + 3se^{sx} = 0$	In die Differenzialgleichung eingesetzt erhalten wir
$2 + 3s = 0$	Wir dividieren die Gleichung durch e^{sx}
$s = -\frac{2}{3}$	Und können nun die Konstante bestimmen
$f_1 := x \mapsto Ae^{-\frac{2}{3}x}$	eine Lösung ist somit

Allgemeine Lösung der homogenen Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$	Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung
$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$	Um sie zu lösen, formuliert man zuerst ihre *charakteristische Gleichung*.

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn die charakteristische Gleichung **zwei verschiedene** Lösungen s_1 und s_2 besitzt (die Diskriminante also positiv ist) so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

   $$f := x \mapsto Ae^{s_1 x} + Be^{s_2 x}$$

2. Wenn die charakteristische Gleichung **nur eine Lösung** s_1 besitzt (die Diskriminante also Null ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

   $$f := x \mapsto (Ax + B)e^{s_1 x}$$

3. Wenn die charakteristische Gleichung **keine Lösung** hat (die Diskriminante also negativ ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

   $$f := x \mapsto Ae^{rx} \cdot \cos(\omega \cdot x - \varphi)$$

   mit $r = \frac{-c_1}{2c_2}$ und $\omega = \sqrt{\frac{c_0}{c_2} - r^2}$

   A und φ sind die frei wählbaren Konstanten.
   Eine andere Darstellungsform für die allgemeine Lösung ist

   $$f := x \mapsto e^{rx} \cdot (a \cdot \cos(\omega \cdot x) + b \cdot \sin(\omega \cdot x))$$

   mit frei wählbaren Konstanten a und b.

   Um die Parameter r und ω zu bestimmen, kann man auch so vorgehen: Man bringt die Lösungsformel für die quadratische charakteristische Gleichung auf die Form einer komplexen Zahl. Dann ist r ist der Realteil und ω der Imaginärteil.

   $$s = r \pm \omega\sqrt{-1}$$

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer inhomogene lineare Differenzialgleichung für f ist die Summe einer partikuläre Lösung und der allgemeine Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung.

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = $ *Störfunktion*

Störfunktion	Partikuläre Lösung für f
c	$f_1 := x \mapsto c$
$e^{3 \cdot x}$	$f_1 := x \mapsto a \cdot e^{3 \cdot x}$
$3x + 5$ / x	$f_1 := x \mapsto ax + b$
$x^2 + 2x - 5$	$f_1 := x \mapsto ax^2 + bx + c$
$\sin(2x)$	$f_1 := x \mapsto a \cdot \cos(2x) + b \cdot \sin(2x)$
$x^2 + \sin(2x) + e^{3x}$	Für jeden Summanden eine spezielle Lösung finden und anschliessend addieren. Zusätzlich noch die allgemeine Lösung.

7. Nice2Know

$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$	$\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Koeffizientenvergleich

$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$
$Q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \ldots + b_n \cdot x^n$
Damit die beiden Polynome gleich sind ($P(x) = Q(x)$), müssen ihre Koeffizienten gleich sein. $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$

$-2ax + a - 2b = 2x - 5$	
$-2ax = 2x$ $a - 2b = -5$	Koeffizienten werden gleichgesetzt und aufgelöst.
$a = -1, b = 2$	

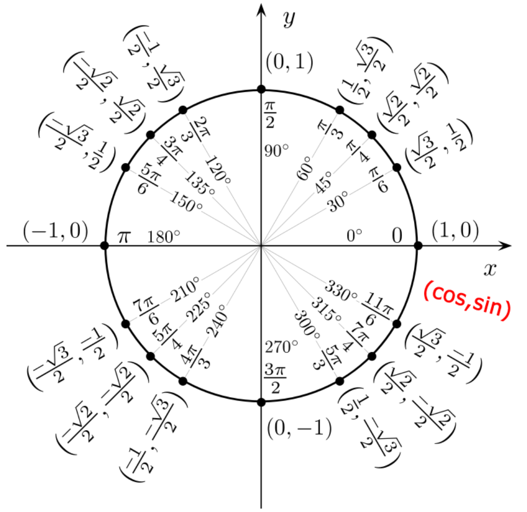
Mupad

$\sum_{i=0}^{n} i^2 =$	`sum(i^2, i=0..n)`	Summen berechnen
$\int x^2 dx =$	`int(x^2, x)`	Unbestimmtes Integral berechnen
$\int_1^4 \frac{1}{x} dx =$	`int(1/x, x=1..4)`	Bestimmtes Integral berechnen
`piecewise([x >= -1 and x <= 1, sin(x)], [x < -1, cos(x)])`		
`MyDgl := ode({f'(x)=2*x-3*f(x),f(0)=0},f(x))` `solve(MyDgl)`		Differenzial-gleichung lösen
`richtfeld((x,y) -> 2*x-3*y+1,-1..1,-1..1,0.1,0.1)`		

```
x := array(0..5): y := array(0..5):
x[0] := 0: y[0] := 0:
dx := 0.2:
F := (x,y) -> float(2*x-3*y+1):
for n from 0 to 4 do
s1 := F(x[n],y[n]):
s2 := F(x[n]+dx/2,y[n]+s1*dx/2):
s3 := F(x[n]+dx/2,y[n]+s2*dx/2):
s4 := F(x[n]+dx,y[n]+s3*dx):
s := (s1+2*s2+2*s3+s4)/6.0:
x[n+1] := x[n]+dx:
y[n+1] := y[n]+s*dx:
end_for
```

Runge-Kutta im MuPad

Wichtige Funktionswerte

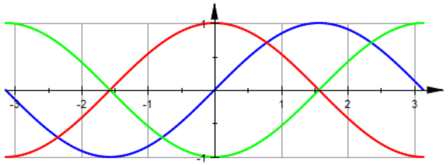


8. Funktionsgraphen

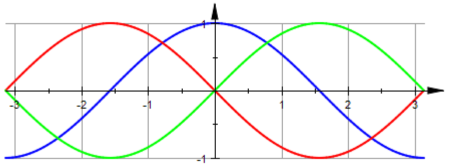
Legende

Funktion	Ableitung	Stammfunktion

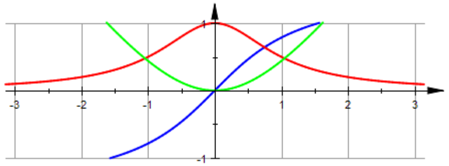
sin



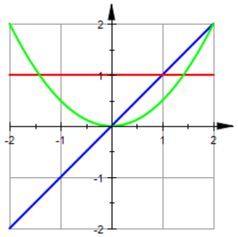
cos



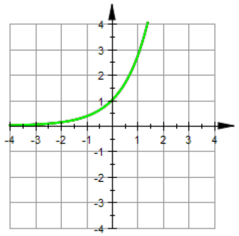
arctan



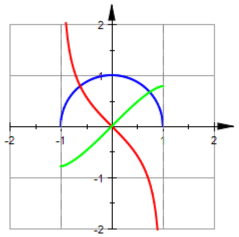
Id



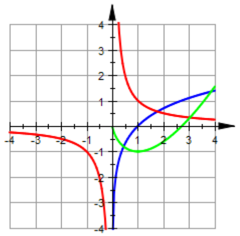
exp



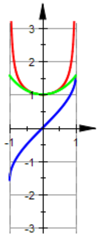
Halbkreis



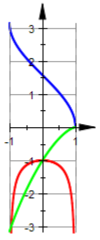
log



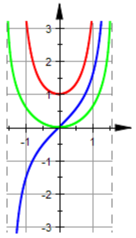
arcsin



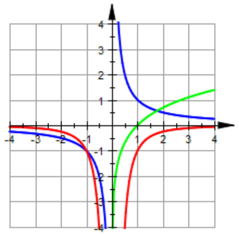
arccos



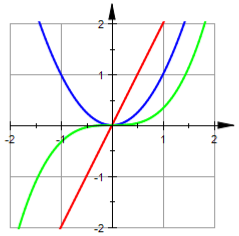
tan



rez



sqr



sqrt