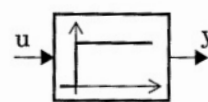
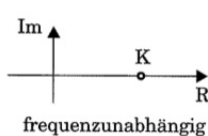
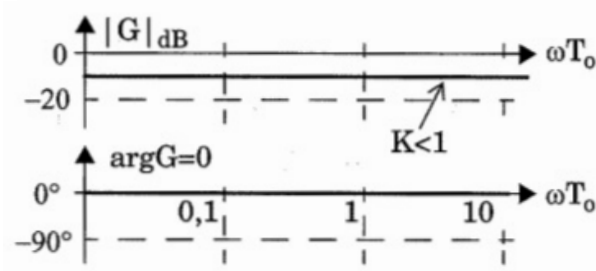
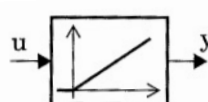
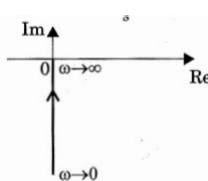
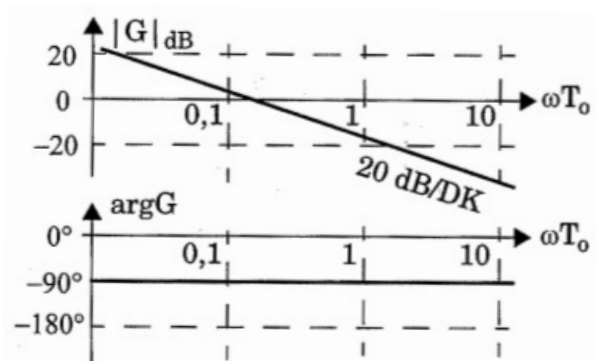
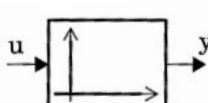
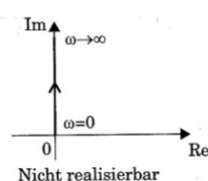
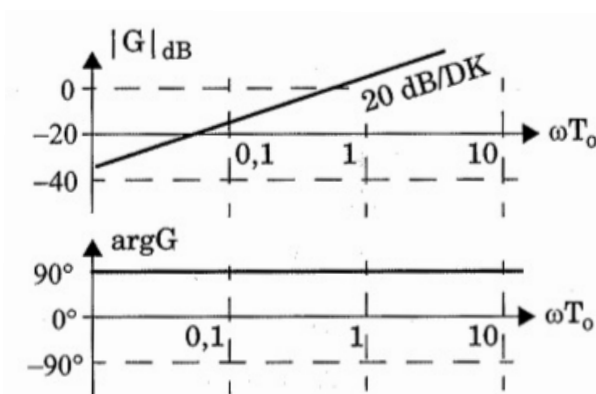
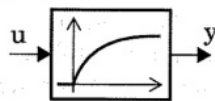
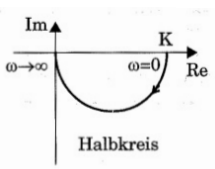
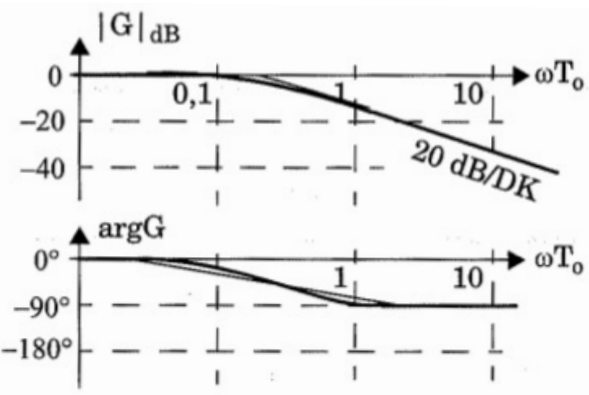
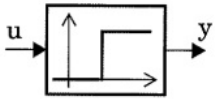
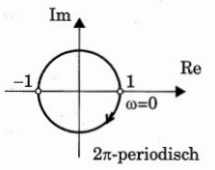
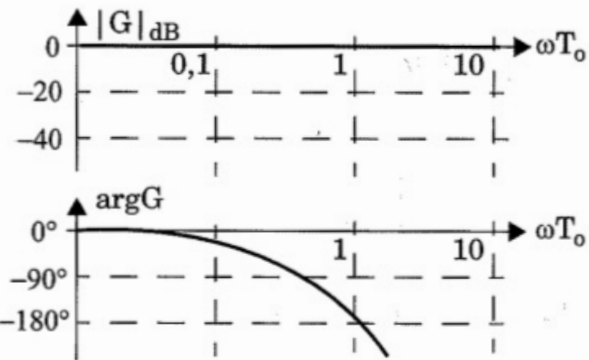


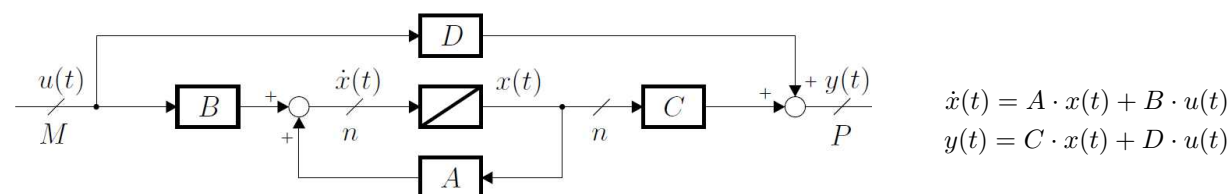
LTI-Grundglieder

Typ	Symbol	Gleichung, Dgl Sprungantwort Frequenzgang, Betrag und Argument Bodediagramm	
	Nyquistdiagramm		
P		$y = Ku$ $u = 1(t)$ $G(j\omega) = K$	$y = K1(t)$ $ G = K$ $\arg G = 0$
			
I		$\dot{y} = Ku$ $u = 1(t)$ $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$y = Kt$ $ G = \frac{K}{\omega}$ $\arg G = -\frac{\pi}{2}$
			
D		$y = K\dot{u}$ $u = 1(t)$ $G(j\omega) = Kj\omega$	$y = K\delta(t)$ $ G = K\omega$ $\arg G = \frac{\pi}{2}$
			

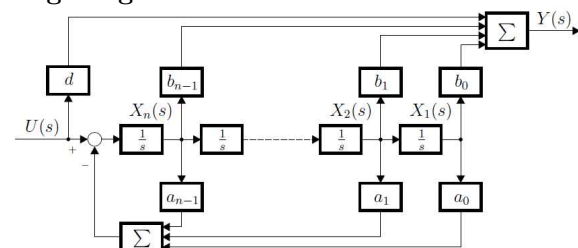
PT_1		$T\dot{y} + y = Ku \quad y(0) = 0$ $u = 1(t) \quad y = K \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$ $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \quad G = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad \arg G = -\arctan(\omega T)$
		
PT_2		$T^2\ddot{y} + 2\zeta T\dot{y} + y = Ku \quad \text{oder} \quad \ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$ $y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \omega_n = \frac{1}{T}$ $y = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \arccos(\zeta) \right) \right]$ $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T)^2 + 2\zeta T(j\omega) + 1} \quad G = \frac{K}{\sqrt{[1-(\omega T)^2]^2 + [2\zeta\omega T]^2}}$ $\arg G = -\arctan \frac{2\zeta\omega T}{(j\omega T)^2 + 1} \quad 0 \leq \omega T \leq 1$ $\arg G = \arctan \frac{2\zeta\omega T}{(j\omega T)^2 + 1} - \pi \quad 1 \leq \omega T \leq \infty$
T_t		$y = \begin{cases} 0 & 0 < t < T_t \\ u(t - T_t) & t \geq T_t \end{cases}$ $u = 1(t) \quad y = 1(t - T_t)$ $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t} \quad G = 1 \quad \arg G = -\omega T_t$
		

Laplace-Transformation

Funktion $f(t)$	Transformierte $F(s)$	Zeitbereich	Bildbereich	Operation im Zeitbereich
$\delta(t)$	1	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	Superposition
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$	Differentiation ...
t	$\frac{1}{s^2}$	$\dot{f}(f)$	$s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$	... mehrfach angewandt
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	Integration
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f(t - T_i) [T_i \text{ reell}, \geq 0]$	$F(s) e^{-T_i s}$	Rechtsverschiebung
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$	Faltung
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) dt$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	Skalierung
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$f(a \cdot t) [a \text{ reell}, > 0]$	$F(s + a)$	Dämpfung
$1 - e^{at}$	$\frac{-a}{s(s-a)}$	$e^{-at} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$	Anfangswerttheorem
$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$	Endwerttheorem
$e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$	z.B. Treppenfunktionen
$e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	Wiederholung		
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$			
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$			

Regelung mithilfe der Zustandsraumdarstellung Skript S. 153ZRD aus einer UTF oder DGL Skript S. 169

Regelungsnormalform:



Aus einer Zustandsraumdarstellung (A, b, c, d) die UTF $G(s)$ bestimmen:

Bei $x(0) = 0$ gilt:

$$sX(s) = A \cdot X(s) + b \cdot U(s)$$

$$Y(s) = c \cdot X(s) + d \cdot U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = c \cdot \overbrace{(sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s)}^{X(s)} + d \cdot U(s) = \underbrace{[c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d]}_{G(s)} \cdot U(s)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

$$G(s) = d + \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (m < n)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \underbrace{[b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + d \cdot u$$

Zustandsraumdarstellung aus einem Blockdiagramm Skript S. 171

1. Ein- und Ausgangssignale bestimmen.
2. Den Zustandsvektor bilden, indem alle Speicher aufgelistet werden. Die Länge des Zustandsvektors entspricht der Systemordnung.

- Die Gleichung $\dot{x} = f(x, u)$ bilden. Dazu muss man alle Integratoreingänge ($\dot{x}_i$) 'zurückverfolgen', bis deren Abhängigkeit von x und u bekannt ist.
- Die Gleichung $y = g(x, u)$ bilden. Dazu muss man alle Ausgangssignale (y_i) 'zurückverfolgen', bis deren Abhängigkeit von x und u bekannt ist.
- Bei linearen Systemen mit f und g A, b, c und d formulieren.

Aggregation von Teilsystemen Skript S. 172

Serieschaltung Skript S. 172

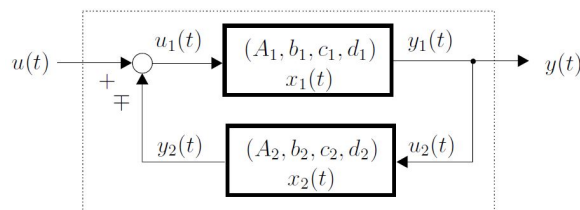
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 \cdot c_1 & A_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \cdot d_1 \end{bmatrix}}_b \cdot u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} d_2 \cdot c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{d_2 \cdot d_1}_d \cdot u \end{aligned}$$

Parallelschaltung Skript S. 173

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_b \cdot u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{(d_2 + d_1)}_d \cdot u \end{aligned}$$

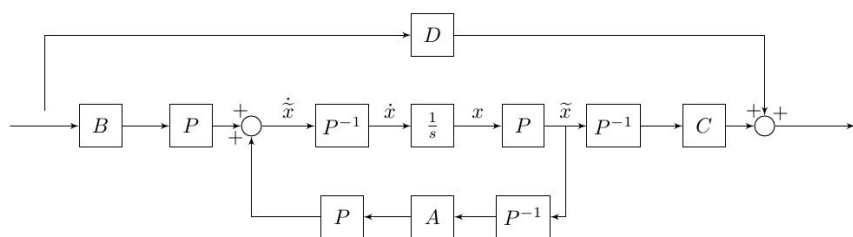
Kreisschaltung Skript S. 174

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \mp b_1 k_1 d_2 c_1 & \mp b_1 k_1 c_2 \\ b_2 k_2 c_1 & A_2 \mp b_2 k_2 d_1 c_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 k_1 \\ b_2 k_2 d_1 \end{bmatrix}}_b \cdot u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_2 c_1 & \mp k_2 d_1 c_2 \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{k_2 d_1}_d \cdot u \end{aligned}$$



mit $k_1 = \frac{1}{1 \pm d_2 d_1}$ und $k_2 = \frac{1}{1 \pm d_1 d_2}$

Ähnlichkeitstransformation Skript S. 175



$$\tilde{A} = PAP^{-1}$$

$$\tilde{b} = Pb$$

$$\tilde{c} = cP^{-1}$$

$$\tilde{d} = d$$

$$\tilde{x} = Px$$

Die neue Systembeschreibung $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ hat das selbe I/O-Verhalten wie die ursprüngliche Beschreibung (A, b, c, d) .

Lösung der Zustandsgleichung und Transitionsmatrix Skript S. 176

gegeben: $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)$
 $y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)$
 $x(0) = x_0$
 $u(t)$ bekannt für $t \geq 0$

im Bildbereich: $sX(s) - x_0 = A \cdot X(s) + b \cdot U(s)$

$$Y(s) = c \cdot X(s) + d \cdot U(s)$$

daraus folgt: $(sI - A) \cdot X(s) = x_0 + b \cdot U(s)$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x_0 + (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s)$$

Durch Laplace-Rücktransformation ergibt sich für $x(t)$:

$$x(t) = \underbrace{e^{At} \cdot x_0}_{x_F} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau) d\tau}_{x_E}$$

Superposition der freien Antwort x_F und der erzwungenen Antwort x_E . Die freie Antwort entsteht, wenn das System mit $u = 0$ aus dem Anfangszustand x_0 losgelassen wird. x_E hängt nur vom Eingangssignal u ab. Mit

diesem $x(t)$ kann anschliessend $y(t)$ berechnet werden:

$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)$$

$$= \underbrace{c \cdot e^{At} \cdot x_0}_{y_F} + \underbrace{c \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau) d\tau}_{y_E} + d \cdot u(t)$$

im Bildbereich:

$$Y(s) = \underbrace{c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot x_0}_{Y_F} + \underbrace{[c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d] \cdot U(s)}_{Y_E}$$

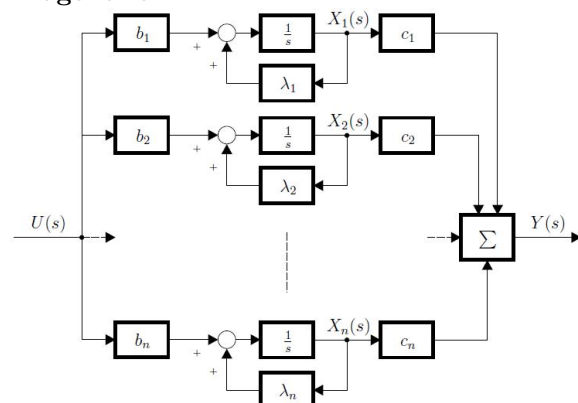
Transitionsmatrix: $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$ weiter gilt: $\dot{\Phi}(t) = A \cdot \Phi(t)$ und $\Phi(0) = I$

Mit Hilfe von $\Phi(t)$ kann die Impulsantwort $g(t)$ bestimmt werden:

$$G(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d \Rightarrow g(t) = c \cdot e^{At} \cdot b + d = c \cdot \Phi(t) \cdot b + d$$

Entkopplung der Zustandsgleichung und Stabilität Skript S. 180

Diagonalform:



Ist die Matrix A eine Diagonalmatrix Λ ($A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$) führt dies zu n voneinander unabhängigen DGL: $\dot{x}_1 = \lambda_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot u \dots \dot{x}_n = \lambda_n \cdot x_n + b_n \cdot u$. Die UTF kann als $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 c_1}{s - \lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{b_n c_n}{s - \lambda_n}$ geschrieben werden. Die Diagonalelemente der Systemmatrix Λ entsprechen den Polen von $G(s)$. Das System ist also asymptotisch stabil, wenn alle λ_i in der linken Halbebene liegen.

Matrix diagonalisieren:

1. Eigenwerte λ von A bestimmen
2. Eigenvektoren ν daraus berechnen
3. Matrix V bilden, in der alle Eigenvektoren stehen $[(\nu_1) \dots (\nu_n)]$
4. $\Lambda = V^{-1} \cdot A \cdot V$ (Ähnlichkeitstransformation)

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit Skript S. 183

Steuerbarkeit:

Def A: Ein System (A, B) ist steuerbar, wenn der Zustandsvektor x mit geeignetem $u(t)$ in endlicher Zeit T_e von einem Anfangszustand $x(0)$ zu jedem (in einem linearisierten Umfeld) Endzustand $x(T_e)$ gebracht werden kann.

Def B: Ein System (A, B) ist steuerbar, wenn die Eigenwerte von $A - BK$ durch geeignete Wahl von K beliebig platziert werden können.

$$Q_S = [B \ AB \ A^2 B \ A^3 B \ \dots \ A^{n-1} B]$$

Steuerbarkeitsmatrix eines Systems in Regelungsnormalform:

$$Q_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & X & \dots & X \\ 1 & X & X & \dots & X \end{bmatrix} \quad X \text{ steht für don't care}$$

Ein **steuerbares** System kann mit Ähnlichkeitstransformation in Regelungsnormalform gebracht werden:

1. Q_S muss invertiert werden.
2. Von Q_S^{-1} wird die letzte Zeile als q bezeichnet.
3. Transformationsmatrix bilden:

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ein System in Regelungsnormalform ist immer steuerbar!

Beobachtbarkeit: Def A: Ein System (A, C) ist beobachtbar, wenn der Anfangszustand x_0 innert endlicher Zeit T_e eindeutig bestimmt werden kann, sofern u und y für $0 \leq t \leq T_e$ bekannt sind.

Def B: Ein System (A, C) ist beobachtbar, wenn die Eigenwerte von $A - HC$ durch geeignete Wahl von H beliebig platziert werden können.

$$Q_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

System in Beobachtungsnormalform:

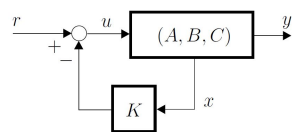
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad d = d$$

Ein System in Beobachtungsnormalform ist immer beobachtbar!

Zustandsrückführung Skript S. 189



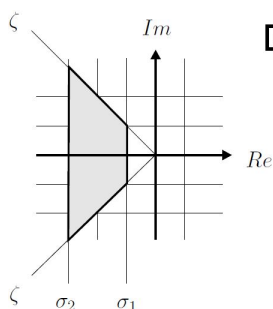
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad u = r - Kx$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br$$

Die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises wird zu:

$$\hat{A} = A - BK$$

Entwurf eines Zustandsreglers durch Polvorgabe Skript S. 190



- alle Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Transienten sollen schneller abklingen als ein geeignetes $C \cdot e^{-\sigma_1}$
- Das System sollte genügend gedämpft sein, z.B. $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Eine obere Grenze $\sigma_2 > \sigma$ verhindert zu grosse Stellsignale.
- Das Verschieben der Polstellen kostet beim Regeln Stellenergie $\Rightarrow$ Pole, die bereits akzeptabel liegen, sollten deshalb nicht unnötig verschoben werden.

Die Eigenwerte der Matrix $\hat{A} = A - bk$ sind gegeben durch die Wurzeln des Polynoms $\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda I - A + bk)$. Um die Pole des Gesamtsystems an die Stellen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ zu bringen, müssen die folgenden Polynome übereinstimmen:

$$\det(\lambda I - A + bk) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich

Aus einem System in Regelungsnormalform mit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{k} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_{n-1} \quad \tilde{k}_n]$$

wird dabei

$$\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & \cdots & -a_{n-2} - \tilde{k}_{n-1} & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{bmatrix} \quad \tilde{b}\tilde{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \cdots & \tilde{k}_{n-1} & \tilde{k}_n \end{bmatrix}$$

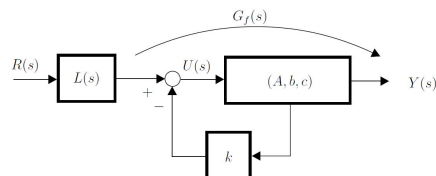
Aus der UTF des unregulierten Systems $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$ ergibt sich die UTF des geregelten Systems:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n) s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \tilde{k}_2) s + (a_0 + \tilde{k}_1)}$$

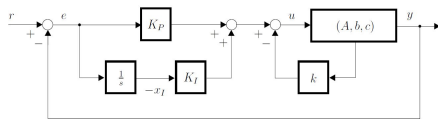
Um die Pole des geregelten Systems als an die vorgegebenen Stellen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ zu bringen, müssen folgende Polynome übereinstimmen:

$$s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n) s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \tilde{k}_2) s + (a_0 + \tilde{k}_1) = (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$$

Erweiterungen: Vorverstärkung, PI-Regler Skript S. 196



Eine statische Vorverstärkung $L = G_f(0)^{-1}$ beseitigt den stationären Fehler. Unabhängig davon, ob L zur Einstellung der statischen Verstärkung benutzt wird, kann $L(s)$ als Vorfilter auch die Dynamik des Regelkreises verbessern. $\Rightarrow$ Lead-Glied $L(s) = \frac{1}{G_f(0)} \cdot \frac{sT_s + 1}{sT_2 + 1}$ macht den Regelkreis schneller! Dabei ist T_1 die dominante Zeitkonstante von G_f und $T_2 > T_1$.

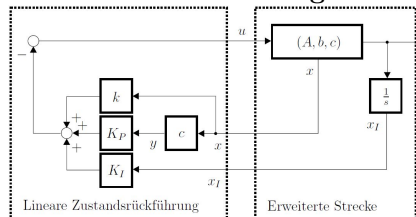


Die erweiterte Strecke hat den Zustandsvektor $x_{PI} = \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$ und die Zustandsbeschreibung (A_{PI}, b_{PI}, c_{PI}) .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{PI} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \cdot x_{PI} \quad (2)$$

Alternative Darstellung:

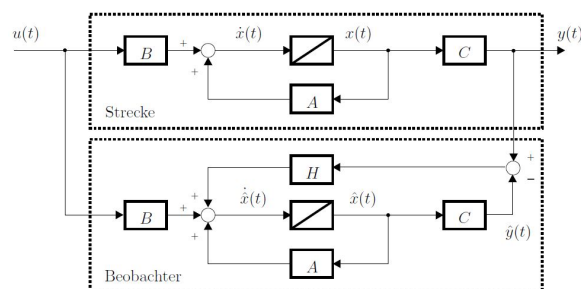


$$u = -(k + K_p \cdot c) \cdot x - K_I \cdot x_I = \begin{bmatrix} k + K_p \cdot c & K_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

Der Entwurf mit PI-Zusatz beinhaltet folgende Schritte:

- Die erweiterte Strecke wird gemäss Formel 1 und 2 aufgestellt.
- k_{PI} nach der Formel oben ermitteln (mit Polplatzierung oder LQR)
- K_I ist das letzte Element von k_{PI} . Alle anderen Elemente sind definiert durch $k + K_p \cdot c$. K_p kann frei gewählt werden.

Beobachter Skript S. 199



$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \underbrace{\dot{x} - \dot{\hat{x}}}_e &= A \underbrace{(x - \hat{x})}_e \end{aligned}$$

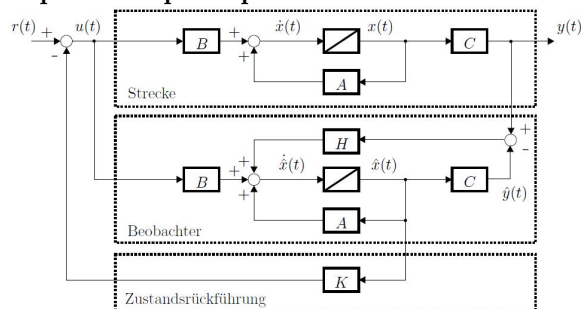
Wird die Rückführung H mit einbezogen, so bleibt diese wirkungslos, solange $e = x - \hat{x} = 0$ ist. Sobald $e \neq 0$ ist, ändert sich die Dynamik des Schätzfehlers:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + HC(x - \hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - HC(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= (A - HC)e \end{aligned}$$

Die Konvergenz des Schätzfehlers wird durch die Eigenwerte der Matrix $A - HC$ bestimmt. Wenn vorausgesetzt wird, dass das System (A, C) beobachtbar ist, dann bedeutet das, dass die Eigenwerte beliebig platziert werden können.

Finden von $H : eig(A - HC)$

Separationsprinzip:



$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Br = Ax - BK(x - e) + Br \\ &= (A - B) x + BKe + Br \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + HC \end{bmatrix} = 0$$

Blockdreiecksstruktur $\Rightarrow$ faktorisieren:

$$\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + HC) = 0$$

Das bedeutet, dass die Eigenwerte (bzw. Pole) des Gesamtsystems der Vereinigung der Pole entsprechen, die in den beiden Entwürfen vorgegeben bzw. entstanden sind. Dies ist als **Separationsprinzip** bekannt.

Digitale Regelung Skript S. 210

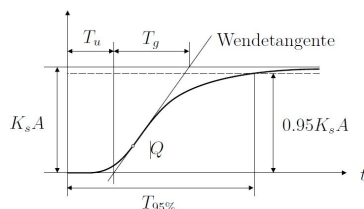
z-Transformation Skript S. 228

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
$\epsilon(t)$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\cos(bk)$	$\frac{z(z-\cos b)}{z^2-2z\cos b+1}$
$\sin(bk)$	$\frac{z \sin b}{z^2-2z\cos b+1}$
$k \cdot a^k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$a^k \cdot \cos(bk)$	$\frac{z(z-a\cos b)}{z^2-2az\cos b+a^2}$
$a^k \cdot \sin(bk)$	$\frac{za \sin b}{z^2-2az\cos b+a^2}$

Zeitbereich	Bildbereich	Operation im Zeitbereich
$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$	Superposition
$f(k+1)$	$zF(z) - zf(0)$	Linksverschiebung ...
$f(k+2)$	$z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1)$	... mehrfach angewandt
$f(k-m) \quad m \geq 0$	$\frac{1}{z^m} F(z)$	Rechtsverschiebung
$\sum_{\nu=0}^k f(\nu)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$	Bildung von Partialsummen
$\sum_{\nu=0}^k f_1(\nu) \cdot f_2(k-\nu)$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$	Faltung
$f(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	Anfangswertsatz
$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$	$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot F(z)]$	Endwertsatz

Wahl der Abtastzeit T Skript S. 216

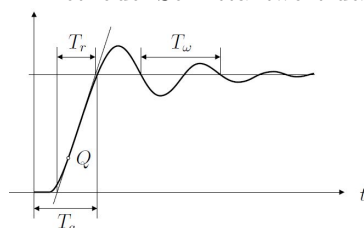
1. Methode: Schrittantwort der Regelstrecke ausmessen:



Kennwert	Abtastzeit
T_u	$0.1 \cdot T_u \leq T \leq 0.25 \cdot T_u$ Prozess mit ausgeprägter Totzeit
T_g	$T \leq 0.1 \cdot T_g$
$T_{95\%}$	$0.05 \cdot T_{95\%} \leq T \leq 0.1 \cdot T_{95\%}$

Wenn sich verschiedene Empfehlungen widersprechen, ist tendenziell die kürzere Zeit die bessere!

2. Methode: Schrittantwort des geschlossenen Regelkreises ausmessen:



Kennwert der Regelung	Abtastzeit
T_a	$0.05 \cdot T_a \leq T \leq 0.1 \cdot T_a$
T_r	$0.05 \cdot T_r \leq T \leq 0.1 \cdot T_r$
T_w	$T \leq 0.05 \cdot T_w$

Diskretisieren eines dynamischen Reglers Skript S. 222

Um komplexe Reglerstrukturen zu diskretisieren, muss dieser in die Form

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (m \leq n)$$

gebracht werden. Der Koeffizient a_n ist dabei auf 1 normiert!

1. In der UTF $G_R(s)$ die Variable s durch folgende Ausdrücke ersetzen:

Methode	Substitution
Rechteckregel vorwärts (Euler-Methode)	$s = \frac{z-1}{T}$ $z = 1 + sT$
Rechteckregel rückwärts	$s = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$ $z = \frac{1}{1-sT}$
Trapezregel (Tustin-Methode)	$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ $z = \frac{2+sT}{2-sT}$

2. Daraus resultiert eine UTF in z . $\hat{G}_R(z) = \frac{\hat{b}_m z^m + \hat{b}_{m-1} z^{m-1} + \dots + \hat{b}_1 z + \hat{b}_0}{z^n + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 z + \hat{a}_0} = \frac{U(z)}{E(z)}$. Der Koeffizient $\hat{a}_n$ ist wiederum auf 1 normiert! $\hat{G}_R(z)$ kann danach ausmultipliziert werden:
 $\hat{b}_m z^m \cdot E(z) + \hat{b}_{m-1} z^{m-1} \cdot E(z) + \dots + \hat{b}_1 z \cdot E(z) + \hat{b}_0 \cdot E(z) = z^n \cdot U(z) + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} \cdot U(z) + \dots + \hat{a}_1 z \cdot U(z) + \hat{a}_0 \cdot U(z)$
 und in eine Differenzengleichung umgeformt werden:

$\hat{b}_m \cdot e(k+m) + \hat{b}_{m-1} \cdot e(k+m-1) + \dots + \hat{b}_1 \cdot e(k+1) + \hat{b}_0 \cdot e(k) = u(k+n) + \hat{a}_{n-1} \cdot u(k+n-1) + \dots + \hat{a}_1 \cdot u(k+1) + \hat{a}_0 \cdot u(k)$
 Diese Gleichung ist zeitinvariant und kann in n Zeitschritte verschoben und nach $u(k)$ aufgelöst werden:

$$u(k) = -\hat{a}_{n-1} \cdot u(k-1) - \dots - \hat{a}_1 \cdot u(k+1-n) - \hat{a}_0 \cdot u(k-n) \\ + \hat{b}_m \cdot e(k+m-n) + \hat{b}_{m-1} \cdot e(k+m-1-n) + \dots + \hat{b}_1 \cdot e(k+1-n) + \hat{b}_0 \cdot e(k-n)$$

$\Rightarrow$ Falls die UTF des Reglers eine Totzeit aufweist ($G_R(s) = G_{R,0}(s) \cdot e^{-sT_t}$), so kann die Totzeit mit dem z^{-m} ersetzt werden. Dabei gilt $m = \frac{T_t}{T}$ und m wird auf eine ganze Zahl gerundet.

ZOH-Diskretisierung mit UTF Skript S. 244

$$\hat{G}(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \underbrace{\left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right)}_{\text{Schrittantwort}} \right\}_{t=kT}$$

Impulsantwort aus Schrittantwort berechnen

$$\{0, 0.2, 0.8, 1.0, 1.0, \dots\} : \text{Schrittantwort} \\ \Rightarrow \underbrace{\{0, 0.2, 0.6, 0.2, 0.0, 0.0, \dots\}} : \text{Impulsantwort} \\ G(z) = \frac{0.2}{z} + \frac{0.6}{z^2} + \frac{0.2}{z^3} = \frac{0.2z^2 + 0.6z + 0.2}{z^3}$$

einige Diskretisierungen

	K	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{K}{s\tau+1}$
RR VW		$\frac{T}{z-1}$	$\left(\frac{T}{z-1} \right)^2$	$\frac{K}{\left(\frac{z-1}{T} \right) \cdot \tau + 1}$
RR RW		$\frac{zT}{z-1}$	$\left(\frac{zT}{z-1} \right)^2$	
Trapezregel		$\frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$	$\left(\frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right)^2$	
ZOH	$K \cdot \frac{z}{z-1}$	$\frac{T}{z-1}$	$\frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$	$K \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}$

Reglerentwurf durch Vorgabe von G_f Skript S. 252

Wie bei zeitkontinuierlichen Systemen kann auch bei zeitdiskreten Systemen eine UTF $G_f(z)$ vorgegeben und ein entsprechender Regler $G_R(z)$ bestimmt werden.

$$G_0(z) = G_S(z) \cdot G_R(z) \qquad G_0(z) = \frac{G_f(z)}{1 - G_f(z)} \\ G_f(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} \qquad G_R(z) = \frac{G_0(z)}{G_s(z)}$$

Mit $G_f(z) = \frac{Z_f(z)}{N_f(z)}$ und $G_s(z) = \frac{Z_s(z)}{N_s(z)}$ kann der Regler berechnet werden:

$$G_R(z) = \frac{Z_f(z)}{N_f(z) - Z_f(z)} \cdot \frac{N_s(z)}{Z_s(z)}$$

Polynome und gebrochen rationale Funktionen Skript S. 269

Wurzeln

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ liefert } x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Partialbruchzerlegung

einfache Nullstelle: $\Rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}$

doppelte Nullstelle: $\Rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

n-fache Nullstelle: $\Rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$

komplexe Nullstelle: $\Rightarrow \frac{A_1 + B}{x^2 + c_1x + c_2}$

finden der einzelnen Koeffizienten:

$$\frac{Z(s)}{N(s)} = G(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0} = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \frac{c_3}{s-p_3}, c_i = \frac{Z(s)}{dN(s)} \Big|_{s=p_i}$$

Matrizenrechnung Skript S. 275

Adjunkte

$$\text{2x2 Matrix: } \text{adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{3x3 Matrix: } \text{adj} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Determinanten Skript S. 277

$$\text{2x2 Matrix: } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \text{3x3 Matrix: } \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Transposition Skript S. 277

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T$$

Inverse Matrizen Skript S. 278

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kann nur invertiert werden, wenn sie regulär ist ($\det(A) \neq 0$). Es gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Für Matrizen mit $n < 3$ kann A^{-1} mit $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$ berechnet werden. Für $n \geq 3$ sollte der Gauss-Algorithmus angewandt werden.

Die Inverse einer Diagonalmatrix kann durch **Inversion** der Diagonalelemente berechnet werden.

Bei Blockdiagonalmatrizen kann die Inverse durch Inversion der einzelnen Blöcke berechnet werden:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix ist wiederum eine obere Dreiecksmatrix. Dasselbe gilt für untere Dreiecksmatrizen.

Rang einer Matrix Skript S. 279

Zusammenfassung

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist regulär	$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist singulär
$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$
Die Inverse A^{-1} existiert.	Die Inverse A^{-1} existiert nicht.
Die n Zeilen- und Spaltenvektoren von A sind lin. unabh.	Die n Zeilen- und Spaltenvektoren von A sind lin. abh.
A hat vollen Rang: $\text{rang}(A) = n$.	A hat nicht vollen Rang: $\text{rang}(A) < n$.

Ein Vektor a_n ist von $n - 1$ Vektoren $a_1, \dots, a_{n-1}$ linear abhängig, falls $n - 1$ Skalare $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ existieren, so dass $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \cdot a_i$, das heißt falls a_n als Linearkombination der anderen Vektoren formuliert werden kann. Falls keiner der Vektoren $a_1, \dots, a_n$ eine Linearkombination der jeweils anderen $n - 1$ Vektoren ist, sind die n Vektoren linear unabhängig. **Der Rang einer Matrix bestimmt sich als Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (entspricht zugleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren!).**

Eigenwerte und Eigenvektoren Skript S. 281

Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berechnen sich mit Hilfe von $\det(\lambda - A)$. $\det(\lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ \lambda - c & -d \end{pmatrix}$ führt auf die charakteristische Gleichung: $(\lambda - a) \cdot (\lambda - d) - (-b) \cdot (-c)$. Diese Gleichung kann = 0 gesetzt werden, wovon sich die Eigenwerte λ_1 und λ_2 berechnen lassen.

Werden die Eigenwerte λ_1 und λ_2 in die Gleichung $\begin{pmatrix} \lambda_i - a & -b \\ \lambda_i - c & -d \end{pmatrix} \cdot \nu = 0$ eingesetzt, ergeben sich daraus die beiden Eigenvektoren ν_1 und ν_2 .

Bei Diagonal- oder Dreiecksmatrizen entsprechen die Diagonalelemente den Eigenwerten.

Eine singuläre Matrix hat mindestens einen Eigenwert bei Null.

Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind alle reell.

Komplex-konjugierte Eigenwerte haben komplex-konjugierte Eigenvektoren.

Eigenvektoren, die zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gehören, sind linear unabhängig.