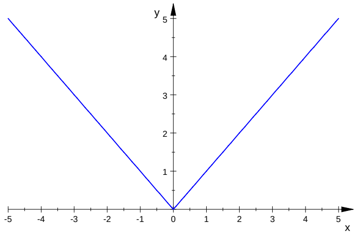
# Funktionen

### abs



### sign

Wertebereich

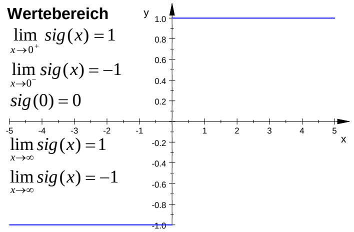
$\lim_{x \to 0^+} sig(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} sig(x) = -1$

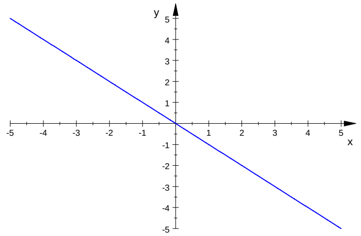
$sig(0) = 0$

$\lim_{x \to \infty} sig(x) = 1$

$\lim_{x \to \infty} sig(x) = -1$



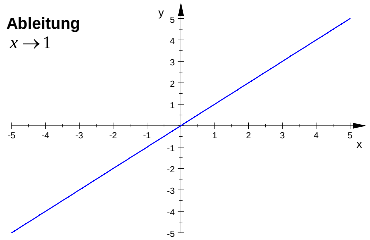
### chs:=x->-x



### Id:=x->x

**Ableitung**

$x \to 1$



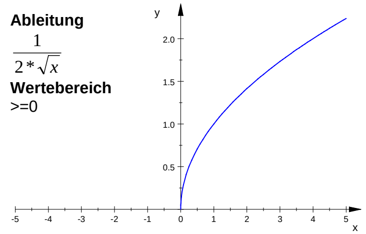
### sqrt

**Ableitung**

$\frac{1}{2 * \sqrt{x}}$

**Wertebereich**

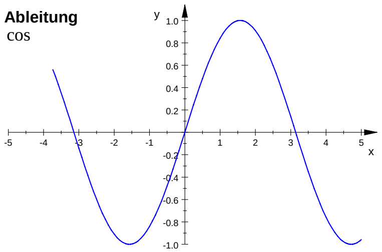
>=0



### sin(x)

**Ableitung**

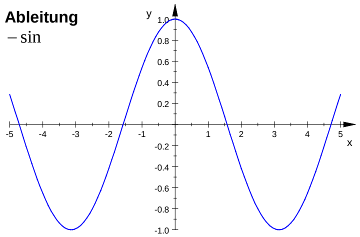
cos



### cos(x)

**Ableitung**

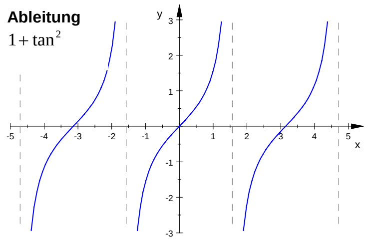
$-\sin$



### tan(x)

**Ableitung**

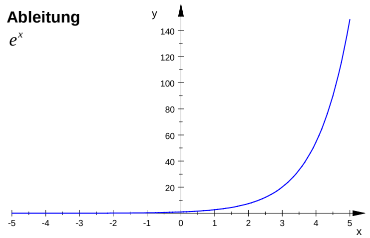
$1 + \tan^2$



### exp

**Ableitung**

$e^x$

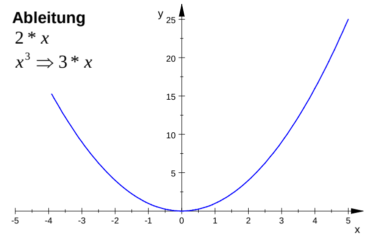


### sqr:=x->x²

**Ableitung**

$2 * x$

$x^3 \Rightarrow 3 * x$



### arcsin(x)

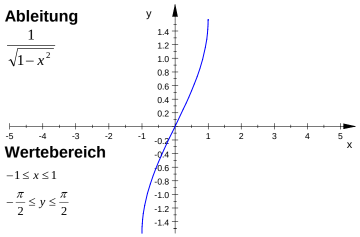
**Ableitung**

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Wertebereich**

$-1 \le x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



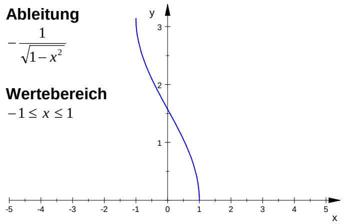
### arccos(x)

**Ableitung**

$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Wertebereich**

$-1 \le x \le 1$



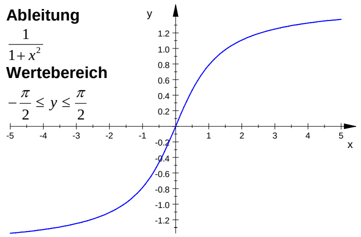
### arctan(x)

**Ableitung**

$\frac{1}{1+x^2}$

**Wertebereich**

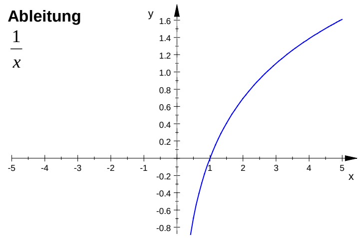
$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



### ln

**Ableitung**

$\frac{1}{x}$



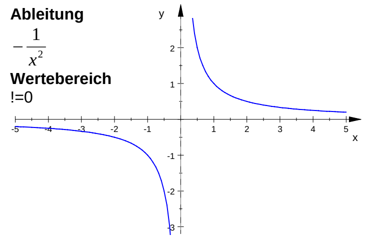
### rez:=x->1/x

**Ableitung**

$-\frac{1}{x^2}$

**Wertebereich**

!=0



## Definition

| | |
|---|---|
| gerade | $f(x) = f(-x)$ |
| ungerade | $f(-x) = -f(x)$ |
| monoton steigend | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ |
| monoton fallend | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ |
| stetig | $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$<br>linker GW = rechter GW = Funktionswert |

## Umkehrfunktion

| | |
|---|---|
| Umkehrfunktion | $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ |

## Verkettung von Funktionen

$(f \circ g)(x) \Leftrightarrow f(g(x))$

$x \to f(g(x)) \Leftrightarrow f(g(x))$

**Auswertungsreihenfolge bei Verkettungen**

$f := x \to A * f(ax + b) + B$

1. Horizontalverschiebung um |b| nach links wenn b>0, nach rechts wenn b<0.
2. Horizontale Skalierung um Faktor 1/|a|.
   Wenn a<0 zusätzliche Spiegelung an der zweiten Koordinatenachse.
3. Vertikale Skalierung um Faktor |A|.
   Wenn A<0 zusaetzliche Spiegelung an der ersten Koordinatenachse.
4. Vertikalverschiebung um |B|, nach oben, wenn B>0, oder nach unten, wenn B<0

## Ungleichungen

- Monoton steigende Funktionen duerfen beidseitig angewendet werden, wenn beide Seiten im **Definitionsbereich** der Funktion liegen.
- Monoton fallende Funktionen dürfen beidseitig angewendet werden, wenn beide Seiten im Definitionsbereich der Funktion liegen. Jedoch muss dabei das Vergleichszeichen gedreht werden!
- Beidseitig addieren/subtrahieren ist erlaubt.
- Beidseitiges Multiplizieren/Dividieren mit demselben positiven Term ist erlaubt.
- Beim beidseitigen multiplizieren/dividieren mit einem negativen Term muss das Vergleichszeichen gedreht werden!

Beispiel: $\ln(x) >= -n => x >= e^{-n}$

## Potenzen und Wurzeln

$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ $\qquad \sqrt{(x^2)} = |x|$

$b^0 = 1$ $\qquad$ wenn n gerade: $\sqrt[n]{(x^n)} = |x|$

$b^5 = \frac{1}{b^{-5}}$ $\qquad$ wenn n ungerade: $\sqrt[n]{x^n} = x$

**Quadrieren & Wurzeln ziehen:**
Quadrieren ist generell ungefaehrlich, da der Term unter einer Wurzel sowiso nie negativ sein kann. Jedoch muss beim **Quadrieren von Gleichungen mit Wurzeln der Definitionsbereich beachtet** werden!!!

Beispiel:

Für x könnte nun -3 oder +1 eingesetzt werden:

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{(4)} = x+1$ | $x = +1$ | $x = -3$ |
| $4 = (x+1)^2$ | $4 = (1+1)^2$ | $4 = (-3+1)^2$ |
| | $4 = 2^2$ | $\sqrt{(4)} = -2$ |

Jedoch ist die Lösung für -3 falsch, da das Resultat einer Wurzel per Definition immer positiv ist!!!
Somit ist dies für den DB wie folgt zu berücksichtigen:

$DB: x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$\underline{\underline{DB = [-1, \infty]}}$

## Linearitätsregel

Funktionen $f$ und $g$ seien differenzierbare Funktionen, ebenfalls Term $S$ und $T$. "$c$" sei eine Konstante.

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(c * f)' = c * f'$

$$\frac{d}{dx}(S+T) = \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(c*T) = c*\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{T}{c}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(T)}{c}$$

## Bernoulli-l'Hôspital

Man darf bei Grenzwerten den Zähler und den Nenner ableiten, wenn entweder beide nach 0 oder beide nach $\pm\infty$ gehen und dann solange ableiten, bis der Zähler oder Nenner nicht gegen 0 oder gegen $\pm\infty$ geht.

$$\lim_{x \to (0,-\infty,\infty)} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to (0,-\infty,\infty)} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

gilt nur für Quotienten!

## Tangente

$f(x_0)$

$f'(x_0)$

$T := f'(x_0) * (x \pm x_0) + f(x_0)$

## Newton Algorithmus

Verfahren zur Approximation von Nullstellen.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Gleichung auf die Form $f(x) = 0$ bringen
2. $x_0$ Schätzung für die exzakte Lösung $x^*$
3. $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ auswerten
4. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ldots x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

## Tayler-Polynom

Bestimmungsgleichung

$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ für k=0..n

$T_{x_{0,n}} := x \to c_0 + c_1(x-x_0)^1 + \ldots + c_n(x-x_0)^n$

**Restglied**
Dient zur Abschätzung des Fehlers. $\xi$ ist zwischen $0$ und $x_0$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + R_n(x)$$

## Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bsp: $f := x \to 3x^2 - 4x + 5$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 4x + 5) = \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}(-4x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$\Rightarrow 3\frac{d}{dx}x^2 + (-4)\frac{d}{dx}x + 5\frac{d}{dx}1$$

$$\Rightarrow 3*2x - 4*1 + 5*0 = 6x - 4$$

$$\Rightarrow f' := x \to 6x - 4$$

**Summenregel:**

$f(x) = g(x) + h(x)$ => $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

$f(x) = c * g(x)$ => $f'(x) = c * g'(x)$

**Produktregel:**

$f(x) = g(x) * h(x)$ => $f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$

**Quotientenregel:**

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $\quad f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$

**Kettenregel:**

$f(x) = g(h((x))$ => $f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$ (Funktion)

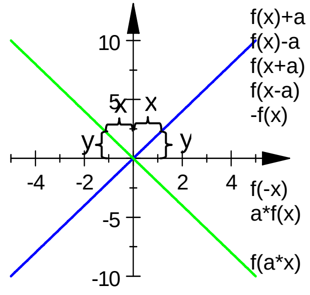
$(f @ g)'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$ (Funktion)

$\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x)) * \frac{dg(x)}{dx}$ (Term)

## Steigung

$\frac{x}{y} = \frac{2}{-1} = -2$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{1} = 2$




## Streckung/Versch.

| | |
|---|---|
| f(x)+a | ↑ |
| f(x)-a | ↓ |
| f(x+a) | ← |
| f(x-a) | → |
| -f(x) | Spiegelung \| |
| f(-x) | Spiegelung --- |
| a*f(x) | ↕ Streck. \|a\| > 1<br>Stauch. \|a\| < 1 |
| f(a*x) | ↔ Streck. \|a\| < 1<br>Stauch. \|a\| > 1 |

## Logarithmus

$x = \ln(y) \Leftrightarrow e^x = y$ $\qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\ln(x * y) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^y) \Leftrightarrow y * \ln(x)$

## MuPad Befehle

**Ableitungen:**

$f'' = D(D(f)) = (D@D)(f)$

$f^3 = D(D(D(f))) = (D@@3)(f)$

diff(1/x,x)

**Grenzwerte:**

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ limit(f(x),x=-infinity)

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ limit(f(x),x=0,Right)

piecewise([condition1,object1],[condition2,object2],…)

Bsp: f1:=x->x^2
f2:=x->x
f3:=x->piecewise([x<0,f1],[x>0,f2])

| | |
|---|---|
| float() | gerundeter Bruch |
| normal() | Bruch vereinfachten |
| factor() | faktorisieren |
| expand() | ausmultiplizieren |
| combine(Term, sin) | ersetzen durch Sinusse |
| subs(T,x=s) | Substitution |
| simplify(%) | Term vereinfachen |
| op(%) | Operation ausgeben (Bsp: _plus, _multi) |
| nops(%) | Anzahl Operanden ausgeben |

**Tabelle:**
Name:=table(Entry1=x, Entry2=y)
Name:=(i $ i=10..0)
Name[x] Tabellenzugriff (1.Eintrag mit <Name[1]>)

**Schlaufe (for):**

```
for i from 9 to 3 do
    Anweisung
end_for
```