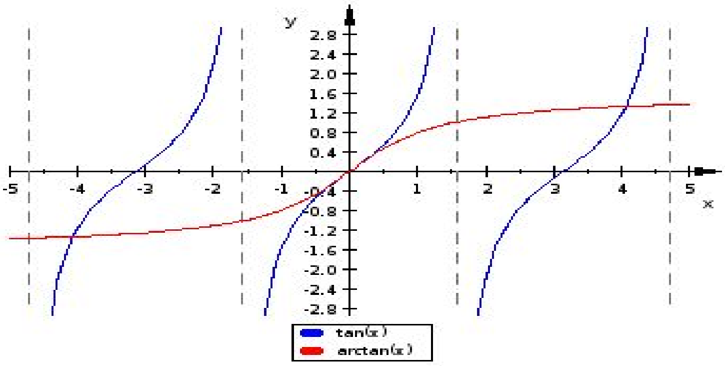
Analysis Zusammenfassung



Eine Funktion ist **gerade** wenn: f(-x) = f(x)
ungerade wenn: f(-x) = -f(x)

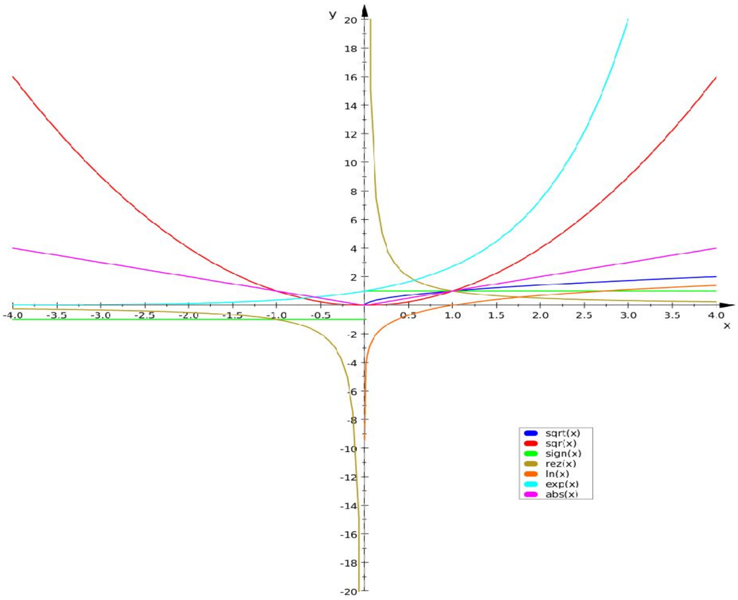
Die **kleinst moegliche Periode** heisst **primitive Periode.**

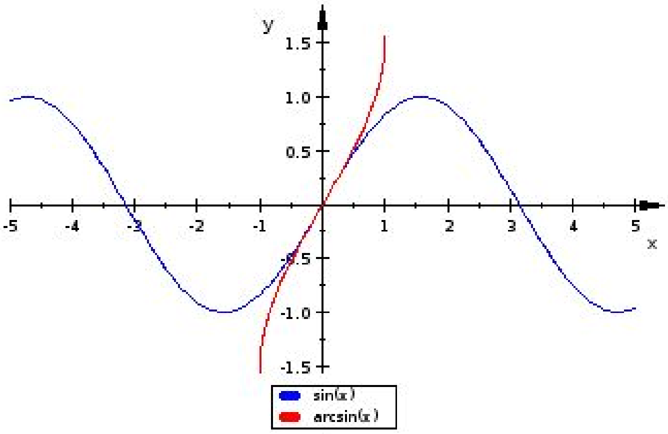
Verkettung von Funktionen: (f ° g)(x) <=> f(g(x))
x -> f(g(x)) <=> f(g(x))

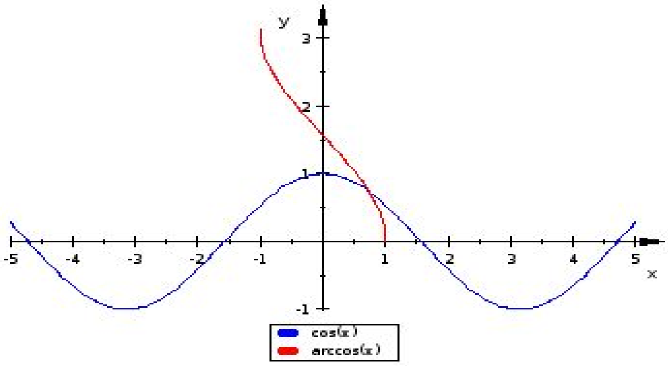
Umkehrfunktionen: $f^{-1}(y) = x$ <=> y = f(x)

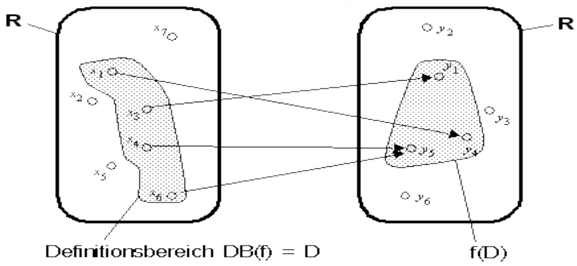
f := x -> A * f(ax+b) + B

1. Horizontalverschiebung um |b| nach links wenn b>0, nach rechts wenn b<0
2. Horizontale Skalierung um Faktor 1/|a|.
   Wenn a<0 zusaetzliche Spiegelung an der zweiten Koordinatenachse.
3. Vertikale Skalierung um Faktor |A|.
   Wenn A<0 zusaetzliche Spiegelung an der ersten Koordinatenachse.
4. Vertikalverschiebung um |B|, nach
   oben, wenn B>0, oder nach unten, wenn B<0

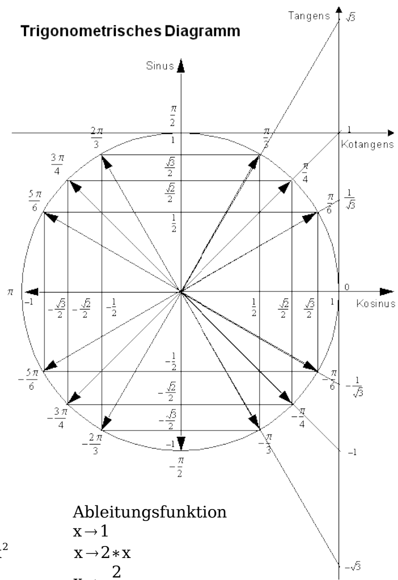








Trigonometrisches Diagramm



Ungleichungen:

- Monoton steigende Funktionen duerfen beidseitig angewendet werden, wenn beide Seiten im **Definitionsbereich** der Funktion liegen.
- Monoton fallende Funktionen duerfen beidseitig angewendet werden, wenn beide Seiten im **Definitionsbereich** der Funktion liegen. Jedoch muss dabei das **Vergleichszeichen gedreht** werden!
- Beidseitig addieren/subtrahieren ist erlaubt.
- Beidseitiges Multiplizieren/Dividieren mit dem selben **positiven** Term ist erlaubt.
- Beim beidseitigen multiplizieren/dividieren mit einem negativen Term muss das **Vergleichszeichen gedreht** werden!

Beispiel: **ln(x) >= -n => x >= e^{-n}**

Potenzen und Wurzeln:

$b^{-x}=1/b^x$
$b^0=1$
$b^5=1/b^{-5}$

$\sqrt{(x^2)}=|x|$
Wenn n gerade: $\sqrt[n]{x^n}=|x|$
Wenn n ungerade: $\sqrt[n]{x^n}=x$

Quadrieren & Wurzeln ziehen:
Quadrieren ist generell ungefaehrlich, da der Term unter einer Wurzel sowiso nie negativ sein kann. Jedoch muss beim **Quadrieren von Gleichungen mit Wurzeln der Definitionsbereich beachtet** werden!!!

Beispiel:

$\sqrt{(4)}=x+1$
$4=(x+1)^2$

Fuer x koennte nun -3 oder +1 eingesetzt werden:

X=-3:
$4=(-3+1)^2$
$\sqrt{(4)}=-2$

X=1:
$4=(1+1)^2$
$4=2^2$

Jedoch ist die Loesung fuer -3 falsch, da das Resultat einer Wurzel per Definition immer positiv ist!!!
Somit ist dies fuer den DB wie folgt zu beruecksichtigen:
DB: $x+1\geq 0$ => $x\geq -1$

$\underline{DB=[-1,\infty[}$

Funktion	Ableitungsfunktion
$id:=x\to x$	$x\to 1$
$sqr:=x\to x^2$	$x\to 2*x$
$rez:=x\to \frac{1}{x}$	$x\to -\frac{2}{x^2}$
$sqrt:=x\to\sqrt{x}$	$x\to\frac{1}{2*\sqrt{x}}$
$exp:=x\to e^x$	$x\to e^x$
ln	$rez:=x\to\frac{1}{x}$
sin	$cos:=x\to cos(x)$
cos	$x\to -sin(x)$
tan	$x\to 1+tan(x)^2$
arcsin	$x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos	$x\to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan	$x\to\frac{1}{1+x^2}$

Stetig

Linker GW = Rechter GW = Funktionswert

$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

Linearitätsregel

f und g seien differenzierbare Funktionen, ebenfalls Term S und T. c sei eine Konstante.

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$$\frac{d}{dx}(S+T) = \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(c \cdot T) = c \cdot \frac{dT}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{T}{c}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(T)}{c}$$

Produkt- und Quotientenregel

f und g seien differenzierbare Funktionen, ebenfalls Term S und T.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}(S \cdot T) = \left(\frac{dS}{dx}\right)T + S\left(\frac{dT}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{S}{T}\right)' = \frac{\left(\frac{dS}{dx}\right)T - S\left(\frac{dT}{dx}\right)}{T^2}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Kettung für Ableitungen

f und g seien differenzierbare Funktionen,

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

Ableitungsfunktion/Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel: Ableitungsfunktion

$\mathit{Beispiel: Ableitungsfkt.\ von}\quad f := x \to 3x^2 - 4x + 5$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 4x + 5) = \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}(-4x) + \frac{d}{dx}5$$
$$\Rightarrow 3\frac{d}{dx}x^2 + (-4)\frac{d}{dx}x + 5\frac{d}{dx}1$$
$$\Rightarrow 3*2x - 4*1 + 5*0 = 6x - 4 \quad \Rightarrow f' := x \to 6x - 4$$

Ableitung in MuPAD

Der Ableitungsstrich gehört zu einer Funktion, der Differenzialquotient zu einem Term.

Ableitungsfunktion von f berechnen: *f '*
Ableitung von f an Stelle x berechnen: *f '(x)*
Ableitungsfunktion Ableitung von Termen
diff(TERM,y) *y*: Stelle an der abgeleitet werden soll

zweite und höhere Ableitung
Vergleich: Ableitung von Termen

$f'' = D(D(f)) = (D@D)(f)$

$f''' = D(D(D(f))) = (D@@3)(f)$

$\mathrm{diff}((1+2*x)^\wedge 2/(x^\wedge 2-2),\ x,\ x)$

$\mathrm{diff}((1+2*x)^\wedge 2/(x^\wedge 2-2),\ x\$3)$

Mupad Grenzwerte

$\lim_{x\to -infinity} f(x)$: limit(f(x),x=-infinity)

$\lim_{x\to 0+} f(x)$: limit(f(x),x=0,Right)

Mupad Piecewise

piecewise([condition,object],[condition2,object2] ...)

Beispiel:
f1:=x->x^2
f2:=x->x
f3:=x->piecewise([x<0,f1],[x>0,f2])

Linearisierungsformel

f sei eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion.

$T := x \to f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0)$	Steigung von x_0 durch den Nullpunkt
$x - x_0$	Verschiebung in x-Richtung
$f(x_0)$	Verschiebung in y-Richtung (Funktionswert von x_0)

Algorithmus von Newton

Verfahren zur aproximation von Nullstellen.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Gleichung auf die Form $f(x)=0$ bringen
2. x_0 Schaetzung fur die exzakte Loesung x*
3. $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ auswerten
4. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ... $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Regel von Bernoulli-l'Hôpital

Man darf bei Grenzwerten den Zähler und den Nenner ableiten, wenn entweder beide nach 0 oder beide nach $\pm\infty$ gehen und dann solange ableiten, bis der Zähler oder Nenner nicht gegen 0 oder gegen $\pm\infty$ geht.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ gilt nur für Quotienten!

Taylorpolynome

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + R_n(x)$$
$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k\right) + R_n(x)$$

Bestimmungsgleichung (Taylorpolynome)

$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ fuer k=0..n

Restglied (Taylorpolynome)

Dient zur Abschätzung des Fehlers. ξ ist zwischen 0 und x_0.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

McLaurin – Polynom

Ein MacLaurin-Polynom ist also ein Spezialfall eines Taylor-Polynoms, welches an der Stelle 0 entwickelt wurde.

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + R_n(x)$$
$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right) + R_n(x)$$

Restglied

Dient zur Abschätzung des Fehlers. ξ ist zwischen 0 und x_0.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Bestimmungsgleichung

$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ *für* $k = 0 \ldots n$

Mupad Befehle

Term vereinfachen:	*simplify(%)*
Bruch vereinfachen:	*normal(%)*
Ausmultiplizieren:	*expand(%)*
Operazion ausgeben:	*op(%)* z.B. _plus, _multi,
Anzahl Operanden ausgeben:	*nops(%)*

Mupad Gleichungssysteme loesen

glsys:=[gleichung1, gleichung2, ...]
solve(glsys,[x,y,z]) x,y,z: Variablen, nach welchen aufgeloest werden soll.

Logarithmen

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$
$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$