INTEGRATIONSMETHODEN

LINEARITÄT

u und v seinen auf $[a,b]$ stetig und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$:

$$\int [c_1 u(x) + c_2 v(x)]dx = c_1 \int u(x)dx + c_2 \int v(x)dx$$

ELEMENTARTRANSFOTMATION

f sei auf $[a,b]$ stetig und $\int f(t)dt = F(t) + C$. Ferner seien $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Dann ist für alle x mit $\alpha x + \beta \in [a,b]$:

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$$

SPEZIALFÄLLE

a) f sei auf $[a,b]$ stetig differenzierbar. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ und f^α auf $[a,b]$ definiert. Dann ist

$$\int f'(x)[f(x)]^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [f(x)]^{\alpha+1} + C$$

b) f sei auf $[a,b]$ stetig differenzierbar. Ferner sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

PARTIELLE INTEGRATION

Sind die Funktionen u und v auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt auf $[a,b]$:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

SUBSTITUTIONSMETHODE

$f: x \mapsto f(x)$ sei auf dem abgeschlossenen Intercall I stetig. Ferner sei $g: t \mapsto x = g(t)$ auf dem Intervall J stetig differenzierbar und umkehrbar. Ausserdem sei $W_g \subset I$. Dann ist $h: t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$ über J integrierbar und es gilt dür alle $x \in w_g$:

$\int f(x)dx$ Substitution: $x = g(t); dx = g'(t)dt$

$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ mit $t = g^{-1}(x)$.

Evtl. Grenzen anpassen!

UNIVERSALSUBSTITUTION

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ daraus folgt $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

UNEIGENTLICHE INTEGRALE

UNBESCHRÄNKTE INTEGRALE

f sei über jedes Intervall $[a,t]$ mit $t \in (a,\infty)$ integrierbar. Existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx = I$, so nennt man I das **uneigentliche Integral von f über $[a,\infty)$.**

Schreibweise: $I = \int_a^\infty f(x)dx$.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

f sei über jedes Intervall $[t_1,t_2]$ mit $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}$. Existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{t_1\to-\infty} \int_{t_1}^a f(x)dx = I_1 \text{ und } \lim_{t_2\to\infty} \int_a^{t_1} f(x)dx = I_2,$$

so nennt man $I = I_1 + I_2$ das **uneigentliche Integral von f über $(-\infty,\infty)$.** (Für ∞ bzw. $-\infty$: **Limes separat berechnen**.)

Wenn das uneigentliche Integral von $|f|$ konvergiert, dann konvergiert auch das uneigentliche Integral von f.

MAJORANTENPRINZIP

f und g seien über jedes Intervall $[a,t]$ mit $t \in (a,\infty)$ integrierbar. Ferner sei $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a.\infty)$. Dann gilt: Wenn

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ konvergiert, dann konvergiert auch } \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

MINORANTENPRINZIP

f und g seien über jedes Intervall $[a,t]$ mit $t \in (a,\infty)$ integrierbar. Ferner sei $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a.\infty)$. Dann gilt: Wenn

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ divergiert, dann divergiert auch } \int_a^\infty f(x)dx.$$

KONVERGENZ DES INTEGRALS

Wenn $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert und $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ existiert, dann ist $g = 0$.

KAPITEL 2 – REIHEN

GRENZWERT

DEFINITION 2.2

Konvergiert die Reihe $\langle s_n \rangle$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen s, so sagen wir, die (unendliche) Reihe sei konvergent und besitze die Summe s.

SATZ 2.1

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen mit den Summen a und b sind und α, β ∈ ℝ dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

SATZ 2.2

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen mit den Summen a und b sind und für alle $a_n \leq b_n$ $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $a \leq b$.

SATZ 2.3

Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente bzw. divergente Reihe. Lässt man in den Partialsummen endlich viele Summanden weg oder fügt endlich viele Summanden hinzu, so ist auch die neue Reihe konvergent bzw. divergent.

SATZ 2.4

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq n_0$ gilt.

SATZ 2.5

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Ist notwendig und nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe

SATZ 2.6 (MAJORANTEN- UND MINORATENKRITERIUM)

a) Majorantenkriterium
Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so dass $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent.

b) Minoratenkriterium
Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Gibt es eine gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ bestimmt divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, so dass $a_n \geq d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

SATZ 2.7 (QUOTIENTENKRITERIUM)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $\left\langle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\rangle$ konvergent gegen den Grenzwert α (d.h. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$), so gilt:

a) Ist $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent.
b) ist $\alpha > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

-Das Quotientenkriterium ist hinreichend! Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ nicht konvergent, so kann die Reihe trotzdem konvergieren.

-$\alpha = 1 \Longrightarrow$ keine Aussage über Konvergenz/Divergenz.

SATZ 2.8 (WURZELKRITERIUM)

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist die Folge $\langle \sqrt[n]{|a_n|} \rangle$ konvergent gegen den Grenzwert α (d.h. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$), so gilt:

a) Ist $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
b) Ist $\alpha > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

-für $\alpha = 1$ kann über das Grenzverhalten keine Aussage gemacht werden.

SATZ 2.9 (INTEGRALKRITERIUM)

Es sei f auf $[1, \infty)$ definiert und monoton fallend. Weiter sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty)$. Dann ist die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent ist.

-das Gleiche gilt für Divergenz

-Nur anwendbar, wenn alle Glieder positiv sind

-Gilt auch für das Intervall $[k, \infty)$

SATZ 2.10 (LEIBNIZ-KRITERIUM)

Eine alternierende Folge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle |a_n| \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

SATZ 2.11

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

SATZ 2.12

Eine Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn sie unbedingt konvergent ist.

-Absolut konvergente Reihe dürfen umgeordnet werden.

SATZ 2.13

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ seien absolut konvergent, und es sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (absolut) konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ORTHOGONAL TRAJEKTORIEN

y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen.

DÄMPFUNG

Starke Dämfpung(Kriechfall): $\delta^2 - \omega_0^2 \geq 0$

Schwache Dämfpung(Schwingfall): $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$

$\alpha = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};\ \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}};\ \delta = \frac{a_1}{2a_2} > 0;$

ω:=Eigenfrequenz; δ:= Dämpfung

DGL 1. ORDNUNG

SEPARABLE DGL

$y' = f(x) \cdot g(y)$ Vorgehen: $\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

Substitution: $y(t) = y\,; y'(t)dt = dy$

$y(x_0) = y_0,\ y(x) = y$

GLEICHGRADIGE DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitution: $z = \frac{y}{x};\ y = xz;\ y' = xz' + z$

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

LINEARE DGL 1. ORDUNG

$y' + f(x)y = g(x)$ $g(x)$: Störglied

Homogen, wenn g die Nullfunktion ist. Homogen: $\frac{y'}{y} = -f(x)$

$y = Y_H + y_p$

Allgemeine Lösung: $y = e^{-\int f(x)dx}\left(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx}\,dx\right)$ mit $k \in \mathbb{R}$

DGL 2. ORDUNG

Allgemeine Lösung: $y = Y_H + y_p$

HOMOGENE LÖSUNG

Charakteristisches Polynom: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left|\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right|}$

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$: $Y_H = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$ $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$: $Y_H = e^{\lambda_1 x}(A_1 + A_2 x)$ $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$: $Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(A_1\cos(\alpha x) + A_2\sin(\alpha x))$ $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha\ (\alpha \neq 0)$ $\alpha = \sqrt{\left|\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right|}$

INHOMOGENE LÖSUNG (GRUNDLÖSUNGSVERFAHREN)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

g sei diejenige Lösung der homogenen DGL, für die $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) = 1$ gilt.

$$y_p = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t) dt$$

INHOMOGENE LÖSUNG (STÖRGLIEDRECHNUNG)

$\boldsymbol{y'' + a_1 y' + a_0 y = p_n(x)}$ $\quad p_n$ ist ein Polynom vom Grade n.

Dann gibt es ein Polynom q_n gleichen Grades, so dass

a) $a_0 \neq 0$ $\quad y_p = q_n(x)$
b) $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ $\quad y_p = x \cdot q_n(x)$
c) $a_0 = 0, a_1 = 0$ $\quad y_p = x^2 \cdot q_n(x)$

$\boldsymbol{y'' + a_1 y' + a_0 y = e^{bx} p_n(x)}$ $\quad q_n$ Polynom <u>gleichen</u> Grades wie p_n.

a) Falls b nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist,
$y_p = e^{bx} q_n(x)$
b) Falls b einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (Resonanz),
$y_p = e^{bx} x q_n(x)$
c) Falls b zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (zweifache Resonanz),
$y_p = e^{bx} x^2 q_n(x)$

$\boldsymbol{y'' + a_1 y' + a_0 y = e^{cx}(p_n(x)\cos(bx) + q_n(x)\sin(bx))}$ $\quad p_n, q_n$ Polynome höchstens n-ten Grades

r_n, s_n Polynome höchstens n-ten Grades

a) Falls $c + jb$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist
$y_p = e^{cx}(r_n(x)\cos(bx) + s_n(x)\sin(bx))$
b) Falls $c + jb$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist (Resonanz)
$y_p = e^{cx} x(r_n(x)\cos(bx) + s_n(x)\sin(bx))$

SUPERPOSITION

$y'' + a_1 y' + a_0 y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

y_1: $\quad y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1(x)$
y_2: $\quad y'' + a_1 y' + a_0 y = f_2(x)$
$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

DGL DER ORDNUNG N

HOMOGENE DGL

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0 \ ; \ \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

a) Die r-fache Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{R}$,
$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}, y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$
b) Die k-fache Lösung $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\quad \lambda_2 = \alpha + j\beta,\ \lambda_3 = \alpha - j\beta$

$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} y_2 = e^{\alpha x}x\cos(\beta x), \\ y_{k+2} = e^{\alpha x}x\sin(\beta x), \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x) \\ y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x) \end{array}}$

Gehören jeweils zusammen!

INHOMOGENE DGL (GRUNDLÖSUNGSVERFAHREN)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x) \qquad a_n = 1$$

g sei diejenige Lösung der homogenen DGL, für die

$g(x_0) = g'(x_0) = 0 = \cdots = g^{(n-2)}(x_0) = 0,\ \boxed{g^{(n-1)}(x_0) = 1}$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t)\, dt$$

INHOMOGENE DGL (STÖRGLIEDRECHNUNG)

$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = e^{\alpha x} p_m(x)}$ p_m Polynom vom Grade m

q_m Polynom gleichen Grades m

a) Falls α nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist
$y_p = e^{\alpha x} q_m(x)$
b) Falls α r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist (r-fache Resonanz)
$y_p = e^{\alpha x} x^r q_m(x)$

$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = e^{\alpha x}(p_m(x)\cos(\beta x) + q_m(x)\sin(\beta x))}$ q_m, p_m sind Polynome höchstens m-ten Grades

r_m, s_m Polynome höchstens m-ten Grades

a) Falls $\alpha + j\beta$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist
$y_p = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
b) Falls $\alpha + j\beta$ r-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist
$y_p = e^{\alpha x} x^r (r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$

LINEARE DGL-SYSTEME 1.ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

$\dot{x} = ax + by + f(t)$

$\dot{y} = cx + dy + g(t)$

Allgemeine Lösung des Systems: $\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)$

$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t))$

GEOMETRISCHE PROBLEME

WECHSEL ZWISCHEN KOORDINATENSYSTEMEN

POLAR⇔KARTESISCH

$x = r\cos(\varphi),\, y = r\sin(\varphi)$

$r^2 = x^2 + y^2,\, \tan(\varphi) = \frac{x}{y}$

SPEZ. POLAR

$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi)}$

Für $(0 < \varepsilon < 1)$: Ellipse

$\varepsilon = 1$: Parabel

$\varepsilon = 0$: Kreis vom Radius p

HYPERBOLICUS FUNKTIONEN

HYPERBOLISCHE FORMELN

Sinushyperbolicus (ungerade)	$\sinh x : x \mapsto \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ $W_{sinh} = \mathbb{R}$	$(x \in \mathbb{R})$
Cosinushyperbolicus (gerade)	$\cosh x : x \mapsto \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ $W_{cosh} = [1, \infty)$	$(x \in \mathbb{R})$
Tangenshyperbolicus (ungerade)	$\tanh x : x \mapsto \frac{\sinh\, x}{\cosh\, x} = \tanh x$ $W_{tan\,h} = (-1,1)$	$(x \in \mathbb{R})$
Kotangenshyperbolicus (ungerade)	$\tanh x : x \mapsto \frac{\cosh\, x}{\sinh\, x} = \coth x$ $W_{cot\,h} = \mathbb{R}\backslash[-1,1]$	$(x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

AREAHYPERBOLISCHE FORMELN

Areasinushyperbolicus (ungerade)	$arsinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$(x \in \mathbb{R})$
Areacosinushyperbolicus	$arcosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$	$(x \in [1, \infty))$
Areatangenshyperbolicus (ungerade)	$artanh(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$(x \in (-1,1))$
Areacotangenshyperbolicus (ungerade)	$arcoth(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$(x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1])$

SATZ 4.23

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y)$
$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y)$
$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx \;\; (n \in \mathbb{Z})$

EXPONENTIALFUNKTIONEN

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \begin{cases} \sinh(x) = (e^x - e^{-x}) \\ \cosh(x) = (e^x + e^{-x}) \end{cases}$$

WINKELFORMELN

DOPPELWINKEL UND HALBWINKEL

$$\sin(2 \cdot u) = 2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$$

$$\cos(2 \cdot u) = cos^2(u) - sin^2(u) = 2 \cdot cos^2(u) - 1 = 1 - 2 \cdot sin^2(u)$$

$cos^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1+\cos(v)}{2}$ $\qquad$ $sin^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1-\cos(v)}{2}$

ADDITIONSTHEOREME

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

1. Nenner hat n verschiedene Nullstellen $\boldsymbol{q(x) = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$

Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$

Bsp: $\int \frac{-2x^2+7x-1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)}\right) dx$

$$\frac{2A_1(x-2)(x-3)+2A_2(x-1)(x-3)+2A_3(x-1)(x-2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Um ein einzelnes A zu finden, die entsprechende Nullstelle x einsetzen:

$$-2(1)^2 + 7(1) - 1 = 2A_1(1-2)(1-3) + 2A_2(1-1)(1-3) + 2A_3(1-1)(1-2) \rightarrow 4 = 4A_1$$

2. Nenner hat n reelle Nullstellen $\boldsymbol{q(x) = k(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_i)^{n_i}}$

Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_i)} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{n_i}}{(x-x_i)^{n_i}}$

Bsp: $\int \frac{2x^4+3x-1}{(x-1)^3(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2}\right) dx$

Nur A_3 und B_2 lassen sich durch (x=1 od. -1) direkt bestimmen, die Anderen müssen mittels 3x3 Gleichungsystems aufgelöst werden.

3. Nenner enthält nicht zerlegbare Nullstellen $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

Anstatz: umwandeln zu: $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

Bsp: $\frac{7x^2-13x+24}{x(x^2-4x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+8}$

$$7x^2 - 13x + 24 = A(x^2 - 4x + 8) + Bx^2 + Cx$$

4. Nenner von der Form $(x^2 + bx + c)^n$

Bsp: $\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+1)^2}$

PROGRAMM DISKUSSION

I) Definitionsmenge / Wertemenge

II) Symmetrien, Periodizität, Transformation
- Symmetrisch an Ordinate (y-Achse)→ gerade;
- Punktsymmetrisch → ungerade Funktion
- Periodizität: z.B. $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Transformation: Verschiebung in x Richtung oder Verschiebung in y Richtung

III) Nullstellen $f(x) = 0$

IV) Stetigkeit, Differenzierbarkeit f', f'', f'''
- Für die Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit Voraussetzung.
- Zu beachten sind Lücken, Polstellen, Sprungstellen und Oszillationsstellen.

V) A) Monotonieverhalten, Extremalstellen
- Ist monoton steigend bzw. fallend, $f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0$.
- Ist streng monoton steigend bzw. fallend, $f' > 0$ bzw. $f' < 0$.

B) Krümmungsverhalten, Wendestellen / Wendetangenten
- →Siehe Schaubild für Ableitungen

VI) Grenzwertverhalten $x \rightarrow \pm\infty$ / Randstellen / Polstellen
- Siehe Bernoulli Hôspital

BINOMIALKOEFFIZIENTEN

Es sei $n.k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$. Unter den Binomialkoeffizienten verstehen wir die Zahlen

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \text{ und } \binom{n}{0} = 1; \ \binom{0}{0} = 1$$

Für alle Binomialkoeffizienten gilt

A) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

B) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)

C) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

SPEZIELLE UNGLEICHUNGEN, REIHEN UND SUMMEN

SPEZIELLE GRENZWERTE

(Seite 82) 3.4; (Seite 109) 4.2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0;\ \lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{p}{n}=0$	$(\alpha\in\mathbb{Q}^+;p\in\mathbb{R})$
(Seite 100) Definition 3.11; (Seite 167) 4.49	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z;\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	$(z\in\mathbb{R})$
(Seite 167) 4.48	$\lim\limits_{n\to0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$	
(Seite 84);(Seite 89)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1;\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2]{n}=\infty$	$(p\in\mathbb{R}^+)$
(Seite 114) 4.9	$\lim\limits_{n\to+\infty}n^p=\infty;\ \lim\limits_{n\to-\infty}n^p\begin{cases}\infty & p\ gerade\\ -\infty & p\ ungerade\end{cases}$	$(p\in\mathbb{N})$
(Seite 83) 3.5	$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & -1<q<1\\ 1 & q=1\\ \infty & q>1\end{cases}$	
Geometrische Reihe (Seite 88) 3.7	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k=\begin{cases}+\infty & q\geq1\\ \frac{1}{1-q} & \lvert q\rvert<1\end{cases}$	
Harmonische Reihe	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}=\infty$	
(Seite 90) 3.10	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{q^n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0$	$(q>1;\ k\in\mathbb{N})$
(Seite 95) 3.12	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$	$(x\in\mathbb{R}^+)$
(Seite 112); (Seite 136) 4.25	$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to0}\frac{\sin(n)}{n}=1$	
(Seite 159) 4.43	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}=0$	$(\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+)$
(Seite 167) 4.47; (Seite 167) 4.46	$\lim\limits_{n\to0}\frac{\log_a(n+1)}{n}=\frac{1}{\ln(a)};\ \lim\limits_{n\to0}\frac{\ln(n+1)}{n}=1$	$(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$
(Seite 158) Satz 4.20	$\lim\limits_{n\to\infty}\log_a n=\begin{cases}\infty & a>1\\ -\infty & 0<a<1\end{cases}$	
(Seite 158) Satz 4.20	$\lim\limits_{n\to0+}\log_a n=\begin{cases}-\infty & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$	
(Seite 167) 4.50; (Seite 168) 4.51	$\lim\limits_{n\to0}\frac{a^n-1}{n}=\ln(a);\ \lim\limits_{n\to0}\frac{e^n-1}{n}=1$	$(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$
(Seite 168) 4.52	$\lim\limits_{n\to0}\frac{n}{1-e^{-n}}=1$	
(Seite 168) 4.53	$\lim\limits_{n\to0}\frac{n^\alpha}{a^{\beta n}}=0$	$(\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+;a>1)$
(Seite 168) 4.54	$\lim\limits_{n\to0}\frac{(1+n)^\alpha-1}{n}=\alpha$	$(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$
(Seite 411) 8.6.1	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=\begin{cases}0 & a<b\\ 1 & a=b\\ \infty & a>b\end{cases}$	$(a,b\in\mathbb{R}^+)$

SUMMEN

$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{i=m}^{n}a_i\ \ (1<m<n)$

$\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i+\mu\sum_{i=1}^{n}b_i$

$\sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=-j}^{n-j}a_{i+j}\ \ (j\in\mathbb{Z})$

$\sum_{i=1}^{n}a=n\cdot a$

UNGLEICHUNGEN

Bernoulli Ungleichung:	$(1+a)^n \geq 1+na$	$(a \geq -1); (n \geq 1)$
Binomische Ungleichung:	$\lvert a\,b\rvert \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$	$(a, b \in \mathbb{R})$
Arithm. Zu Geom. Ungleichung:	$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$	$(a_i > 0); (n \in \mathbb{N})$
Dreiecksungleichung:	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert a-b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert a-b\rvert \geq \big\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \big\rvert$	$(a, b \in \mathbb{R})$
Ungleichung zu Arithm. Und Quad. Mittel:	$\left\lvert\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\rvert \leq \sqrt[2]{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$	$(n \in \mathbb{N})$
Abschätzung für Fakultät	$n! > 2^{n-1}$	$(n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$
Erste e-Funktion	$e^x \geq 1+x$	$(x \in \mathbb{R})$
Zweite e-Funktion	$e^x \leq \frac{1}{1-x}$	$(x < 1)$
Logarithmusnaturalis	$1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$	$(x \in \mathbb{R})$

SPEZIELLE ENDLICHE REIHEN

Brüche der Form 1/n*(n+1)	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$	$(n \in \mathbb{N})$
Summe aller Zahlen bis n	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$(n \in \mathbb{N})$
Summe aller Zahlen von p bis n	$\sum_{i=p}^{n} i = \frac{(n+1)(2p+n)}{2}$	$(n \in \mathbb{N})$

ELEMENTARE TRANSFORMATIONEN: STRECKUNGEN, VERSCHIEBUNGEN

Ist eine Funktion mit der Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gegben, so führen bestimmte algebraische Umformungen von x und y zu neuen Funktionen, deren Funktionsgraphen mit den ursprünglichen in Beziehung stehen:

y wird ersetzt durch $\frac{y}{A}$	$y = A \cdot f(x)$	Streckung des Graphen an der x Achse mit Streckfaktor A
y wird ersetzt durch $(y-B)$	$y = f(x) + B$	Verschiebung des Graphen um B in y Richtung
x wird ersetzt durch $a \cdot x$	$y = f(a \cdot x)$	Streckung des Graphen an der y Achse mit Streckfaktor $\frac{1}{a}$
x wird ersetzt durch $(x-b)$	$y = f(x-b)$	Verschiebung des Graphen um b in x Richtung