# Regelungstechnik 3

HS 2024 – Prof. Dr. Markus Kottmann

Autoren: Simone Stitz

https://gitlab.com/sstitz/regelungstechnik-3

V1.0.20250129

## Inhaltsverzeichnis


**I Regelungstechnik 3** 2

**1 Lineare und nichtlineare Systeme** 2
- 1.1 Fallbeispiel Tempomat – Ausgangslage (S. 10) . . . 2
- 1.2 Variante 1 – Exakte Linearisierung der Strecke (S. 10) . . . 2
- 1.3 Variante 2 – Nichtlineare Vorsteuerung, linearer Regler (S. 12) . . . 2
- 1.4 Variante 3 – Linearer Regler (S. 16) . . . 2
- 1.5 Fazit: Nichtlineare Strecke – Lineare Regler (S. 17) . . . 2

**2 Laplace-Transformation** 2
- 2.1 Definition der Laplace-Transformation (S. 20) . . . 2
- 2.2 Laplace-Transformierte einiger Funktionen (S. 21) . . . 2
- 2.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation (S. 22) . . . 3
- 2.4 Grenzwertsätze der Laplace-Transformation (S. 22) . . . 3

**3 Differenzialgleichung – Zeitbereich / Frequenzbereich** 3
- 3.1 DGL im Frequenzbereich lösen . . . 3
- 3.2 DGL im Zeitbereich lösen . . . 3
- 3.3 Beispiele: DGL lösen . . . 3
- 3.4 Beispiele: Transformation Zeitbereich – Frequenzbereich . . . 3
- 3.5 Beispiel: DGL eines Systems finden und lösen (S. 25-28) . . . 3

**4 Eigenschaften der Übertragungsfunktion (UTF)** 3
- 4.1 Begriffe zum Thema UTF . . . 3
- 4.2 Freie Antwort – Erzwungene Antwort . . . 3
- 4.3 Darstellungsformen (S. 31) . . . 4
- 4.4 Partialbruchzerlegung (PBZ) (S. 31) . . . 4
- 4.5 Realisierbarkeit (S. 33) . . . 4
- 4.6 Minimalität (S. 33) . . . 4
- 4.7 Allpass . . . 4
- 4.8 Ordnung eines Systems (S. 46) . . . 4
- 4.9 Minimalphasigkeit (S. 43-44) . . . 4
- 4.10 Stabilität (S. 34-35) . . . 4
- 4.11 Stabilität – Routh-Kriterium (S. 37) . . . 4
- 4.12 Dominante Pole und Nullstellen (S. 42) . . . 4
- 4.13 Padé-Approximation von Totzeiten (S. 45) . . . 5

**5 Blockdiagramme** 5
- 5.1 Serieschaltung (S. 47) . . . 5
- 5.2 Parallelschaltung (S. 48) . . . 5
- 5.3 Kreisschaltung (S. 48) . . . 5
- 5.4 Eigenschaften der Schaltungs-Topologien . . . 5
- 5.5 Blockdiagramm-Algebra (S. 50) . . . 5

**6 (Minimale) Realisierung von UTFs** 6
- 6.1 Vorgehen – UTF realieren . . . 6
- 6.2 Pol-/ Nullstellen-Kürzung bei UTF-Realisierung (S. 60) . . . 6

**7 Frequenzgang** 6
- 7.1 Zusammenhang UTF – Frequenzgang (S. 62) . . . 6
- 7.2 Darstellung des Frequenzgangs (S. 63-64) . . . 6

**8 Bode-Diagramm** 7
- 8.1 Bode-Diagramm approximieren . . . 7
- 8.2 Frequenzgang geeignet umformen (S. 67) . . . 7
- 8.3 Approximationen im Bode-Diagramm (S. 67-70) . . . 7
- 8.4 Bodediagramme mit Matlab . . . 7

**9 Nyquist-Diagramm / Nyquist-Kriterium** 7
- 9.1 Nyquist-Diagramm (S. 71-72) . . . 7
- 9.2 Stabilität – Allgemeines Nyquist-Kriterium (S. 73) . . . 7
- 9.3 Vereinfachtes Nyquistkriterium . . . 8
- 9.4 Nyquistdiagramme mit Matlab . . . 8
- 9.5 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen . . . 8

**10 Modellbildung und Modellreduktion** 8
- 10.1 Modellbildung (S. 76-78) . . . 8
- 10.2 Modellreduktion (S. 79) . . . 8

**11 Reglerentwurf – Spezifikation und Restriktion** 8
- 11.1 Stationärer Fehler (S. 80-81) . . . 8
- 11.2 Dynamisches Verhalten – Spezifikationen . . . 8
- 11.3 Dynamisches Verhalten – Restriktionen . . . 9

**12 Wurzelortskurven (WOK)** 9
- 12.1 Voraussetzungen und Vereinbarungen . . . 9
- 12.2 Grundsätzliches Aussehen der WOK . . . 9
- 12.3 Zeichnen von Wurzelortskurven (S. 96-98) . . . 10
- 12.4 Wurzelortskurven mit Matlab . . . 10
- 12.5 WOK zu einigen geläufigen Pol- / NS-Verteilungen (S. 99) . . . 10

**13 Reglerentwurf mit Wurzelortskurven (WOK)** 10
- 13.1 Auslegen eines staischen P-Reglers mittels WOK (S. 101-102) . . . 10
- 13.2 Auslegen eines PI-Reglers mittels WOK (S. 102-104) . . . 11
- 13.3 Auslegen eines PIDT1-Reglers mittels WOK (S. 104-105) . . . 11
- 13.4 Fazit – Reglerauslegung mittels WOK . . . 11
- 13.5 Einige 'gute' Ideen zum Reglerentwurf mittels WOK . . . 11
- 13.6 Allgemeine Stabilitätsanalyse mit WOK (S. 109-110) . . . 11

**14 Reglerentwurf mit Bode-Diagramm / 'Loop-Shaping'** 12
- 14.1 Optimaler offener Regelkreis . . . 12
- 14.2 Phasenreserve und Verstärkungsreserve (S. 112-114) . . . 12
- 14.3 Spezifikationen für dynamisches Verhalten (S. 115) . . . 12
- 14.4 Loop-Shaping . . . 12
- 14.5 Spezifikationen für die Bandbreite . . . 13

**15 Optimierung von Reglern** 13
- 15.1 Reglerstrukturen . . . 13
- 15.2 Reglereinstellung . . . 13
- 15.3 Empirische Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols (S. 134-135) . . . 13
- 15.4 Optimierung mithilfe eines Gütemasses (S. 136-142) . . . 14
- 15.5 Vorgabe der Führungsübertragungsfunktion (S. 143-146) . . . 14

**16 Implementation von Reglern (S. 147)** 14
- 16.1 Direkte Form . . . 14
- 16.2 Regelungsnormalform . . . 14
- 16.3 Transponierte direkte Form . . . 14

**II Anhang** 15

**17 Mathemathik-Hilfen** 15
- 17.1 Trigonometie . . . 15
- 17.2 Dezibel dB . . . 15
- 17.3 z-Transformation . . . 15
- 17.4 Spezielle Ansätze PBZ . . . 15

**18 Statische Grundglieder (ohne Gedächtnis)** 15
- 18.1 P-Glied (Proportional) . . . 15

**19 Dynamische Grundglieder (mit Gedächtnis)** 15
- 19.1 Totzeit-Glied . . . 15
- 19.2 I-Glied (Integrierer) . . . 15
- 19.3 PT1-Glied . . . 15
- 19.4 PT2-Glied . . . 15
- 19.5 D-Glied (Idealer Differenzierer) . . . 16
- 19.6 DT1-Glied (Realisierbarer Differenzierer) . . . 16
- 19.7 Lead-Glied / Lag-Glied / Lead-Lag-Glied . . . 16

**20 Grundglieder – Frequenzbereich** 17

**21 Analogrechner** 19

# I Regelungstechnik 3

## 1 Lineare und nichtlineare Systeme

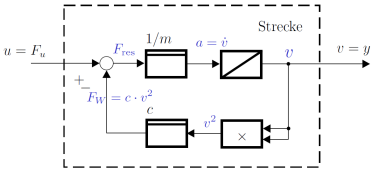
Die meisten Regelstrecken sind **nichtlinear**. Trotzdem werden für solche Regelstrecken meist lineare Regler ausgelegt und es wird mit **linearen Modellen** gearbeitet. Das System wird als **LZI-System** betrachtet, da diese mathematisch einfach handhabbar sind.

Im Folgenden sollen drei Varianten beschrieben werden, wie für eine nichtlineare Regelstrecke ein (lineares) Regelsystem entworfen werden kann.

### 1.1 Fallbeispiel Tempomat – Ausgangslage (S. 10)

Die Regelstrecke ist das Auto und wird mit einem vereinfachten Modell dargestellt.

$$m \cdot a = F_u - F_W = u - c \cdot v^2 = m \cdot \dot{v} \quad \leftrightarrow \quad \dot{v} = \frac{u - c \cdot v^2}{m}$$



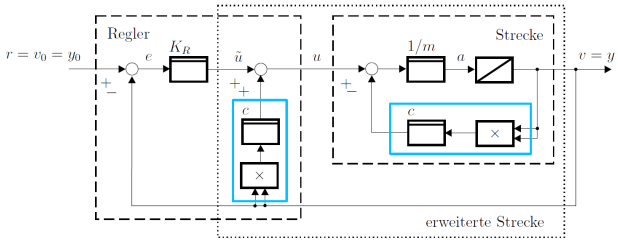

- Stellgrösse $u$: Antreibende Kraft $F_u$
- Luftwiderstand $F_W = c \cdot v^2$
- Regelgrösse $y$: Geschwindigkeit $v$
- Beschleunigung $a$
- Masse $m$

### 1.2 Variante 1 – Exakte Linearisierung der Strecke (S. 10)

**Diese Variante funktioniert nur, wenn die Nichtlinearität (NL) direkt vom Ausgang $y$ der Strecke zu ihrem Eingang $u$ rückgekoppelt ist!**

#### 1.2.1 Kompensation im Regler

Im Regler wird die Nichtlinearität kompensiert: $u = \tilde{u} + c \cdot v^2$
Somit ergibt sich ein linearer Zusammenhang: $\dot{v} = a = \frac{\tilde{u}}{m}$



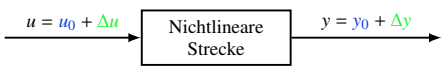

- NL wird in Rückkopplung der Strecke **subtrahiert** ➡ NL wird in Rückkopplung der erweiterten Strecke **durch Addition kompensiert**
- $\tilde{u}$ wird als 'neue' Stellgrösse für lineare Strecke $\frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s}$ betrachtet
- Geschlossener Regelkreis mit $G_f(s)$ entspricht $PT_1$-Glied

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{m}{K_R}}_{T_f} \cdot s} \qquad \text{mit } G_0(s) = \frac{K_R}{m \cdot s}$$

### 1.3 Variante 2 – Nichtlineare Vorsteuerung, linearer Regler (S. 12)

**Diese Variante ist ein Standardverfahren.**

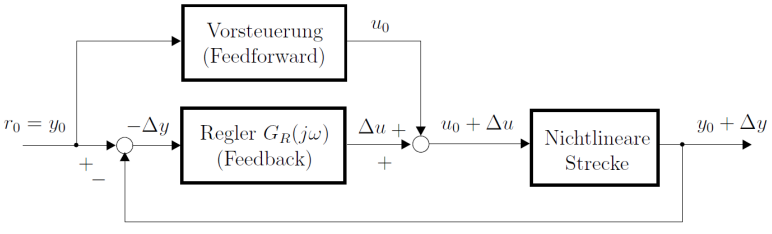
- Die nichtlineare Strecke wird durch eine nichtlineare Vorsteuerung näherungsweise in einen Arbeitspunkt gebracht. ➡ Grosssignalverhalten
- Die Strecke wird im Arbeitspunkt linearisiert ➡ Kleinsignalverhalten
- Für die linearisierte Strecke wird ein linearer Regler entworfen




$$\begin{aligned} y_0 &= f(u_0) \\ \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} &= G_{S,0}(s) \end{aligned}$$

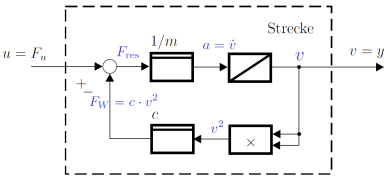
- 'Grosssignalverhalten'
  - statisch, nichtlinear
  - statisches Eingnagssignal $u_0$ ➡ statisches Ausgangssignal $y_0$
  - (nichtlineare) Vorsteuerung: $u_0 = f^{-1}(y_0)$
- 'Kleinsignalverhalten'
  - dynamisch, linear
  - Linearisierung im AP

Die 'Zusammenschaltung' beider Sichtweisen liefert den folgenden Regelkreis:




#### 1.3.1 Tempomat – Nichtlineare Vorsteuerung

**Im statischen Arbeitspunkt sind alle Ableitungen 0 ➡ steady state**

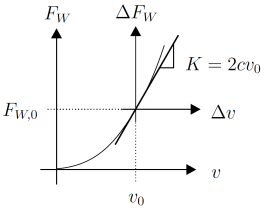



- $\dot{y} = a_0 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow F_{res,0} = 0$
- $v_0 = y_0 = \text{const}$
- $F_{W,0} = c \cdot v_0^2$
- $F_{u,0} = u_0 \overset{!}{=} F_{W,0} = c \cdot v_0^2$

$$u_0 = c \cdot y_0^2 \quad \leftrightarrow \quad y_0 = \sqrt{\frac{u_0}{c}}$$

#### 1.3.2 Tempomat – Linearisierung im Arbeitspunkt

Die Nichtlinearität der Strecke wird durch eine lineare Approximation **im statischen Arbeitspunkt** ersetzt. Ausserdem müssen vor allen Grössen Deltas $\Delta$ eingefügt werden.




$$F_W = c \cdot v^2$$

$$\left.\frac{\partial F_W}{\partial v}\right|_{v=v_0} = c \cdot 2 \cdot v \Big|_{v=v_0} = \underbrace{2\,c\,v_0}_{K}$$

Die linearisierte (geschlossene) Regelstrecke hat die Übertragungsfunktion (Mason)

$$G_S(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\frac{1}{m \cdot s}}{1 + \frac{2cv_0}{m \cdot s}} = \frac{1}{m \cdot s + 2cv_0} = \frac{\frac{1}{2cv_0}}{\frac{m}{2cv_0} \cdot s + 1} = \frac{K_s}{1 + s \cdot T_s} \quad \Rightarrow \text{PT}_1$$

➡ Für diese Strecke wird (z.B. mittels Pol-/NS-Kürzung) ein linearer Regler ausgelegt.

### 1.4 Variante 3 – Linearer Regler (S. 16)

**Diese Variante ist ein Standardverfahren.**
Im Vergleich zu Variante 2 (Abschnitt 1.3) wird die nichtlineare Vorsteuerung weggelassen. Somit ist die Regelung weniger zuverlässig. Somit bleinen die folgenden Schritte übrig:

- Nichtlineare Strecke im Arbeitspunkt linearisieren
- Linearen Regler für die linearisierte Strecke auslegen

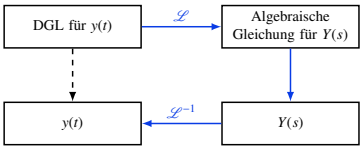
### 1.5 Fazit: Nichtlineare Strecke – Lineare Regler (S. 17)

- Nichtlinearität kann nur dann perfekt kompensiert werden, wenn die Nichtlinearität direkt vom Ausgang $y$ der Strecke zu ihrem Eingang $u$ rückgekoppelt ist
- Die Funktionalität des entworfenen Regelkreises ist **nicht global garantiert!**
  **➡ Je weiter weg vom AP, desto weniger gültig ist die lineare Approximation**
- Auch bei Störungen muss das System in der Nähe des Arbeitspunktes bleiben, wenn die Regelung zuverlässig funktionieren soll

## 2 Laplace-Transformation

Eine **lineare** Differenzialgleichung kann auf mehrere Arten gelöst werden:

- Direkte Lösung im Zeitbereich
- Lösung via Frequenzbereich
  ➡ Laplace-Transformation




### 2.1 Definition der Laplace-Transformation (S. 20)

Für eine Funktion $f(t)$ für $t \geq 0$ ist die Laplace-Transformierte $F(s)$ definiert durch

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

Es gilt: $s = \sigma + j\omega$

➡ Rücktransformation mittels Tabellen (siehe Abschnitt 2.2)

### 2.2 Laplace-Transformierte einiger Funktionen (S. 21)

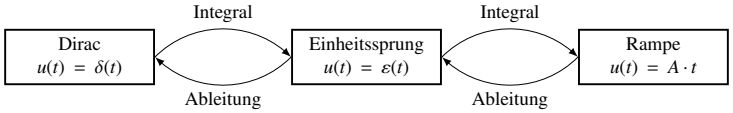
Alle Funktionen $f(t)$ sind implizit mit dem Einheitssprung $\varepsilon(t)$ multipliziert, sodass die Funktionen nur für $t \geq 0$ definiert sind.

| $f(t)$ | ⟷ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | ⟷ | $1$ |
| $\delta(t - T_t)$ | ⟷ | $e^{-T_t s}$ |
| $\varepsilon(t)$ | ⟷ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | ⟷ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^2$ | ⟷ | $\frac{2}{s^3}$ |
| $t^n$ | ⟷ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | ⟷ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $t \cdot e^{at}$ | ⟷ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ |

| $f(t)$ | ⟷ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| $t^n \cdot e^{at}$ | ⟷ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\sin(bt)$ | ⟷ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\cos(bt)$ | ⟷ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $1 - e^{at}$ | ⟷ | $\frac{-a}{s(s-a)}$ |
| $e^{at} \cdot \cos(bt)$ | ⟷ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $e^{at} \cdot \sin(bt)$ | ⟷ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ | ⟷ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ |
| $\frac{a\,e^{at}-b\,e^{bt}}{a-b}$ | ⟷ | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ |

**Hinweis:** Der Einheitssprung $\varepsilon(t)$ äussert sich als eine 1 in der Gleichung im Zeitbereich
**Hinweis:** Teilweise braucht es Umformungen, damit die Tabelle angewendet werden kann

### 2.2.1 Zusammenhänge: Dirac – Einheitssprung – Rampe




## 2.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation (S. 22)

| Zeitbereich | Bildbereich | Operation im Zeitbereich |
|---|---|---|
| $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ | $a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$ | Superposition |
| $\dot{f}(t)$ | $sF(s) - f(0)$ | Differentiation ... |
| $\ddot{f}(t)$ | $s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ | ...mehrfach angewendet |
| $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ | $\frac{1}{s}F(s)$ | Integration |
| $f(t - T_t)\quad [T_t \text{ reell}, \geq 0]$ | $F(s) \cdot e^{-T_t s}$ | Rechtsverschiebung |
| $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}t$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ | Faltung |
| $f(a \cdot t)\quad [a \text{ reell}, > 0]$ | $\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ | Skalierung |
| $e^{\mp at} \cdot f(t)$ | $F(s \pm a)$ | Dämpfung |

## 2.4 Grenzwertsätze der Laplace-Transformation (S. 22)

**Achtung:** Grenzwertsätze dürfen nur angewendet werden, wenn Grenzwerte auch existieren!

- Das Anfangswerttheorem gilt für Regelungstechniker immer
- Das Endwerttheorem gilt **nur**, wenn **System stabil** ist (Polstellen in linker Halbebene bzw. $\sigma < 0$)

| Zeitbereich | | Bildbereich | Bezeichnung |
|---|---|---|---|
| $\lim_{t\to 0} f(t)$ | = | $\lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$ | Anfangswerttheorem |
| $\lim_{t\to\infty} f(t)$ | = | $\lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ | Endwerttheorem |

Typische Verwendungszwecke für die Grenzwertsätze sind:

- Eingangsgrösse $U(s)$ bekannt ➛ 'Anfangzustand' $u(0)$ bestimmen
- $Y(s)$ bekannt ➛ Endwert für Ausgang $y(\infty)$ bestimmen

# 3 Differenzialgleichung – Zeitbereich / Frequenzbereich

## 3.1 DGL im Frequenzbereich lösen

Eine **lineare** Differenzialgleichung kann mittels folgender Schritte gelöst werden:

1. DGL in Frequenzbereich transformieren ➛ Laplace-Transformation
2. Algebraische Gleichung im Frequenzbereich nach $Y(s)$ auflösen
3. Rücktransformation in Zeitbereich ➛ Tabelle siehe Abschnitt 2.2

## 3.2 DGL im Zeitbereich lösen

Eine (lineare) Differenzialgleichung mit entsprechenden Anfangsbedingungen kann mittels folgender Schritte gelöst werden:

1. Homogene Lösung $y_H$ mit Integrationskonstanten $C$ finden
   - Ansatz: $y(t) = C \cdot e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen
   - 'Störung' $u(t) = 0$ setzen (rechte Seite)
2. Partikuläre Lösung $y_p$ finden, indem Störung $u(t)$ miteinbezogen wird
3. Gesamte Lösung zusammensetzen: $y(t) = y_H + y_p$
4. Integrationskonstanten mit Anfangsbedingungen finden

## 3.3 Beispiele: DGL lösen

### Beispiel: DGL im Frequenzbereich lösen

Gegeben: $\dot{y}(t) = y(t) + 1$ Anfangsbedingung: $y(0) = 0$

1. Transformation: $\dot{y}(t) = y(t) + 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s \cdot Y(s) - y(0) = Y(s) + \frac{1}{s}$
2. $Y(s) \cdot (s-1) = \frac{1}{s} \quad \leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s-1)}$
3. $Y(s) = -\frac{-1}{s \cdot (s-1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = -(1 - e^{at}) = e^t - 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{y(t) = e^t - 1}$

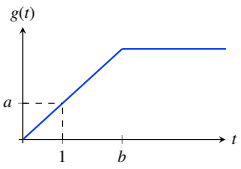
### Beispiel: DGL im Zeitbereich lösen

Gegeben: $\dot{y}(t) - y(t) = \underbrace{1}_{u(t)}$ Anfangsbedingung: $y(0) = 0$

1. Ansatz: $y_H = C \cdot e^{\lambda t}$ $\xrightarrow{\text{ableiten}}$ $\dot{y}_H = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$
   $\xrightarrow{\text{in DGL einsetzen}}$ $\dot{y}_H - y_H = C \cdot e^{\lambda t}(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow y_H = C \cdot e^t$
2. $\dot{y}_p - y_p \stackrel{!}{=} u(t) \xrightarrow{\text{einsetzen}} \dot{y}_p - y_p \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow y_p = -1$
3. $y(t) = y_H + y_p = C \cdot e^t - 1$
4. $y(0) \stackrel{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{einsetzen}} C - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow C = 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{y(t) = e^t - 1}$

## 3.4 Beispiele: Transformation Zeitbereich – Frequenzbereich

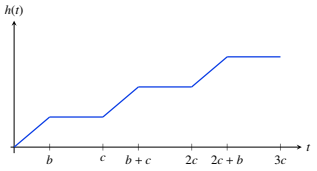
### Beispiel: Transformation einer Rampe




Zeitbereich: $g(t) = a \cdot t - a \cdot (t - b)$

Frequenzbereich: $G(s) = \frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2} \cdot e^{-sb} = \frac{a}{s^2}(1 - e^{-sb})$

### Beispiel: Transformation einer periodischen Funktion



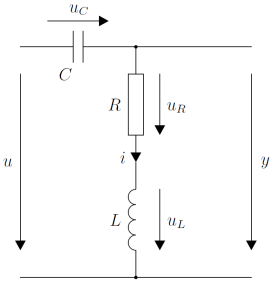

$$h(t) = g(t) + g(t-c) + g(t-2c) + g(t-3c) + \ldots$$

$$H(s) = G(s)[1 + e^{-sc} + e^{-2sc} + e^{-3sc} + \ldots]$$

$$H(s) = \frac{a}{s^2}(1 - e^{-sb}) \frac{1}{1 - e^{-sc}}$$

Geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^k = 1 + q^1 + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$

## 3.5 Beispiel: DGL eines Systems finden und lösen (S. 25-28)




Externe Signale: $u$, $y$

Interne Signale: $i_C$, $i_R$, $i_L$
$u_C$, $u_R$, $u_L$

**Hinweis:** Die internen Ströme können in diesem Fall direkt zu einem Strom $i$ zusammengefasst werden!

➛ Total 6 Signale

**Vorgehen – Zeitbereich**

1. Jeder Komponente 2 Signale zuordnen (hier: Strom, Spannung)
2. $2 \cdot$ Anzahl Komponenten $+1$ Gl. finden
   - Komponentengleichungen
   - Strukturgleichungen (Maschen, Knoten)
3. Schrittweises eliminieren der internen Signale ➛ I/O-DGL
4. I/O-DGL im Zeitbereich lösen

**Vorgehen – Frequenzbereich**

1. Jeder Komponente 2 Signale zuordnen (hier: Strom, Spannung)
2. $2 \cdot$ Anzahl Komponenten $+1$ Gl. finden
   - Komponentengleichungen
   - Strukturgleichungen (Maschen, Knoten)
3. Gleichungen in Frequenzbereich transformieren
4. Interne Signale im Frequenzbereich eliminieren ➛ I/O-Gleichung

### Beispiel: System im Frequnezbereich beschreiben

$$i(t) = C \cdot \dot{u}_C(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad I(s) = C \cdot [sU_C(s) - u_C(0)]$$
$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_L(s) = L \cdot [sI(s) - i(0)]$$
$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_R(s) = R \cdot I(s)$$
$$u(t) = u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = U_C(s) + U_R(s) + U_L(s)$$
$$y(t) = u_R(t) + U_L(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s) = U_R(s) + U_L(s)$$

$$\xrightarrow{\text{int. Signale eliminieren}} \quad Y(s) = \frac{s^2LC + sRC}{s^2LC + sRC + 1} U(s) + \frac{[sLC + RC] \cdot u_C(0) + L \cdot i(0)}{s^2LC + sRC + 1}$$

# 4 Eigenschaften der Übertragungsfunktion (UTF)

## 4.1 Begriffe zum Thema UTF

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Y_E(s)$ | Erzwungene Antwort | $G(s)$ | Übertragungsfunktion |
| $Y_F(s)$ | Freie Antwort | $g(t)$ | Impulsantwort (Stossantwort) |

## 4.2 Freie Antwort – Erzwungene Antwort

Das Ausgangssignal $Y(s)$ eines Systems (im Laplace-Bereich) hat die Form

$$Y(s) = Y_E(s) + Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) + Y_F(s)$$

- Die freie Antwort $Y_F(s)$ hängt nur von Anfangsbedingungen ab und beschreibt wie sich das System verhält, wenn man es 'sich selbst überlässt'
- Die freie Antwort $Y_F(s)$ wird im Folgenden nicht weiter betrachtet

### Beispiel: Freie Antwort – Erzwungene Antwort

$$Y(s) = \underbrace{\overbrace{\frac{s^2LC + sRC}{s^2LC + sRC + 1}}^{G(s)} \cdot U(s)}_{Y_E(s)} + \underbrace{\frac{[sLC + RC] \cdot u_C(0) + L \cdot i(0)}{s^2LC + sRC + 1}}_{Y_F(s)}$$

## 4.3 Darstellungsformen (S. 31)

Die UTF kann in folgenden Formen dargestellt werden:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

$$= K \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \ldots (s - p_n)} \quad (2)$$

$$= \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s - p_3} \quad (3)$$

**Bemerkungen:**
(2) 'Serielle Form' ➠ Trivialerweise gilt: $K = b_m$
(3) 'Parallele Form' ➠ Summe aus $PT_1$-Gliedern ➠ PBZ

## 4.4 Partialbruchzerlegung (PBZ) (S. 31)

Damit eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden darf, müsen die folgenden **Bedingungen** erfüllt sein

- Pole müssen paarweise verschieden sein: $p_i \neq p_j$ falls $i \neq j$
- Der Zählergrad muss kleiner sein als der Nennergrad: $m < n$
  ➠ Schrittantwort des Systems ist dann stetig

Weiterhin besteht folgende Einschaft für **komplex-konjugierte Pole:**

- Für komplex-konjugierte Pole $p_j = p_i^*$ ergeben sich komplex-konjugierte Faktoren $c_j = c_i^*$
  ➠ Werden die entsprechenden zwei Terme addiert, ergeben sich für die Summe reelle Koeffizienten ($PT_2$-Glied)

### Beispiel: UTF – Standardfall (S. 31)

$$G(s) = \frac{8s^2 + 80s + 192}{s^3 + 15s^2 + 71s + 105} = \frac{8s^2 + 80s + 192}{(s+3)(s+5)(s+7)} \quad \text{➠ PBZ}$$

$$G(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_2}{s+5} + \frac{c_3}{s+7} \qquad \text{mit } c_i = \left.\frac{Z(s)}{\frac{\mathrm{d}N(s)}{\mathrm{d}s}}\right|_{s=p_i} = \left.\frac{8s^2 + 80s + 192}{3s^2 + 30s + 71}\right|_{s=p_i}$$

$$G(s) = \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s+5} + \frac{3}{s+7} \quad \text{➠ entspricht drei parallelen } PT_1\text{-Gliedern}$$

### Beispiel: UTF mit komplexen Polen (S. 32)

$$G(s) = \frac{8s^2 + 70s + 134}{s^3 + 15s^2 + 81s + 175} = \frac{8s^2 + 70s + 134}{(s+7)(s+4+3\mathrm{j})(s+4-3\mathrm{j})} \quad \text{➠ PBZ}$$

$$G(s) = \frac{2}{s+7} + \underbrace{\frac{3+2\mathrm{j}}{s+4-3\mathrm{j}} + \frac{3-2\mathrm{j}}{s+4+3\mathrm{j}}}_{\frac{6s+12}{s^2+8s+25}} \quad \text{➠ entspricht drei parallelen } PT_1\text{-Gliedern}$$

**Hinweis:** Glieder mit komplexen Werten für Verstärkung und Zeitkonstante werden üblicherweise zu **Teilsystemen zweiter Ordnung** zusammengefasst.

## 4.5 Realisierbarkeit (S. 33)

- Ein System mit einer UTF mit $m \leq n$ gilt als realisierbar
- Bei einem Regler dürfen somit **nicht** mehr Pole als Nullstellen eingebaut werden

### Beispiel: Nicht-realisierbares System (S. 33)

$$G(s) = \frac{3s^3 + 13s^2 + 40s + 43}{s^2 + 3s + 2} = \underbrace{\overbrace{3s}^{\text{D-Anteil}} + \overbrace{4}^{\text{P-Anteil}} + \overbrace{\frac{22s + 35}{s^2 + 3s + 2}}^{\text{Tiefpass}}}_{\text{nicht realisierbar}}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{realisierbar}}$$

## 4.6 Minimalität (S. 33)

- UTF mit Nennergrad $n$ ist minimal, wenn **keine** Pol-Nullstellenkürzung möglich ist
  - Um diese UTF zu realiseren, sind dann mindestens $n$ Integratoren nötig

**Hinweis:** Pol-Nullstellenkürzungen sind generell **nur in der linken Halbebene** erlaubt! ➠ Stabilität!

## 4.7 Allpass

Eine UTF beschreibt einen Allpass, wenn **$|G(\mathrm{j}\omega)|$ konstant** (normalrweise = 1) ist, d.h. **unabhängig** von $\omega$ ist.

## 4.8 Ordnung eines Systems (S. 46)

- **System ohne Totzeit $T_t = 0$**
  - Ordnung $n$, was der **Anzahl der Pole** entspricht
  - Ist $G(s)$ nicht vollständig gekürzt, nimmt man als Ordnung je nach Kontext die Anzahl Pole vor bzw. nach dem Kürzen
- **System mit Totzeit**
  - Ordnung des Systems steigt auf **unendlich**

## 4.9 Minimalphasigkeit (S. 43-44)

Ein Minimalphasennetzwerk besitzt

- **keine Nullstellen** in der rechten Halbebene (RHE) ($\sigma \leq 0$)
  ➠ Nullstellen auf der j$\omega$-Achse sind erlaubt!
- **keine** Totzeiten

### 4.9.1 Einflüsse von Nicht-Minimalphasigkeit

- **Nullstellen in RHE**
  - Schrittantwort schwingt in 'falsche Richtung' an
- **Totzeiten** (➠ siehe Abschnitt 4.13)
  - Verzögertes Anschwingen
    ➠ Im Intervall $0 \leq t < T_t$ reagiert Ausgang nicht auf Schrittsignal

## 4.10 Stabilität (S. 34-35)

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.
Für **Stabilität und Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
  - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE) ➠ $\sigma < 0$
  - Keine Polstellen vorhanden
- **Asymptotisch stabil:**
  - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE) ➠ $\sigma < 0$
- **Grenzstabil:**
  - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE) ➠ $\sigma > 0$
  - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse ➠ $\sigma = 0$
  - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse ➠ $\sigma = 0$
- **Instabil:**
  - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE) ➠ $\sigma > 0$
  - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse ➠ $\sigma = 0$

**Hinweis:** 'Stabil' ist ein Synonym für 'asymptotisch stabil'

### 4.10.1 Stabilität – Vorzeichenkriterium (S. 36)

Eine **notwendige** Stabilitätsbedingung für das Nennerpolynom $N(s)$ der UTF

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{\text{Zähler}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

besteht darin, das alle Koeffizienten existieren $a_0 \ldots a_n$ (also $\neq 0$ sind) **und dasselbe Vorzeichen** haben.
Bei Systemen **erster und zweiter Ordnung** ist die Vorzeichenregel auch **hinreichend** für die Stabilität.

## 4.11 Stabilität – Routh-Kriterium (S. 37)

- Überprüfen, ob $G(s)$ das Vorzeichenkriterium erfüllt ➠ Abschnitt 4.10.1
- Bekannte Grössen in Tabelle abfüllen
  - Linke Spalte: Ordnung vom Nennerpolynom $n$ bis 0
  - Koeffizienten $a_i$ 'im Zick-Zack' in obere zwei Zeilen
- Fehlende Einträge in Tabelle berechnen
  - Ein Eintrag ergibt sich durch algebraisches Rechnen mit Einträgen der **zwei darüberliegenden Zeilen**
- Auswertung mittels 'grauer Spalte'
  - **Alle Koeffizienten müssen gleiches Vorzeichen haben, damit System stabil!**

| | | |
|---|---|---|
| $b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ | $b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ | $b_3 = \ldots$ |
| $c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$ | $c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$ | $c_3 = \ldots$ |
| $d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$ | $d_2 = \ldots$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $\cdots$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $n-1$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $\vdots \ddots$ | $a_1$ | 0 |
| $n-2$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\ldots$ | $b_{n/2}$ | 0 |
| $n-3$ | $c_1$ | $c_2$ | $\ldots$ | $c_{(n-2)/2}$ | 0 | 0 |
| $n-4$ | $d_1$ | $\cdots$ | $\cdots$ | 0 | 0 | 0 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | 0 | 0 |
| 0 | $x_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

### Beispiel: Routh-Kriterium – System 3. Ordnung (S. 37)

$N(s) = 2s^3 + 10s^2 + 170s + (31 + \alpha)$

- Vorzeichenkriterium: $\alpha > -31$
- Routh: $850 - 31 - \alpha > 0$ ➠ $819 > \alpha$

➠ Stabil wenn $-31 < \alpha < 819$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 170 |
| 2 | 10 | $31 + \alpha$ |
| 1 | $\frac{10 \cdot 170 - 2(31+\alpha)}{10}$ | 0 |
| 0 | $31 + \alpha$ | 0 |

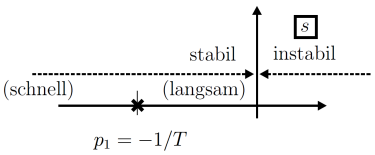
## 4.12 Dominante Pole und Nullstellen (S. 42)

Falls $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ 'im Wesentlichen' durch $G_1(s)$ erfasst werden - aber nicht durch 'weniger' als $G_1(s)$, dann sind die Pole (und Nullstellen) von $G_1(s)$ dominant gegenüber denjenigen von $G_2(s)$

### 4.12.1 Faustregeln dominante / nicht-dominante Pole bzw. NS

Typischerweise sind **nicht-dominante**

- Pole (Nullstellen) weiter links platziert als dominante Pole (Nullstellen),
- Pole (Nullstellen) besser gedämpft als dominante Pole (Nullstellen),
- Pole **und** Nullstellen so platziert, dass sie sich kürzen oder beinahe kürzen.




➜ Pole in **RHE** sind **immer dominant**, da sie das System **instabil** machen!

### Beispiel: Dominante Pole

$$G(s) = \underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{\omega_N^2}{s^2 + 2\zeta\omega_N s + \omega_N^2}}_{G_2(s)} \quad \text{mit } \omega_N \gg \omega_n,\ \zeta = 0.7$$

$G_2(s)$ ist um Faktor $\omega_N/\omega_n \gg 1$ schneller als $G_1(s)$
➜ $G_2(s)$ zeigt fast ideales P-Verhalten
➜ $G_1(s)$ ist dominant gegenüber $G_2(s)$

## 4.13 Padé-Approximation von Totzeiten (S. 45)

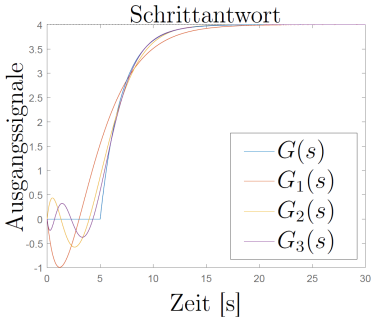
Eine Totzeit $e^{-sT_t}$ wird in der Regelungstechnik häufig durch die Padé-Approximation angenähert. Je nach Grad der Approximation wird einer der folgenden Ausdrücke benutzt:

$$e^{-sT_t} = e^x\Big|_{x=-sT_t} \quad \text{mit} \quad e^x \approx 1 \approx \frac{2+x}{2-x} \approx \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \approx \dots$$

➜ **Vorzeichen im Nenner immer alternierend!**

### 4.13.1 Eigenschaften der Padé-Approximation

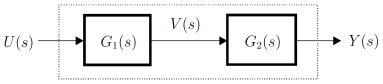
- Approximation ist **stabil**, unabhängig von der Ordnung
- Die Nullstellen der Approximation entsprechen – an der **imaginären Achse gespiegelt** – den Polen.
  - Es entsteht eine **Ellipse** (Pole links, NS rechts der imaginären Achse)
- Mit Ersetzung eines Totzeitglieds durch die Approximation bleibt die **Allpass-Eigenschaft** erhalten: $|G(j\omega)| = 1$
- **Nicht-Minimalphasigkeit** bliebt erhalten
- Der Phasengang konvergiert mit zunehmender Ordnung gegen denjenigen des Totzeitglieds $e^{sT_t}$ : $\angle\, e^{-j\omega T_t} = -\omega T_t$
  - **Konvergenz** der Phase gegen $-180° \cdot$ Ordnung der Approximation




Mit zunehmender Ordnung der Approximation ergibt sich **mehrfaches 'falsches Anschwingen'** der Schrittantwort

# 5 Blockdiagramme

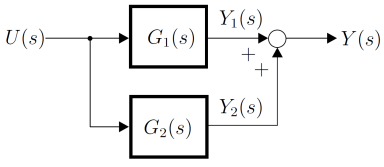
## 5.1 Serieschaltung (S. 47)




$$Y(s) = \underbrace{G_1(s) \cdot G_2(s)}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Sind $G_1(s)$ und $G_2(s)$ stabil, so ist $G(s)$ auch stabil.

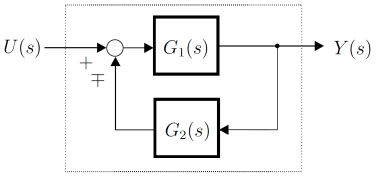
## 5.2 Parallelschaltung (S. 48)




$$Y(s) = \underbrace{(G_1(s) + G_2(s))}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Sind $G_1(s)$ und $G_2(s)$ stabil, so ist $G(s)$ auch stabil

## 5.3 Kreisschaltung (S. 48)




$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Auch mit stabilen Teilsystemen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ kann $G(s)$ instabil sein.
Hingegen kann mit instabilen Teilsystemen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ ein stabiles System $G(s)$ entstehen.

## 5.4 Eigenschaften der Schaltungs-Topologien

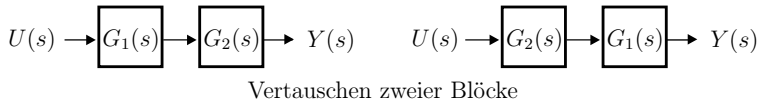
$G_1(s) = \frac{Z_1(s)}{N_1(s)}$ mit Ordnung $n_1$ und $G_2(s) = \frac{Z_2(s)}{N_2(s)}$ mit Ordnung $n_2$

| Topologie | UTF | Pole | Nullstellen | Ordnung |
|---|---|---|---|---|
| Serie ($*^1$) | $G = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2}$ | Vereinigung keine neuen Pole | Vereinigung keine neuen NS | $n_1 + n_2$ |
| Parallel | $G = \frac{Z_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2}$ | Vereinigung keine neuen Pole | 'neue' ($*^2$) Konfiguration | $n_1 + n_2$ |
| Kreis | $G = \frac{N_2 \cdot Z_1}{N_1 \cdot N_2 + Z_1 \cdot Z_2}$ | 'neue' Konfiguration | NS von $G_1$ und Pole von $G_2$ | $n_1 + n_2$ |

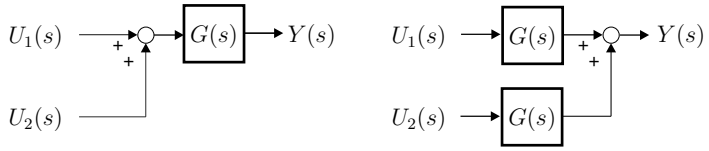
($*^1$) Eventuell sind Pol- / Nullstellenkürzungen möglich!
➜ # Pole / # NS / Ordnung können ändern
($*^2$) Es können neue NS entstehen oder auch NS verschwinden

## 5.5 Blockdiagramm-Algebra (S. 50)

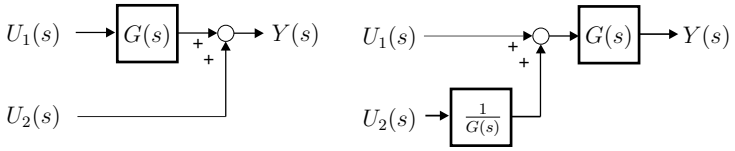
Mit den folgenden Operationen bleibt das **I/O-Verhalten** des Systems **identisch**. Über interne Signale wird allerdings keine Aussage gemacht.
➜ Immer gültig für SISO-Systeme



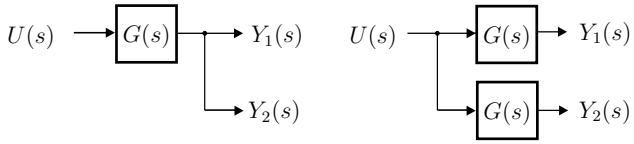

Vertauschen zweier Blöcke



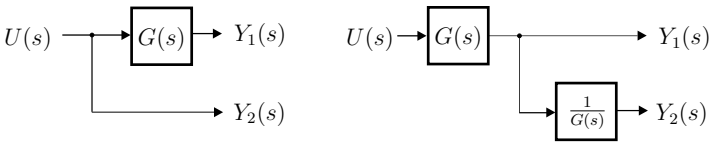

Rückwärtsverschieben eines Blocks durch einen Summator




Vorwärtsverschieben eines Blocks durch einen Summator

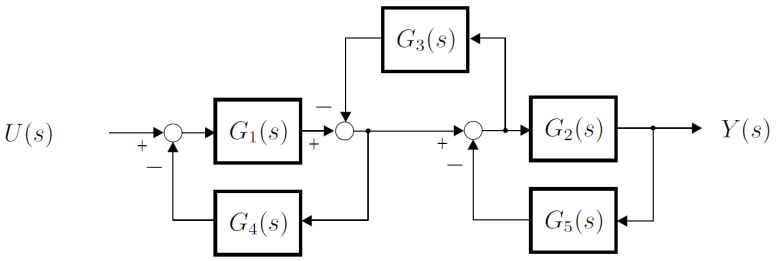



Vorwärtsverschieben eines Blocks durch einen Verzweigungspunkt

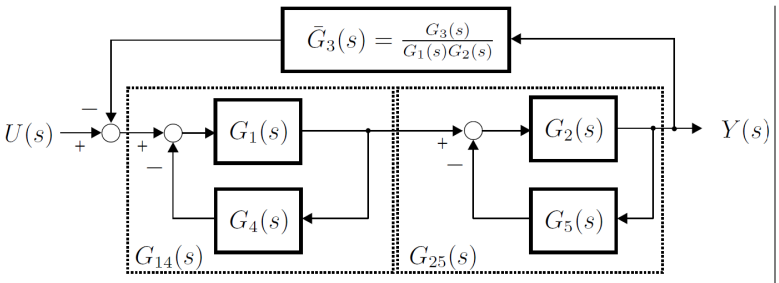



Rückwärtsverschieben eines Blocks durch einen Verzweigungspunkt

### Beispiel: Verschachteltes Blockdiagramm vereinfachen (S. 51)




Durch **Verschieben zweier Signalpfade** ergibt isch die folgende Version. Dabei muss $\boldsymbol{G(s)}$ entsprechend zu $\boldsymbol{\overline{G}_3}$ **modifiziert** werden, sodass das I/O-Verhalten des Blockdiagramms nicht verändert wird.




In der neuen Struktur sind zwei innere Kreisschaltungen $G_{14}(s)$ und $G_{25}(s)$ vorhanden, sowie eine 'äussere' Kreisschaltung.

$$G_{14}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_4(s)} \quad \text{und} \quad G_{25}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_5(s)}$$

Die gesamte UTF des Systems ergibt sich als

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_{25}(s) \cdot G_{14}(s)}{1 + G_{25}(s) \cdot G_{14}(s) \cdot \bar{G}_3}$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)\,G_2(s)}{1 + G_3(s) + G_1(s)\,G_4(s) + G_2(s)\,G_5(s) + G_1(s)\,G_2(s)\,G_4(s)\,G_5(s)}$$

➾ Dies führt zur selben Lösung, wie wenn man auf das ursprüngliche Blockdiagramm direkt die **Regel von Mason** angewendet hätte

# 6 (Minimale) Realisierung von UTFs

Eine allgemeine UTF $G(s)$ soll 'minimal' realisiert werden, also z.B. elektronisch in Analogtechnik aufgebaut werden. Der Begriff **'minimale Realisierung'** bezieht sich auf die **Systemordnung**, d.h. die Anzahl dynamischer Elemente (Speicher) bzw. Integratoren.
➾ Schaltung soll keine versteckten Pol- / Nullstellen-Kürzungen beinhalten

## 6.1 Vorgehen – UTF realieren

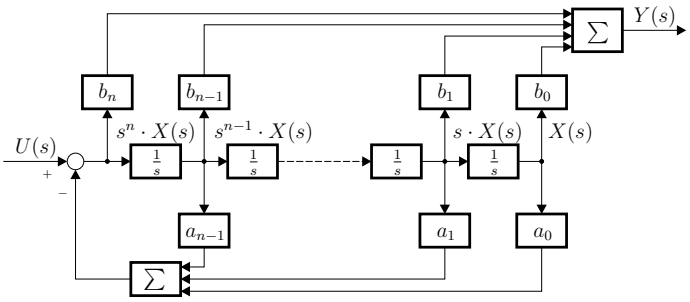
1. $G(s)$ in Blockdiagramm aus Verstärkungen, Integratoren und Summatoren darstellen
2. Blockdiagramm in Analogtechnik umsetzen (R, C, OpAmps)

### 6.1.1 UTF zu Blockdiagramm (S. 55)

Die UTF ist normiert, sodass $a_n = 1$ ist.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (m \leq n)$$

Diese wird mittels folgendem Diagramm **allgemein realisiert**. Dazu wird rechts im Diagramm die Grösse $X(s)$ eingeführt, wodurch die Signale links davon definiert sind als $s \cdot X(s)$ etc.



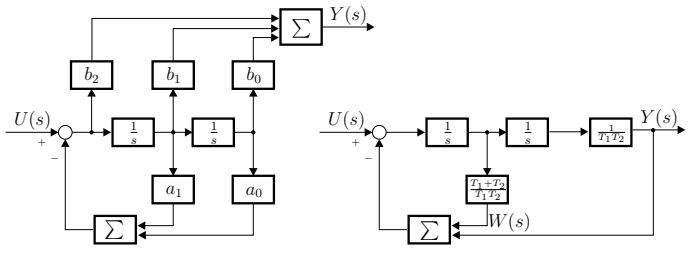

**Bemerkungen**:
- Vorausgesetzt, die gegebene UTF ist minimal (d.h. **gekürzt**), so ist die **Realisierung minimal** ➾ minimal mögliche Anzahl Integratoren, nämlich $n$
- Die Realisierung entspricht der sogenannten **'direkten Form'**
- Es gibt beliebig viele minimale Realisierungen (z.B. Serie- / Parallelform)

### 6.1.2 Blockdiagramm zu Analogtechnik (S. 56-58)

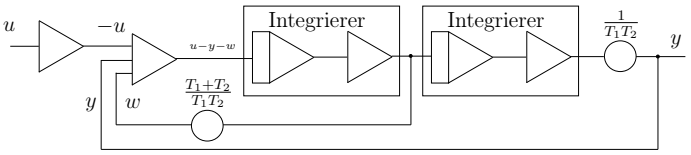
Das Blockdiagramm muss nun mittels Komponenten der Analogtechnik (R, C, OpAmps) realisiert werden. Die entsprechenden Komponenten können einer Tabelle (siehe Anhang Abschnitt 21 oder Skirpt S. 57) entnommen werden. **Zu beachten ist, dass bei Einsatz eines OpAmps immer auch das Vorzeichen gedreht wird!**

### Beispiel: Serieschaltung zweier PT$_1$-Glieder (S. 58)

$G(s)$ wird zuerst normiert, sodass $a_n = a_2 = 1$ ist. Anschliessend wird das System 2. Ordnung in die allgemeine Struktur gebracht.
Im Beispiel gilt $b_2 = b_1 = 0$ und $b_0 = a_0 = \frac{1}{T_1 T_2}$ sowie $a_1 = \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2}$
Somit kann das Blockdiagramm vereinfacht werden (rechts)




Anschliessend kann die Schaltung mittels Analogtechnik aufgebaut werden.
**Hinweis:** Die gezeigte Schaltung könnte bezüglich der Anzahl Bauteile noch weiter vereinfacht werden.




## 6.2 Pol-/ Nullstellen-Kürzung bei UTF-Realisierung (S. 60)

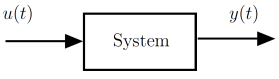
Falls (mathematisch) eine Pol-/ Nullstellen-Kürzung vorgenommen werden kann, sollte man folgende Überlegungen machen:

Für Kürzungen in der **linken Halbebene** gilt:
- Falls eine UTF **realisiert** werden soll, sollte die vereinfachte Version realisiert werden
  - Pol-/ Nullstellen-Kürzung vornehmen
- Falls die UTF eine physikalische Struktur eines Systems repräsentiert, kann gekürzt werden oder man kann im Zustandsraum mit dem 'echten' System arbeiten ➾ RegT4

Für Kürzungen in der **rechten Halbebene** gilt:
- Falls eine UTF **realisiert** werden müsste, **könnte die Kürzung gemacht werden** und die vereinfachte UTF umgesetzt werden
  - Kürzung betrifft etwas, was noch gar nicht existiert
- Falls die UTF ein **bereits existierendes Systems** repräsentiert, darf **nicht gekürzt** werden!

# 7 Frequenzgang

Der Frequenzgang $G_c(\mathrm{j}\omega)$ ist eine Alternative zur UTF $G(s)$, um das Übertragungsverhalten eines (LZI-)Systems zu beschreiben. Der Frequenzgang $G_c(\mathrm{j}\omega)$ wird **experimentell** ermittelt, indem am Eingang eine Sinusschwingung $u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$ angelegt wird. Die Antwort des Systems wird von einer Transiente überlagert. Bei einem **stabilen System** klingt die Transiente ab und der **Ausgang wird stationär.**




$u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$ $\quad$ $y(t) = B \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ + Transiente

- Phase kann ändern
- Amplitude kann ändern
- Verstärkung: $K = \frac{B}{A}$
- **Frequenz bleibt erhalten**

Die Verstärkung $K(\omega_0)$ und der Winkel $\varphi(\omega_0)$ werden als **Betrag und Argument** einer komplexen Zahl notiert.

$$G_c(\mathrm{j}\omega_0) = |G_c(\mathrm{j}\omega_0)| \cdot e^{\mathrm{j}\angle G_c(\mathrm{j}\omega_0)} = K(\omega_0) \cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}$$

Das Experiment wird für viele Frequenzen $\omega_0$ wiederholt, sodass sich daraus der Frequenzgang $G_c(\mathrm{j}\omega_0)$ ergibt. Dieser wird oft in einem **Bode-Diagramm** dargestellt.

## 7.1 Zusammenhang UTF – Frequenzgang (S. 62)

Der Frequenzgang $G_c(\mathrm{j}\omega)$ entspricht der an der **imaginären Achse ausgewerteten UTF $G(s)$**

$$G(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega} = G(\mathrm{j}\omega) = G_c(\mathrm{j}\omega)$$

**Bemerkung:** Zwischen $G(\mathrm{j}\omega)$ und dem Frequenzgang $G_c(\mathrm{j}\omega)$ wird selten strikt unterschieden, obwohl letzterer nur für stabile Systeme existiert.
Bei einem instabilen System ist das Bode-Diagramm eine Visualisierung von $G(\mathrm{j}\omega)$, aber nicht von $G_c(\mathrm{j}\omega)$

## 7.2 Darstellung des Frequenzgangs (S. 63-64)

Der Frequenzgang $G(\mathrm{j}\omega)$ kann grafisch im Bode-Diagramm oder im Nyquist-Diagramm dargestellt werden.

- **Bode-Diagramm**
  - Stellt $G(s)$ in Amplitudengang $|G(s)|$ und Phasengang $\angle G(s)$ dar
  - Entspricht $G(s)$ einem **geschlossenen** Regelkreis, so gibt das Diagramm einen Einblick über das Systemverhalten (z.B. Abschätzung der Schrittantwort)
  - Entspricht $G(s)$ einem **offenen** Regelkreis, so kann aus dem Diagramm abgelesen werden, ob der geschlossene Regelkreis stabil ist
  - Kann in Nyquist-Diagramm umgezeichnet werden (enthält mehr Informationen ➾ Frequenz)
  - Besser geeignet für **Synthese** eines Reglers
- **Nyquist-Diagramm**
  - Stellt $G(s)$ als komplexe Zahl in der komplexen Zahlenebene dar
  - Wird normalerweise auf den **offenen** Regelkreis angewendet ➾ Nyquist-Kriterium
  - Kann **nicht** in ein Bode-Diagramm umgezeichnet werden
  - Besser geeignet für **Analyse** (der Regelstrecke)

### 7.2.1 Bandbreite $\omega_B$

- Als Bandbreite $\omega_B$ wird diejenige Frequenz definiert, bis zu der die Amplitude des Signals $|G|_{\mathrm{dB}} \geq -3\,\mathrm{dB}$ ist.
- Für die Amplitde des Signals bei $\omega_B$ gilt: $G|(\mathrm{j}\omega_B)| \approx 0.7$
- Der Kehrwert $\frac{1}{\omega_B}$ gibt eine Abschätzung für die **dominante Zeitkonstante $T$** des Systems

# 8 Bode-Diagramm

## 8.1 Bode-Diagramm approximieren

Serieschaltungen (Multiplikationen) können im Bode-Diagramm **grafisch addiert** werden. Für eine einfachere Skizzierung werden Bode-Diagramme meist mit **Geraden approximiert.** Aus dem Diagramm kann man so relativ leicht Pole, Nullstellen, Zeitkonstanten oder die Systemordnung ermitteln.

Zu beachten ist, dass die Modelle der Regelstrecken (und somit auch die Bode-Diagramme) bei **tiefen Frequenzen genauer / zuverlässiger** sind als bei hohen Frequenzen. Deshalb sollte man auch die Bode-Diagramme immer von den tiefen zu den hohen Frequenzen zeichnen, also von **links nach rechts.**

## 8.2 Frequenzgang geeignet umformen (S. 67)

Um ein Bode-Diagramm zu zeichnen, sollte der Frequenzgang $G(s)$ nicht in seiner 'gewöhnlichen' Form (links) verwendet werden, sondern er sollte geeignet umgeformt werden (rechts).

$$G(s) = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \cdot e^{-sT_t} \qquad G(s) = K_0 \cdot s^{\nu} \cdot \frac{\prod_k (1-\frac{s}{z_k})}{\prod_q (1-\frac{s}{p_q})} \cdot e^{-sT_t}$$

Bei der Umformung werden folgende Schritte vorgenommen:

1. $G(s)$ vollständig kürzen
2. Pole / Nullstellen bei Null 'herausziehen' in Faktor $s^{\nu}$
   Für Nullstllen wird $\nu > 0$ und für Pole wird $\nu < 0$
3. Terme der verbleibenden Pole / NS neu normieren, sodass ihre DC-Verstärkung 1 ist
4. Alle Verstärkungen ausserhalb des Bruchs in Term $K_0$ zusammenfassen
5. Pole / NS nach aufsteigenden Eckfrequenzen ordnen

**Hinweis:** Komplex-Konjugierte Pole bzw. Nullstellen werden als Terme 2. Ordnung geschrieben. (Müsste in obiger Formel ergänzt werden.)

## 8.3 Approximationen im Bode-Diagramm (S. 67-70)

### 8.3.1 Tieffrequentes Verhalten

**Amplitudengang**

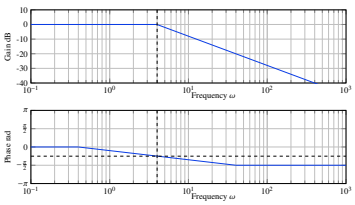
1. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei $\omega = 1$
2. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei $|K_0|_{\text{dB}}$
3. Gerade durch Schnittpunkt der feinen Geraden zeichnen
   - Für $\nu > 0$ Steigung $+\nu \cdot 20\,\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$
   - Für $\nu < 0$ Steigung $-\nu \cdot 20\,\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$
   - Für $\nu = 0$ Horizontale Gerade

**Phasengang**

1. Waagrechte Gerade bei entsprechender Phase einzeichnen
   - Für $\nu > 0$ Gerade durch $+\nu \cdot \frac{\pi}{2}$
   - Für $\nu < 0$ Gerade durch $-\nu \cdot \frac{\pi}{2}$
   - Für $\nu = 0$ Gerade durch 0

### 8.3.2 Reeller Pol in linker Halbebene

$$\frac{1}{1+\frac{s}{p}} = \frac{1}{1+\frac{s}{-4}}$$




**Amplitudengang**

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = p$
2. $-20\,\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = p$

**Phasengang**

1. 0 bis $\omega = \frac{p}{10}$
2. $-\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot p$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(-\frac{\pi}{4}$ bei $\omega = p)$

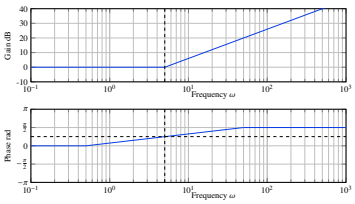
### 8.3.3 Reeller Pol in rechter Halbebene

$$\frac{1}{1-\frac{s}{p}} = \frac{1}{1-\frac{s}{4}}$$

- Amplitudengang gleich, wie wenn Pol in linker Halbebene wäre
- Phasengang im Vergleich zum Pol in RHE **an 0°-Linie gespiegelt**

### 8.3.4 Reelle Nullstelle in linker Halbebene

$$1+\frac{s}{p} = 1+\frac{s}{-5}$$




**Amplitudengang**

1. 0 dB von $\omega = 0$ bis $\omega = z$
2. $+20\,\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$ einzeichnen ab $\omega = z$

**Phasengang**

1. 0 bis $\omega = \frac{z}{10}$
2. $+\frac{\pi}{2}$ ab $\omega = 10 \cdot z$
3. Gerade zwischen beiden Geraden
4. $(+\frac{\pi}{4}$ bei $\omega = z)$

### 8.3.5 Reelle Nullstelle in rechter Halbebene

$$1+\frac{s}{p} = 1+\frac{s}{5}$$

- Amplitudengang gleich, wie wenn Nullstelle in linker Halbebene wäre
- Phasengang im Vergleich zu NS in RHE **an 0°-Linie gespiegelt**

### 8.3.6 Totzeit

**Amplitudengang**

- Kein Einfluss auf Amplitudengang $G(\text{j}\omega) = 1$
  - Allpass-Verhalten (Verstärkung 1 bzw. 0 dB)

**Phasengang**

- Linearer Phasengang: $\angle G(\text{j}\omega) = -\omega T_t$
  - Zeichnerischer Mehraufwand
    ➠ Keine Geraden-Approximation möglich!

### 8.3.7 Konjugiert-Komplexe Pole / Nullstellen

Die Approximation von konjugiert-komplexen Polen und Nullstellen ist schwieriger und wird meist nicht zeichnerisch (approximativ) vorgenommen. Daher wird hier nur auf das Skript verwiesen ➠ Seite 70

## 8.4 Bodediagramme mit Matlab

```
z = [1, 2, 5];       % Zaehlerpolynom: s^2 + 2s + 5
n = [3, 5];          % Nennerpolynom:  3s + 5
T_t = 0.5            % Totzeit
roots(n)             % Nullstellen
G = (tf(z, n, 'inputdelay', T_t))   % UTF (mit Totzeit)
bode(G)              % Bode-Plot des Systems
margin(G)            % Bode-Plot mit Stabilitaets- und Phasenreserve
bodemag(G)           % Amplitudengang des Systems
```

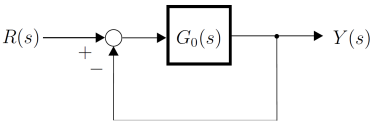
# 9 Nyquist-Diagramm / Nyquist-Kriterium

## 9.1 Nyquist-Diagramm (S. 71-72)

- Nyquist-Diagramme werden meist mit Matlab gezeichnet
  - Matlab zeichnet Frequenzen von $(-\infty \le \omega \le \infty)$
  - Die Plots zwei Äste des Diagramms liegen **symmetrisch bezüglich der reellen Achse**, da $G(-\text{j}\omega) = G^*(\text{j}\omega)$
- Der **kritische Punkt −1** ist im Nyquist-Diagramm besser ersichtlicht

## 9.2 Stabilität – Allgemeines Nyquist-Kriterium (S. 73)

Das Nyquist-Kriterium betrachtet den **offenen Regelkreis**, um eine Aussage über die **Stabilität des geschlossenen Regelkreises** zu machen!
Im Vergleich zum vereinfachten Nyquist-Kriterium kann der offene Regelkreis beim allgemeinen Nyquist-Kriterium ein **beliebiges LZI-System** sein, insbesondere auch instabil.




Der offene Regelkreis entspricht allem, was 'im Loop' drin ist.

Für die Anwendung des allgemeinen Nyquist-Kriteriums wird die gekürzte UTF des **offene Regelkreis $G_0(s)$** betrachtet:

$$G_0(s) = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \cdot e^{-sT_t} \quad \text{mit } m < n$$

Die Anwendung des allgmeinen Nyquist-Kriteriums besteht nun aus folgenden Schritten

1. Anzahl Pole $N$ von $G_0(s)$ bestimmen, welche in der rechten Halbebene **oder** auf der imaginären Achse liegen. $(0 \le N \le n)$
2. Beide Äste der Ortskurve von $G_0(s)$ zeichnen $(-\infty < \omega < \infty)$
   ➠ symmetrisch zur reellen Achse!
3. Wenn die Ortskurve den kritischen Punkt $-1$ **genau $N$ mal** positiv (im **Gegenuhrzeigersinn**) umschlingt, dann ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil!

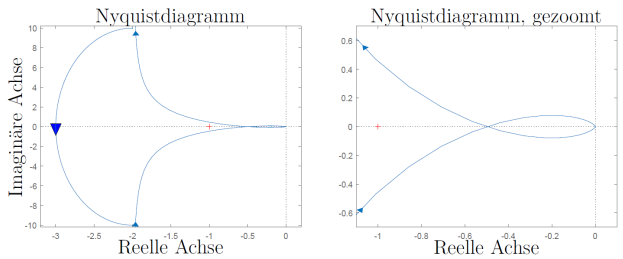
### 9.2.1 Spezialfall: 'offene' Ortskurve

Wenn $G_0(s)$ **Pole auf der imaginären Achse** hat, dann läuft die Ortskurve bei den entsprechenden Frequenzen ins Unendliche. Es entsteht eine 'offene' Ortskurve. Um das allgemeine Nyquist-Kriterium dennoch anwenden zu können, muss die **Ortskurve manuell geschlossen** werden.

Die Verindung der offenen Enden erfolgt **im Gegenuhrzeiersinn** mit 'beliebig grossem Abstand' von Null.
➠ Jeder Pol auf der imaginären Achse liefert +180° Phasendrehung!

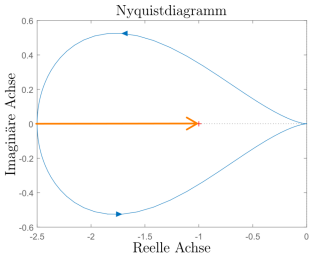
### Beispiel: 'Offene' Ortskurve

Rechts: 'offene' Ortskurve
Links: manuell (im Gegenuhrzeigersinn) geschlossene Ortskurve



## Beispiel: Stabilität mittels Nyquist-Kriterium ermitteln

$$G_0(s) = K \cdot \frac{20}{(s+4)(s-2)}$$




Der Frequenzgang $G_0(s)$ des **offenen Regelkreises** hat einen Pol in der LHE ($N = 1$). Dies bedeutet allerdings noch nicht, dass der geschlossene Regelkreis zwingend instabil ist!

Gemäss allgemeinem Nyquist-Kriterium wird der geschlossene Regelkreis **stabil**, wenn der kritische Punkt $-1$ **genau $N = 1$ mal im Gegenuhrzeigersinn** umlaufen wird.
Dies passiert, wenn $K > 0.4$ ist, dann ab dann liegt der kritische Punkt $-1$ innerhalb der 'Schleife'
Für $K \leq 0.4$ wird der kritische Punkt $-1$ **nicht** $N = 1$ mal umlaufen und der geschlossene Regelkreis ist somit instabil.

## 9.3 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- $G_0(s)$ muss einem **Prozess mit Ausgleich (stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein
  Mit Polen formuliert: Bei $G_0(s)$ sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der **linken Halbebene** liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt $-1$ **links** der Nyquistkurve von $G_0$ liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0 \ldots \infty$) ➡ 'links der Kurve': Man befindet sich **auf der Kurve** und 'schaut' nach links und muss den Punkt $-1$ 'sehen'

## 9.4 Nyquistdiagramme mit Matlab

```
z = [1, 2, 5];       % Zaehlerpolynom: s^2 + 2s + 5
n = [3, 5];          % Nennerpolynom:  3s + 5
T_t = 0.5            % Totzeit
roots(n)             % Nullstellen
G = (tf(z, n, 'inputdelay', T_t))   % UTF (mit Totzeit)
nyquist(G)           % Nyquist-Plot des Systems
```

## 9.5 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für $G(\omega = 0)$ und $G(\omega = \infty)$ berechnen
- Anzahl j im Zähler **plus** Anzahl j im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ durchlaufen werden
- Pollstellen: $|G(j\omega)| \downarrow$ ; $\angle G(j\omega) \downarrow$ ➡ Bewegung im Uhrzeigersinn
- Nullstellen: $|G(j\omega)| \uparrow$ ; $\angle G(j\omega) \uparrow$ ; ➡ Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
  ➡ Bei der Frequenz, bei der die Nullstelle 'zündet', ist $\angle G(j\omega) = \pm 45\,°$
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

# 10 Modellbildung und Modellreduktion

## 10.1 Modellbildung (S. 76-78)

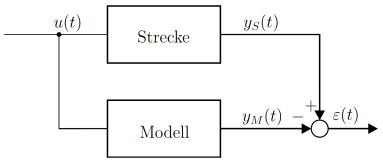
Die Beschreibung einer Regelstrecke kann auf zwei Arten gefunden werden:

### 10.1.1 Modellierung

- Wissen über Aufbau der Stecke (inner Aufbau, physikalische Gesetzmässigkeiten, Parameter) wird benutzt, um ein Modell zu finden
  - Gut geeignet bei 'einfachen' Regelstrecken
  - Einfluss von physikalischen Parametern kann bei modellierter Strecke gut untersucht werden
  - Manchmal kann ein schwieriges Regelungsproblem durch Modifikation ('Umbau') der Stecke entschärft werden

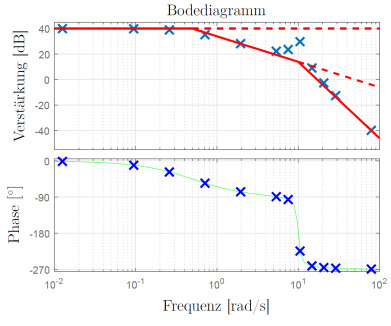
### 10.1.2 Identifikation

**Numerische Identifikation des Ausgangssignals**:
Bei der Identifikation wird die Regelstrecke mit einem geeigneten Eingangssignal (Stellgrösse $u$) angeregt. Dabei wird das Ausgangsignal gemessen.




- Aus Messwerten wird ein passendes Modell generiert, welches zum vorliegenden Prozess passt, indem formal z.B. der Ausdruck $\int \varepsilon(t)^2 \, dt$ minimiert wird
  - Das resultierende Modell ist meist sehr genau, aber meist nur nurmerisch benutzbar

**Identifikation mittels Frequenzgang (LZI-Systeme)**:
Bei LZI-Systemen kann der Frequenzgang ausgemessen werden. Aufgrund des gemessenen Frequenzgangs wird dann versucht, eine passende UTF als Modell zu finden.




- Frequenzgang des Systems ausmessen und in Bode-Diagramm darstellen
- Regeln zum Zeichnen eines Bode-Diagramms 'rückwärts' anwenden und so ein passendes Modell finden
  - Damit grafische Addition erlaubt ist, muss es sich beim Modell um ein Produkt verschiedener Grundglieder handeln!
- Bode-Diagramm des Modells plotten und mit gemessenen Daten vergleichen
  - Modell ggf. anpassen

## 10.2 Modellreduktion (S. 79)

Tendenziell versucht man, bei einer Modellreduktion die **tieffrequenten Eigenschaften beizubehalten** und dafür Ungenauigkeiten in den höheren Frequenzbereichen in Kauf zu nehmen.

Die Modellreduktion kann konkret auf folgende Arten vorgenommen werden:

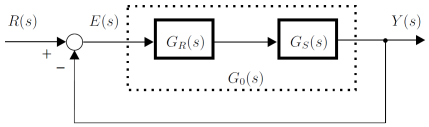
- Hochfrequente Pole / NS weglassen (kleine Zeitkonstanten!)
- Nahe beieinanderliegende Pole bzw. NS zusammenfassen
  - Die DC-Verstärkung muss aber in etwa erhalten bleiben!
- Pol-/Nullstellenkürzung
  - In der Regel **nur dann**, wenn Pole / NS in **linker Halbebene** liegen!

# 11 Reglerentwurf – Spezifikation und Restriktion

- **Transientes Verhalten**
  - Regelkreis muss stabil sein und z.B. auf einen Führungsschritt schnell / ohne starkes Überschwingen reagieren
- **Stationäres Verhalten**
  - Stationäre Grösse muss gut mit Führungsgrösse übereinstimmen
  - Störungen müssen unterdrückt werden

## 11.1 Stationärer Fehler (S. 80-81)

Die folgenden Überlegungen beziehen sich alle auf einen **Regelkreis mit Einheitsrückführung**. $\nu$ entspricht der Anzahl offener Integratoren bzw. der Anzahl Pole bei Null.




$$G_0(s) = K_0 \cdot \frac{1}{s^\nu} \cdot \underbrace{\frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + 1}{a_{\nu-1} s^{\nu-1} + \ldots + a_1 s + 1}}_{\text{Rest: DC-Gain=1}}$$

**Vorausgesetzt, dass der Regelkreis stabil ist**, kann der stationäre Endwert $e_\infty$ via Endwerttheorem bestimmt werden:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} \left[ \frac{s^{\nu+1}}{s^\nu + K_0} \cdot R(s) \right]$$

In diese Gleichung können nun verschiede Führungssignale $R(s)$ eingesetzt werden. Folgende Tabelle liefert eine Übersicht ober den stationären Fehler gängiger Eingangssignale für verschiedene offene Regelkreise $G_0(s)$
Umgekehrt kann die Tabelle genutzt werden, um Bedingungen für den Regler abzuleiten.
➡ Anzahl benötigte Integratoren im Regler für $e_\infty = 0$

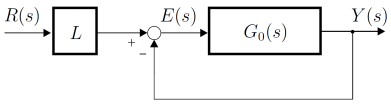
| | $r(t) = \varepsilon(t)$ Schritt | $r(t) = t$ Rampe | $r(t) = \frac{t^2}{2}$ Parabel |
|---|---|---|---|
| $\nu = 0$ (Typ 0) $P$-Verhalten | $e_\infty = \frac{1}{1+K_0}$ | $e_\infty = \infty$ | $e_\infty = \infty$ |
| $\nu = 1$ (Typ 1) $I$-Verhalten | $e_\infty = 0$ | $e_\infty = \frac{1}{K_0}$ | $e_\infty = \infty$ |
| $\nu = 2$ (Typ 2) $I^2$-Verhalten | $e_\infty = 0$ | $e_\infty = 0$ | $e_\infty = \frac{1}{K_0}$ |

Diagonale: Konstanter stationärer Fehler $\neq 0$ (Limitierung des Fehlers)
oberes Dreieck: stationärer Fehler 'läuft davon'
**unteres Dreieck: kein stationärer Fehler**

**Bemerkung:** Es sei daran erinnert, dass die Anzahl Integratoren einen (negativen) Effekt auf die Phase hat (➡ Stabilität)

### 11.1.1 Vorverstärkung statt zusätzliche Integratoren

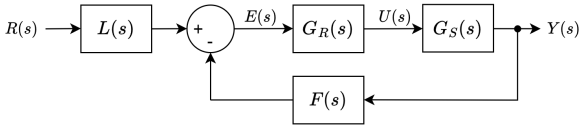
Um zusätzliche Integratoren in $G_0(s)$ zu vermeiden, kann eine **Vorverstärkung $L$** benutzt werden, sodass die DC-Verstärkung = 1 wird.
**Hinweis:** Der Wert der Vorverstärkung ist von den Parametern der Strecke abhängig.
➡ Sobald die Strecke ändert muss auch $L$ geändert werden.




DC-Gain $\frac{Y(s)}{R(s)} = L \cdot \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \stackrel{!}{=} 1$

## 11.2 Dynamisches Verhalten – Spezifikationen

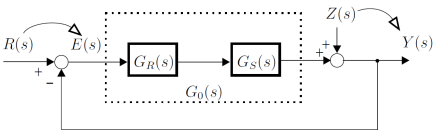
### 11.2.1 Definitionen (S. 83)




| | |
|---|---|
| Geschlossener Regelkreis: | $G_f(s) = L(s) \cdot \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1+G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot F(s)}$ |
| ➡ Spezielfall: $L(s) = F(s) = 1$: | $G_f(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1+G_R(s) \cdot G_S(s)} = T(s)$ |
| Offener Regelkreis: | $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot F(s)$ |
| Sensitivität: | $S(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}$ |
| Komplementäre Sensitivität: | $T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = 1 - S(s)$ ➡ $T(s) + S(s) = 1$ |

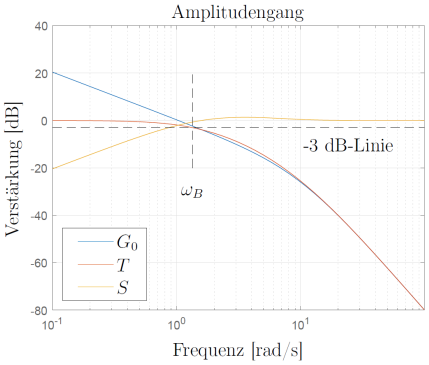
**Idealfall:** $S(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad T(s) = 1$

## Beispiel: Sensitivität im Regelkreis (S. 84)




$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Z(s)}{Y(s)}$$

$$G_0(s) = \frac{100}{s(s+8)(s+12)}$$




- $T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$
  - Tiefe Frequenzen: $T(j\omega) \approx 1$
  - Hohe Frequenzen: $T(j\omega) \approx 0$
  - Gutes Führungsverhalten bis zu Bandbreite $\omega_B$
- $S(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}$
  - Tiefe Frequenzen: kleine Verstärkung
  - Hohe Frequenzen: $S(j\omega) \approx 1$

Für den obigen Regelkreis bedeuten die Beobachtungen also folgendes:

- Hohfrequente Führungssignale $r(t)$ erscheinen praktisch ungefiltert im Regelfehler $e(t)$
- Hochfrequente Störungen $z(t)$ wirken fast ungefiltert auf die Regelgrösse $y(t)$
- Um möglichst lange gutes Führungsverhalten zu haben ist man versucht, die Bandbreite $\omega_B$ zu erhöhen ➡ grössere Verstärkung
  - Bode-Plot wird nach rechts geschoben ➡ Ausgleichsvorgang wird schneller

### 11.2.2 Spezifikationen für einen Regelkreis (S. 86)

Alle aufgelisteten Spezifikationen wollen vor allem eine schnelle Antwort des Regelkreises erreichen.

**Zeitbereich: Schrittantwort des geschlossenen Regelkreises**:

- Stationärer Fehler soll möglist klein sein
- Anstiegszeit $t_r$ und Ausregelzeit $t_\varepsilon$ sollten eingehalten werden
  - Je kleiner $t_r$ bzw. $t_\varepsilon$, desto besser
- Der Wert $\frac{y_m}{y_\infty}$ charakterisiert das Überschwingen

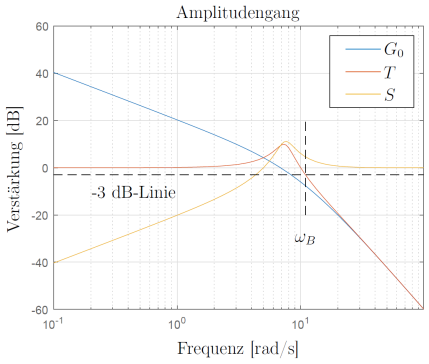
**Frequenzbereich: geschlossener Regelkreis**:

- Es soll eine minimale Bandbreite $\omega_B$ von $T(j\omega)$ erreicht werden
  - Je grösser $\omega_B$, desto besser

**Frequenzbereich: offener Regelkreis:**:

- Es soll eine minimale Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ von $G_0(j\omega)$ erreicht werden
  - Je grösser $\omega_D$, desto besser (dort wo Verstärkung 0 dB)

## 11.3 Dynamisches Verhalten – Restriktionen




Wird die Bandbreite um Faktor 10 vergrössert (Verstärkung um Faktor 10), so verhalten sich die Bereiche 'ganz links' und 'ganz rechts' im Bode-Diagramm entsprechend den Erwartungen.
In der Mitte bei ca. $7-8\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ tritt eine **Überhöhung** auf ➡ **ungünstig!**

Erklärung:
$\frac{1}{S(j\omega)}$ entspricht dem Abstand zwischen dem Punkt $-1$ und $G_0(j\omega)$.
➡ Je grösser Verstärkung, desto näher kommt man dem Punkt $-1$
$\frac{1}{S(j\omega)} \downarrow \leftrightarrow |S(j\omega)| \uparrow$

Bei zu grosser Verstärkung gilt also:

- Im Bereich der Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ tritt Überhöhung (Resonanz) auf
  - Schrittantwort schwingt mit Resonanzfrequenz
- Maximalwert der Überhöhung von $T(s)$ und/oder $S(s)$ muss auf $3-5$ dB begrenzt werden

### 11.3.1 Bode-Integral der Sensitivität

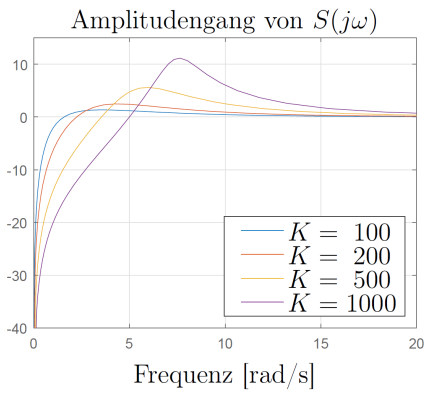
Es sei $G_0(s)$ eine gebrochen rationale Funktion mit **mindestens** 2 Polen mehr als Nullstellen ($n - m \geq 2$). $N_p$ der gesamten $n$ Pole $p_i$ von $G_0(s)$ befinden sich in der **rechten Halbebene**. Dann gilt:

$$\int_0^\infty \ln\left(|S(j\omega)|\right)\, d\omega = \pi \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}\{p_i\}}_{0,\ \text{falls } G_0 \text{ stabil}}$$

**Bemerkungen:**

- Ist $G_0$ stabil, so wird der Ausdruck zu Null. Ist bei einer Frequenz $|S(j\omega) < 0\,\text{dB}|$, dann muss zwingend irgendwo anders $|S(j\omega) > 0\,\text{dB}|$ sein
  - Stabiler offener Regelkreis $G_0(s)$: Keine Pole in RHE ➡ $N_p = 0$
- Verkleinert man $|S(j\omega)|$ an einer Stelle, so wird $|S(j\omega)|$ dafür an einer anderen Stelle grösser ➡ Wasserbetteffekt
  - Bode-Integral der Sensitivität hat Charakter eines Erhaltungssatzes
- Ist $G_0$ instabil, verschlechtert sich die Situation entsprechend

## Beispiel: 'Wasserbett-Effekt' bei stabilem $G_0(s)$




**Achtung:** Frequnzenten sind **linear** dargestellt!

Die Bode-Integrale der Sensitivität werden alle zu 0. Daher muss die Fläche unter der 0 dB Linie jeweils der Fläche oberhalb der 0 dB Linie entsprechen.
➡ Je grösser $K$, desto grösser die Überhöhung

### 11.3.2 Auswirkung auf Regelkreis

Für die Bandbreite $\omega_B$ des Regelkreises gilt:

- Um Bandbreite $\omega_B$ zu vergrössern, muss unterhalb von $\omega_B$ mehr 'Material' ausgehoben werden
  - Das ausgehobene 'Material' muss gemäss Bode-Integral der Sensitivität oberhalb von $\omega_B$ wieder 'abgeladen' werden
- Maximalwert (Überhöhung) von $|S(j\omega)|$ darf nicht überschritten werden (max. $3-5$ dB)
- Für Frequenzen, bei welchen der Aushub 'abgeladen' wird, muss Abstand zwischen Punkt $-1$ und der Ortskurve, d.h. $|1 + G_0|$, im Intervall $1 > |1 + G_0| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$ liegen

In der Praxis kommt es allerdings zu Modellunsicherheiten (Strecke), sowie Sättigungseffekten des Reglers. Somit ist es **nicht möglich**, den Aushub in einem **beliebig hohen Frequenzband** zu 'entsorgen'. Das Bode-Integral der Sensitivität muss **eingeschränkt** werden:

$$\int_0^{\omega_M} \ln\left(|S(j\omega)|\right)\, d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}\{p_i\} \quad \text{mit } \omega_M \approx 10 \cdot \omega_B$$

➡ **Die Bandbreite des Regelkreises muss limitiert werden!**

# 12 Wurzelortskurven (WOK)

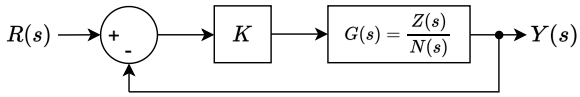
Wurzelortskurven beschreiben die Pole linearer Systeme in Abhängkeit von freien Parametern. Mithilfe der WOK kann z.B. abgeschätzt werden,

- ob es Parameterwerte gibt, die zu einem **stabilen System** führen
- wie gross man den freien **Parameter wählen / einstellen** muss
- welche **Dämpfung** man dabei erreichen kann

## 12.1 Voraussetzungen und Vereinbarungen

### 12.1.1 Topologie des Regelkreises (S. 93)

Der zu betrachtende Regelkreis (bzw. die offene Regelstrecke) wird immer auf die **dargestellte 'Standardsituation'** einer Verstärkung $K$ (z.B. ein P-Regler) und einem gebrochenrationalen, monischen Polynom $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ zurückgeführt.
Sollte ein dynamischer Regler verwendet werden, so wird $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ mathematisch in die verlangte Form aufgeteilt!




Die UTF des geschlossenen Regelkreises ergibt sich als

$$G_f(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot \frac{Z(s)}{N(s)}}{1 + K \cdot \frac{Z(s)}{N(s)}} = \frac{K \cdot Z(s)}{\underbrace{N(s) + K \cdot Z(s)}_{\text{char. Polynom } N_f(s)}} = \frac{Z_f(s)}{N_f(s)}$$

### 12.1.2 Voraussetzungen / Vereinbarungen (S. 95)

Damit die Zeichnungsregeln in Abschnitt 12.3 gültig sind, muss die obige **'Standardsituation'** des Regelkreises folgende Punkte erfüllen:

- Die UTF $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion in $s$ mit monischen Poynomen (**Koeffizienten vor höchster Potenz = 1**)
  - Allfällige Normierungs-Faktoren werden der Verstärkung $K$ 'zugeschrieben'
- $G(s)$ hat mindestens so viele Pole wie Nullstellen ➡ $\boldsymbol{n \geq m}$
- Totzeiten $e^{-sT_t}$ müssen z.B. mit der Padé-Approximation (Abschnitt 4.13) in die gewünschte Form gebracht werden
- WOKs werden für **positive Verstärkungen** betrachtet ➡ $\boldsymbol{K > 0}$
  - $K$ fasst alle vorhandenen Verstärkungen zusammen

## 12.2 Grundsätzliches Aussehen der WOK

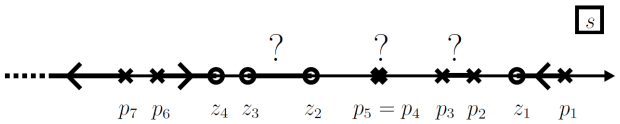
- Char. Polynom $N_f(s) = N(s) + K \cdot Z(s)$ hat für jeden $K$-Wert $n$ Wurzeln (Nullstellen)
  - Visualisiert: $n$ kontinuierliche Linien (Äste)
- WOK ist immer **symmetrisch** bezüglich der **reellen Achse**
- Für $K = 0$ sind die $n$ Wurzeln von $N_f(s)$ und $N(s)$ identisch und entsprechen den $n$ Polen von $G(s)$
- Anfangspunkte der Äste: $n$ Wurzeln von $N(s)$ ➡ Kreuze
- Endpunkte der Äste: $m$ Wurzeln von $Z(s)$ ➡ Kreise
  $n - m$ Äste laufen ins Unendliche

## 12.3 Zeichnen von Wurzelortskurven (S. 96-98)

**1. Pol- / Nullstellenplan**:
Pole / Nullstellen von $G(s)$ werden in komplexer Zahlenebene eingetragen:

- Pole $p_k$ ($k = 1 \dots n$) werden als × dargestellt ➠ Startpunkte der $n$ Äste
- Nullstellen $z_k$ ($k = 1 \dots m$) werden als ○ dargestellt ➠ Endpunkte von $m$ Ästen

**2. Reelle Achse**:
**1.** Start 'ganz rechts' (weiter rechts als alle Einträge × bzw. ○) auf reeller Achse starten; Stift 'nicht schreibend' bzw 'oben'
**2.** Nach links wandern und bei **jedem** × bzw. ○ Stift toggeln ('nicht schreibend' ↔ 'schreibend')
➠ Doppel-Pole bzw. Doppel-Nullstellen entsprechend einem Punkt ('Doppel-Toggel')

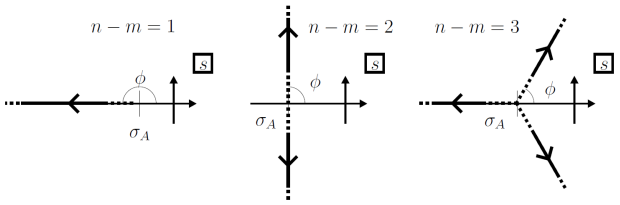



**➠ Gültige WOK-Äste verbinden einen Pol mit einer Nullstelle.**
An den Stellen mit ? (Verbindung von Pol zu Pol bzw. NS zu NS) ist die Situation noch unbefriedigend, da $n > m$. ➠ siehe 3. und 4.

**3. Asymptoten: Schnittpunkte und Richtungen**:
Wenn $n > m$ gilt, dann streben $n-m$ Äste (**Geraden**) der WOK asymptotisch gegen Unendlich. Zu berechnen ist der **Schnittpunkt** und die **Richtung der ersten der Asymptoten**. Die weiteren Asymptoten sind dann **gleichmässig** versetzt.

Schnittpunkt: $\sigma_A = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\{p_k\} - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\{z_k\}}{n-m}$ $\quad n$ # Pole, $m$ # NS

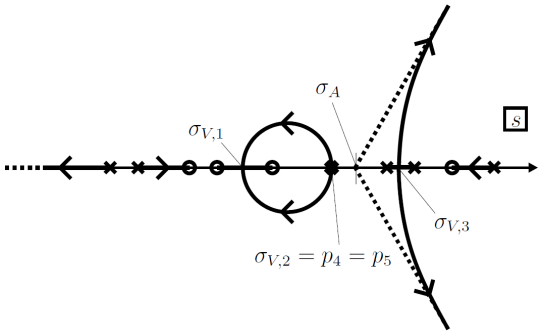
Richtung 1. Asymptote $\phi = \dfrac{\pi}{n-m}$ gleichmässig versetzt um $\dfrac{2\pi}{n-m}$




➠ Wenn $n - m$ ungerade, dann geht immer eine Asymptote auf reeller Achse nach links

**4. Verzweigungspunkte / Vereinigungspunkte**:
Bei Verbindung von Pol zu Pol bzw. NS zu NS treten Verzweigungen / Vereinigungen auf. In diesen Punkten gilt Folgendes:

- Äste treten (meist) **rechtwinklig aus der reellen Achse** aus.
- Verzweigungspunkt bzw. Vereinigungspunkt befindet sich **in der Mitte** des Pol- bzw. NS-Paares
- Die **Form** der betreffenden Äste kann auf zwei Arten verlaufen:
  - Kreisförmig in Richtung **Asymptoten**, welche in der Nähe sind
  - Kreisförmig zum nächsten Verzweigungspunkt bzw. Vereinigungspunkt




Die genauen Verzweigungspunkte / Vereinigungspunkte können auch mittels folgender impliziter Formel berechnet werden:

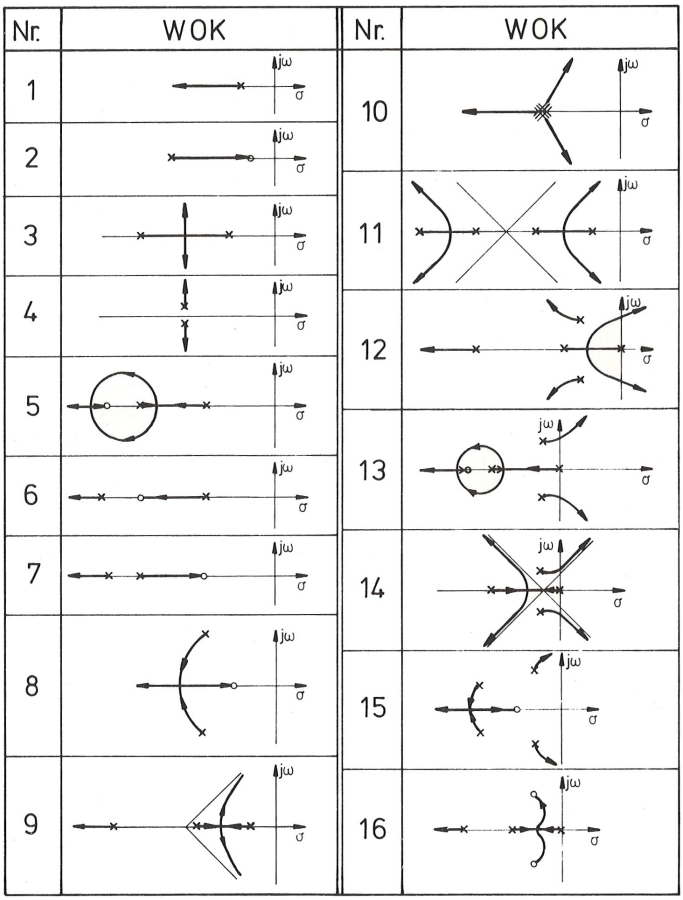
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_V - p_k}}_{\text{Pole}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sigma_V - z_k}}_{\text{Nullstellen}}$$

**Achtung:** Die Formel kann unbrauchbare Lösungen (z.B. mit $\mathrm{Im}\{\sigma_{V,i}\} \neq 0$) liefern, welche 'aussortiert' werden müssen.

## 12.4 Wurzelortskurven mit Matlab

```
z = [1, 5, 1];   % Zaehlerpolynom Z(s) = s^2 + 5s + 1
n = [1, 4];      % Nennerpolynom N(s) = s + 4
G = tf(z, n)     % UTF offener Regelkreis
rlocus(G)        % Wurzelortskurve generieren
```

## 12.5 WOK zu einigen geläufigen Pol- / NS-Verteilungen (S. 99)

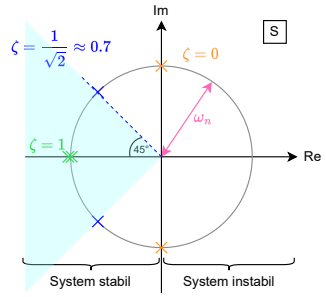



# 13 Reglerentwurf mit Wurzelortskurven (WOK)

Mit WOKs können Regler ausgelegt werden. Dabei stellt man sich oft folgende Fragen:

- Ist der Regelkreis stabil?
  ➠ Position der Pole
- Wie gross ist die Bandbreite des Regelkreises?
  ➠ proportional zu $\omega_n$
  ➠ Grosses $\omega_n$ ➠ schneller Regelkreis
- Kann man die gewünschte Dämpfung $\zeta$ einstellen?
  ➠ Pole in blauem Bereich platzieren
  (➠ Eigentlich Trapez und nicht Dreieck)
- Wie gross ist der stationäre Fehler $e_\infty$?

**$\omega_n$ und $\zeta$ im Pol-NS-Plan**:




## 13.1 Auslegen eines staischen P-Reglers mittels WOK (S. 101-102)

### 13.1.1 Vorgehen – P-Regler mit WOK auslegen

**1.** WOK skizzieren (inkl. Dämpfung) gemäss Abschnitt 12.3
**2.** Pole, welche bei variablem $K$ auf Asymptoten wandern so platzieren, dass gewünschte **Dämpfung** erreicht ist
**3.** **Bandbreite $\omega_n$** und **Verstärkung $K$** bestimmen, indem einer der in 2. platzierten Pole betrachtet wird
Dabei werden von einem solchen Pol aus **Verbindungslinien** zu allen weiteren Polen ($\theta_i$) und allen Nullstellen ($\lambda_i$) gezeichnet. Die Verstäkung $K$ berechnet sich dann aus den entsprechenden **Abständen** $\theta_i$ und $\lambda_i$ gemäss

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_i}{\prod_{i=1}^{m} \lambda_i} = \frac{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_n}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_m}$$

➠ Falls keine Nullstellen vorhanden sind, ist das entsprechende Produkt = 1
**4.** Weitere Verstärkungen (z.B. $K_R$) aus $K$ bestimmen

### Beispiel: Auslegung eines P-Regler mittels WOK

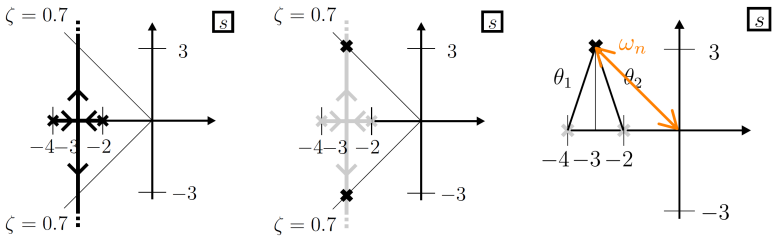
Eine (stabile) Strecke $G_S(s)$ soll mit einem P-Regler mit $G_R(s) = K_R$ mit **möglichst grosser Verstärkung $K_R$** geregelt werden, wobei alle Pole eine **minimale Dämpfung $\zeta = 0.7$** haben sollen.

Der Regelkreis erfüllt also die gewünschte Topologie aus Abschitt 12.1.1.
Der offene Regelkreis $G_0(s)$ wird betrachtet als

$$G_0(s) = K_R \cdot \underbrace{\frac{5}{s^2 + 6s + 8}}_{G_S(s)} = \underbrace{K_R \cdot 5}_{K} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2 + 6s + 8}}_{G_S(s)}$$

Gemäss Abschnitt 13.1.1 kann nun der Regler ausgelegt werden und somit $K_R$ aus $K$ bestimmt werden.

**1. WOK skizzieren** **2. Pole platzieren** **3. $K$ und $\omega_n$ bestimmen**




**4. $K_R$ bestimmen**

Aus $K = \theta_1 \cdot \theta_2 = \sqrt{1^2+3^2} \cdot \sqrt{1^2+3^2} = 10$ und $K = 5 \cdot K_R$ ergibt sich $K_R = 5$

## 13.1.2 Beantwortung der 'Grundfragen' für P-Regler

- Regelkreis ist stabil, wenn $K$ gross genug gewählt wird, dass alle Pole in RHE sind
- Bandbreite: $\omega_n$ aus WOK abgelesen: $\omega_n = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{2\cdot 3^2} = \sqrt{2}\cdot 3\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- Gewünschte Dämpfung $\zeta = 0.7$ ist einstellbar (Pole konnten so platziert werden)
- Stationärer Fehler: $e_\infty = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_0}\Big|_{s=0} = \frac{4}{9}$

## 13.2 Auslegen eines PI-Reglers mittels WOK (S. 102-104)

Der stationäre Fehler $e_\infty$ soll mittels **dynamischem** PI-Regler zum verschwinden gebracht werden. Dafür wird das Konzept der **Pol-Nullstellen-Kürzung** angewendet.
**Hinweis:** Der Regler wird dadurch etwas langsamer (➠ kleinere Dynamik wegen integrierendem Verhalten)

$$\text{UTF PI-Regler:}\quad G_{\text{PI}}(s) = K_R \frac{sT_N + 1}{sT_N}$$

### Beispiel: Auslegung eines PI-Regler mittels WOK

Der offene Regelkreis $G_0(s)$ wird betrachtet als

$$G_0(s) = \underbrace{K_R \cdot \frac{sT_N+1}{sT_N}}_{G_R(s)} \cdot \underbrace{\frac{5}{s^2+6s+8}}_{G_S(s)} = \underbrace{K_R \cdot 5}_{K} \cdot \underbrace{\frac{s+\frac{1}{T_N}}{s(s+2)(s+4)}}_{G(s)}$$

Der Parameter $T_N$ wird so gewählt, dass der **langsamste Pol in der LHE** (kleinster Abstand zu imaginärer Achse) gekürzt werden kann. ➠ $T_N = \frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{T_N} = 2$

$$G_0(s) = \underbrace{K_R \cdot 5}_{K} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+4)}}_{G(s)}$$

Für den resultierenden offenen Regelkreis kann nun gemäss Abschnitt 13.1.1 mittels WOK ein Regler ausgelegt werden und somit $K_R$ aus $K$ bestimmt werden.

### 13.2.1 Bemerkungen zur Pol-Nullstellen-Kürzung

- Pol-NS-Kürzungen dürfen **nur in der linken Halbebene** durchgeführt werden
- Schlecht gedämpfte Pole (ausserhalb von 'blauem Trichter / Trapez') sollten **nicht** gekürzt werden
- Es kann versucht werden, **mit einer Nullstelle mehrere Steckenpole approximativ zu kompensieren** ➠ Summenzeitkonstante: $T_\Sigma = T_1 + T_2 + \ldots$
  - Für Pole bei $-2$ und $-4$ kommt die approximativ kompensierende Nullstelle bei $s_{\text{komp}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$ zu liegen
  - Pole bei 0 können für die Rechnung ignoriert werden
  - Dieses Konzept kann auf mehr Pole / NS ausgeweitet werden

## 13.3 Auslegen eines PIDT1-Reglers mittels WOK (S. 104-105)

Zusätzlich zur Eliminierung des stationären Fehlers soll der Regler **schneller** gemacht werden (einstellbar). Dazu wird ein PIDT$_1$-Regler (in multiplikativer Form) verwendet. Somit sind genug Freiheitsgrade (Parameter) vorhanden, um die gewünschten Spezifikationen (unabhängig) einzustellen.

$$\text{UTF PIDT}_1\text{-Regler:}\quad G_R(s) = K_R \cdot \frac{sT_N+1}{sT_N} \cdot \frac{s(T_V+T_C)+1}{sT_C+1}$$

### Beispiel: Auslegung eines PIDT1-Reglers mittels WOK

In der UTF des offenen Regelkreises $G_0(s)$ werden **zwei Pol-NS-Kürzungen in der LHE** durchgeführt. ➠ $T_N = \frac{1}{2}$ bzw $\frac{1}{T_N} = 2$ sowie $T_V + T_C = \frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{T_V+T_C} = 4$

$$G_0(s) = \underbrace{K_R \cdot \frac{sT_N+1}{sT_N} \cdot \frac{s(T_V+T_C)+1}{sT_C+1}}_{G_R(s)} \cdot \underbrace{\frac{5}{(s+2)(s+4)}}_{G_S(s)}$$

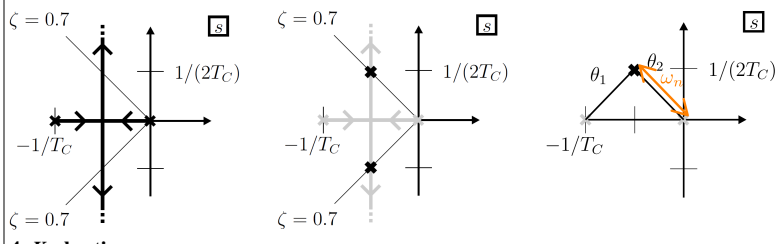
$$= K_R \cdot \frac{s+\frac{1}{T_N}}{\frac{s}{T_N}} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_V+T_C}}{\frac{sT_C}{T_V+T_C}+\frac{1}{T_V+T_C}} \cdot \frac{5}{(s+2)(s+4)} \quad \Rightarrow \frac{1}{T_N} = 2 \text{ und } \frac{1}{T_V+T_C} = 4$$

$$= \frac{5}{4} K_R \cdot \frac{1}{s(sT_C+1)} \quad \Rightarrow \text{Polynom monisch machen}$$

$$G_0(s) = \underbrace{\frac{5\cdot K_R}{4\cdot T_C}}_{K} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{T_C})}$$

Als freie Reglerparamter verbleiben $T_C$ und $K_R$. Mit $T_C$ wird ein Pol von $G_0(s)$ und damit der Verlauf der WOK definiert. Mit $K_R$ werden die Pole auf der WOK festgelegt.

**1. WOK skizzieren** **2. Pole platzieren** **3. $K$ und $\omega_n$ bestimmen**




**4. $K_R$ bestimmen**

$K = \theta_1 \cdot \theta_2 = \frac{1}{2T_C^2}$ bzw. $K_R = K \cdot \frac{4T_C}{5} = \frac{0.4}{T_C}$

## 13.3.1 Bemerkungen zur PID-Lösung

- Geschwindigkeit (Bandbreite) einstellbar mit Parameter $T_C$
- Verstärkung kann für 'gleichen Effekt' kleiner gewählt werden als bei P- und PI-Regler
- Pole / Verstärkung könnten auch so gewählt werden, dass es keine komplex-konjugierten Pole gibt
  - Die Dämpfung beträgt dann $\zeta = 1$ und es kommt zu keinem Überschwingern mehr!

➠ Der PIDT$_1$-Regler ist den anderen Reglern überlegen!

## 13.4 Fazit – Reglerauslegung mittels WOK

- Reine Integratoren verbessern die Genauigkeit auf Kosten der Dynamik
- Nullstellen in der rechten Halbebene wirken destabilisierend
- Festlegung der Reglerstruktur: Vom einfachsten zum kompliziertesten Regler
- P ➠ I ➠ PI ➠ DT$_1$ ➠ PDT$_1$ ➠ PIDT$_1$

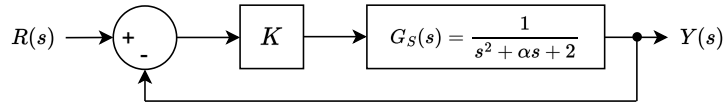
## 13.5 Einige 'gute' Ideen zum Reglerentwurf mittels WOK

- Dem Regler gemäss 'Typenüberlegung' **Pole bei Null** zufügen
- Streckenpole analysieren:
  - Instabile / schlecht gedämpfte Streckenpole mit Regler-NS 'wegziehen'
  - Langsame Streckenpole mit Regler-NS 'kompensieren'
    ➠ **ev. Summenzeitkonstante $T_\Sigma$** (siehe Abschnitt 13.2.1)
  - Schnelle Streckenpole 'in Ruhe lassen'
- Nichtminimalphasige Strecken-NS **nicht** kompensieren, sondern mit genügend kleiner Verstärkung $K$ arbeiten
- Um einen realisierbaren Regler zu erhalten:
  - **mindestens so viele Pole wie NS**
  - Regler-NS sparen ➠ Summenzeitkonstante
  - Reglerpole auf Strecken-NS legen (LHE)
  - Zusätzliche Reglerpole **links** legen:
    Je weiter links, desto kleiner ist der Einfluss auf bestehende WOK, desto grösser wird aber tendenziell die Verstäkung bei grossen $\omega$
- Häufig, aber nicht immer, führen obige Regeln zu einem PIDT$_1$-Regler
- Spezielle Strecken brauchen Spezielle Tricks (z.B. instabil & nichtminimalphasig)
- Pollage von $G_f$ ist nur ein Aspekt des Reglerentwurfs

## 13.6 Allgemeine Stabilitätsanalyse mit WOK (S. 109-110)

Bisher wurde immer eine bekannte Strecke betrachtet und die Reglerverstärung $K$ wurde als variabler Parameter betrachtet. Es können aber auch Regelkreise mit mehreren Parametern betrachtet werden. Dementsprechend ergibt sich ein anderes charakteristisches Polynom $N_f(s)$ für den geschlossenen Regelkreis und somit auch eine andere Pol- / NS-Konfiguration in der WOK.

### Beispiel: Regelkreis mit zwei Parametern $K$ und $\alpha$




$$\text{geschlossener Regelkreis:}\quad G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = K \cdot \frac{1}{s^2+\alpha s+2+K}$$

**Fall 1: $\alpha$ fix, $K$ variable**:
Dies entspricht dem bisher gezeigten Vorgehen, bei dem die Verstärkung $K$ untersucht wird, indem das charakteristische Polynom $N_f(s)$ des geschlossenen Regelkreises betrachtet wird. Für $\alpha = 3$ ergibt sich:

$$N_f(s) = \underbrace{s^2+3s+2}_{P_N(s)=N(s)} + \underbrace{K}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{1}_{P_Z(s)=Z(s)} = \underbrace{(s+1)(s+2)}_{\text{Pole}} + K \cdot \underbrace{1}_{\text{NS}}$$

➠ WOK zeichnen und gewünschtes $K$ finden

**Fall 2: $K$ fix, $\alpha$ variable**:
In diesem Fall wird das charakteristische Polynom $N_f(s)$ des geschlossenen Regelkreises anders 'gruppiert'. Somit entsteht eine ganz neue Situation! Für $K = 7$ ergibt sich:

$$N_f(s) = \underbrace{s^2+2+7}_{P_N(s)=N(s)} + \underbrace{\alpha}_{\text{Faktor}} \cdot \underbrace{s}_{P_Z(s)=Z(s)} = \underbrace{s^2+9}_{\text{Pole}} + \alpha \cdot \underbrace{s}_{\text{NS}}$$

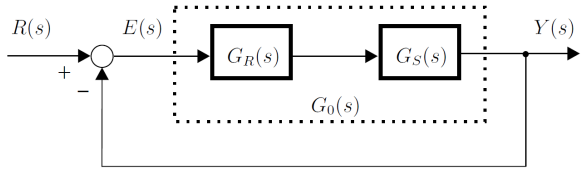
➠ WOK zeichnen und gewünschtes $\alpha$ finden

**Hinweis:** Die Methode zur **Wurzel-Bestimmung** funktioniert für **jedes Polynom $N_f(s)$**, wenn dieses in die verlangte Form gebracht werden kann (und auch nur dann)!

$$N_f(s) = P_N(s) + \text{Faktor} \cdot P_Z(s) = N(s) + K \cdot Z(s)$$

# 14 Reglerentwurf mit Bode-Diagramm / 'Loop-Shaping'

Ein Regler für SISO-Strecken kann auch mithilfe des Bode-Diagramms für den **offenen** Regelkreis $G_0(s)$ entworfen werden.




Falls der Frequenzgang $G_0(s)$ im Bode-Diagramm vorliegt, kann dieser durch den Regler $G_R(s)$ so ergänzt werden, dass der gesamte Frequenzgang von $G_0(s)$ eine gewünschte Form bekommt. Dieses Verfahren bezeichnet man als **'loop-shaping'**. Der resultierende Regler wird auch **'Kompensator'** genannt.

## 14.1 Optimaler offener Regelkreis $G_0$ (S. 111-112)

Zwischen den offenen Regelkreis $G_0(s)$ und dem geschlossenen Regelkreis $G_f(s)$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \quad \leftrightarrow \quad G_0(s) = \frac{G_f(s)}{1-G_f(s)}$$

Die theoretisch bestmögliche (aber nicht umsetzbare Wahl) ist $G_f(s) \equiv 1$. Ein realistischer Ansatz (aufgrund von Tiefpassverhalten) ist der Folgende:

$$G_f(s) = \frac{1}{1+sT_f} \quad \text{bzw.} \quad G_0(s) = \frac{1}{sT_f} \text{ mit Verstärkung } \frac{1}{T_f}$$

**Der offene Regelkreis $G_0(s)$ entspricht einem offenen Integrator, der geschlossene Regelkreis $G_f(s)$ einem PT$_1$-Glied.**
➠ Je grösser die Verstärkung, desto schneller der Regelkreis!

Für den geschlossenen Regelkreis $G_f(s)$ entspricht dies dem Idealfall, weil:

- Phasenreserve $\Phi_{RES} = 90\,°$
- Verstärkungsreserve $K_{RES} = \infty$
- Sensitivität: $S(s) = \frac{sT_f}{1+sT_f}$ ➠ Betrag $|S(j\omega)|$ kann bei tiefen Frequenzen beliebig klein gemacht werden
- Weder Sensitivität $S(s)$ noch komplementäre Sensitivität $T(s) = G_f(s)$ weisen Überhöhungen im Frequenzgang auf
  - Bode-Integral der Sensitivität (Abschnitt 11.3.1) gilt nicht, da $n - m = 1 - 0 < 2$
    ➠ Kein Wasserbetteffekt
- Die Bandbreite $\omega_B = \frac{1}{T_f}$ kann beliebig gross gemacht werden

## 14.2 Phasenreserve und Verstärkungsreserve (S. 112-114)

Häufig muss davon ausgegangen werden, dass $G_0(s)$ mit **Unsicherheiten** behaftet ist. Dann reicht für die Stabilitätsbetrachtung nicht nur, dass das Nyquist-Kriterium erfüllt ist. Darüber hinaus sollte die Ortskurve einen gewissen **'Sicherheits-Abstand'** zum kritischen Punkt $-1$ haben. Dazu werden die **Phasenreserve** und **Verstärkungsreserve** definiert.

**Verstärkungsreserve $K_{RES}$:**

- $K_{RES}$ ist ablesbar bei der **Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi$**
  - Frequenz, bei der die Phase $-180\,°$ beträgt: $\angle G_0(j\omega_\pi) = -\pi\,\text{rad}\,(= -180\,°)$
- $K_{RES}$ liefert direkt den Toleranzwert, falls **Modellunsicherheit** von $G_0(s)$ bei der **Verstärkung** liegt
  - Wenn statt des Nominalfrequenzgangs $G_0(j\omega)$ tatsächlich $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

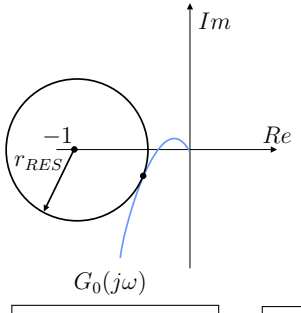
**Phasenreserve $\Phi_{RES}$:**

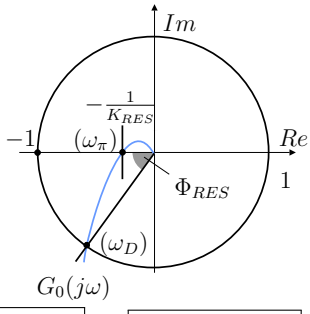
- $\Phi_{RES}$ ist ablesbar bei der **Durchtrittsfrequenz $\omega_D$**
  - Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist: $|G_0(j\omega_D)| = 1\,(= 0\,\text{dB})$
- $\Phi_{RES}$ liefert einen Toleranzwert, falls die **Modellunsicherheit** von $G_0(s)$ bei der **Totzeit** liegt
  - Wenn statt des Nominalfrequenzgangs $G_0(j\omega)$ tatsächlich $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist:

$$T_t = \frac{\Phi_{RES}}{\omega_D} \quad \text{wobei } [\Phi_{RES}] = \text{rad}$$

### 14.2.1 Nyquist-Diagramm



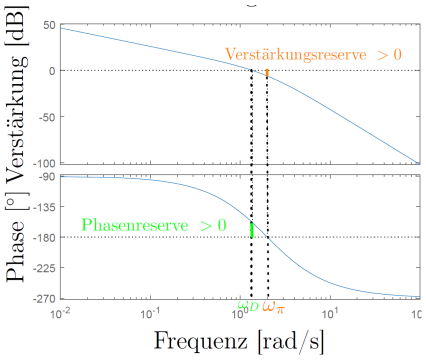




$$r_{RES} = \left|\frac{1}{G_0(s)-(-1)}\right| \qquad \Phi_{RES} = \arctan\left(\frac{\text{Re}\{G_0(j\omega_D)\}}{\text{Im}\{G_0(j\omega_D)\}}\right) \qquad \frac{1}{K_{RES}} = |G_0(j\omega_\pi)|$$

Ein System ist **stabil**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\omega_\pi > \omega_D$
- $0 > G_0(j\omega_\pi) > -1$
- $G_0(j\omega_D) = e^{-j\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi$

### 14.2.2 Bode-Diagramm




- Durchtrittsfrequenz $\omega_D$

$$K_{RES} = 0\,\text{dB} - K_{@180°}$$

- Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi$

$$\Phi_{RES} = \Phi_{@0dB} + 180\,°$$

**Achtung:** Das Vorzeichen von $\Phi_{RES}$ bzw. $\Phi_{RES}$ ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

**Beurteilung der Stabilität des Systems:**
Wenn das System die **Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt**, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- **Grenzstabilität**: Amplitudengang bei 0 dB **und** Phasengang bei $-180\,°$
- **Instabilität**: $K_{RES} < 0$ **und** $\Phi_{RES} < 0$
- **Stabilität**: $K_{RES} > 0$ **und** $\Phi_{RES} > 0$ bzw. $\omega_\pi > \omega_D$

## 14.3 Spezifikationen für dynamisches Verhalten (S. 115)

In Abschnitt 11.2.2 wurden bereits Spezifikationen für einen Regelkreis aufgestellt. Diese betonen allerdings den Zeitbereich, während die Spezifikationen im Frequenzbereich **nur für den Amplitudengang** (und etwas leichtfertig) formuliert wurden. Im Folgenden soll auch der **Phasengang** in die Spezifikatonen miteinbezogen werden.
Für den **offenen Regelkreis $G_0(s)$** gilt:

- Allgemeines Nyquist-Kriterium soll erfüllt sein ➠ Stabilität
- Phasenreserve $\Phi_{RES} = 40° \ldots 70°$ und Verstärkungsreserve $K_{RES} > 4 (\approx 12\,\text{dB})$
  ➠ Überhöhungen von $|S(s)|$ und $|T(s)|$ limitiert
- Hohe Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ ➠ hohe Bandbreite, 'schnell'
- Verstärkung $|G_0(j\omega)|$ bei tiefen Frequenzen $\omega < \omega_D$ genug gross
- Im Bereich um die Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ sollte $|G_0(j\omega)|$ idealerweise mit ca. 20 dB/Dek abfallen

➠ **Beim klassischen 'loop-shaping' betrachtet man primär $G_0(s)$**
➠ Weitere Erläuterungen siehe Skript S. 115

## 14.4 Loop-Shaping

Der offene Regelkreis $G_0(s)$ ist im Bode-Diagramm dargestellt. Die Kurve wird nun mit Zufügen von Polen und Nullstellen so verändert, bis sie 'gut' aussieht und den Spezifikationen entspricht.
Gängige Elemente für das 'loop-shaping' sind:

- Lead-Glied
- Lag-Glied
- Lead-Lag-Glied
- PIDT$_1$-Regler
- Notch-Filter

### 14.4.1 PIDT$_1$-Regler (S. 116-118)

PIDT$_1$-Regler kann als Sequenz von Entwurfsschritten verstanden werden, bei der man in den einzelnen Schritten versucht, $G_0(s)$ in bestimmten Frequenzbereichen gezielt zu beeinflussen.

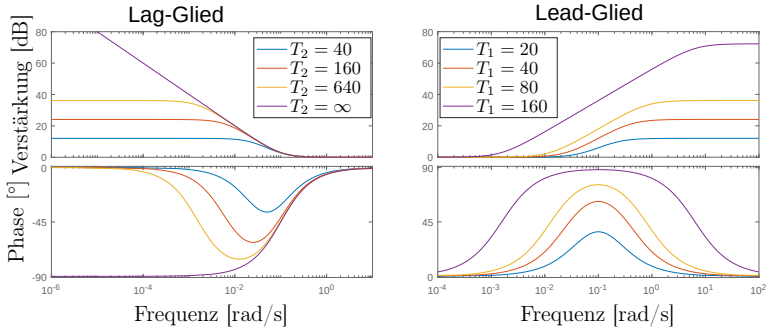
$$G_R(s) = \underbrace{K_R \cdot \frac{sT_N+1}{sT_N}}_{\text{PI-Regler}} \cdot \underbrace{\frac{s(T_V+T_C)+1}{sT_C+1}}_{\text{PDT}_1\text{-Regler}}$$

- **PI-Regler** (Spezialfall eines Lag-Reglers)
  + Amplitudengang bei tiefen Frequenzen anheben
  - Phase wird abgesenkt
- **PDT$_1$-Regler** (Lead-Regler)
  + Phase im Bereich der Durchtrittsfrequenz $\omega_D$ anheben
  - Amplitudengang wird ebenfalls angehoben

### 14.4.2 Lead-Lag-Glieder (S. 118-120)

Lead- wie auch Lag-Glieder haben die Form: $G(s) = K \cdot \frac{sT_1+1}{sT_2+1}$

Lead: $T_1 > T_2 > 0$
Lag: $T_2 > T_1 > 0$



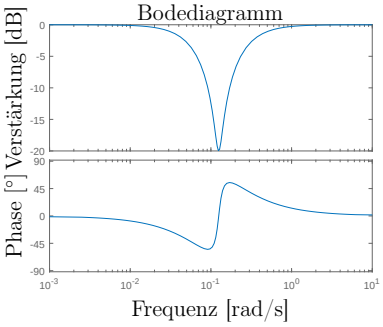

$$\text{'Anstieg der Verstärkung'} = \frac{\text{Verstärkung bei HF}}{\text{Verstärkung bei DC}} = \frac{T_1}{T_2}$$

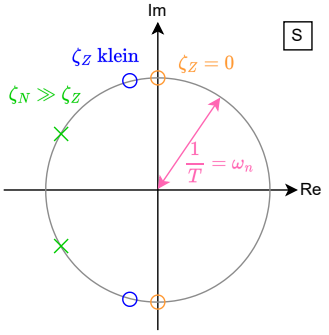
$$\text{Extremun der Phase bei } \omega_{ext} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \text{ mit Wert } \angle G(\omega_{ext}) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \frac{\pi}{2}\right)$$

### 14.4.3 Notch-Filter (S. 120-121)

**Pole nahe der Imaginärachse** werden oft mittels 'ungefährer' Pol-Nullstellen-Kürzung mittels Notch-Filter umgesetzt. Die **Nullstellen** werden in der Nähe der **problematischen Pole** platziert, dass die WOK-Äste von der Imaginärachse abgewandt sind.
Damit der Regler realisierbar ist, braucht es noch zwei Pole, welche 'genügend weit links' platziert werden.

$$G_N(s) = \frac{T^2 s^2 + 2\zeta_Z sT + 1}{T^2 s^2 + 2\zeta_N sT + 1} \quad \text{mit } \zeta_N \gg \zeta_Z > 0$$




## 14.5 Spezifikationen für die Bandbreite $\omega_B$ (S. 122)

Zwischen den Zielen 'schnelles Folgeverhalten' und 'sparsamer Umgang mit Stellenergie' muss ein vernünftiger **Kompromiss** gefunden werden. Ausserdem gibt es folgende **fundamentale Einschränkungen** für die Bandbreite $\omega_B$:

1. Strecke hat rellen Pol $p$ in RHE ⇒ instabil
   Will man $T(j\omega) \leq 2$ (6 dB) halten, muss man schnell genug regeln:
   $\omega_B > 2p$ bzw. $\omega_D > 2p$
2. Strecke hat reelle Nullstelle $z$ in RHE ⇒ Anschwingen in falsche Richtung
   Will man $\Phi_{RES}$ von ca. 35° erreichen, braucht es eine Limitierung: $\omega_B \approx \omega_D < \frac{z}{2}$
3. Strecke hat Totzeit $T_t$
   Will man $\Phi_{RES}$ von ca. 35° erreichen, braucht es eine Limitierung: $\omega_B \approx \omega_D < \frac{1}{T_t}$

⇒ Bei einer Kombination von 1. und 2. nützt eine Lockerung der Spezifikationen nichts
⇒ Die Strecke muss modifiziert werden!

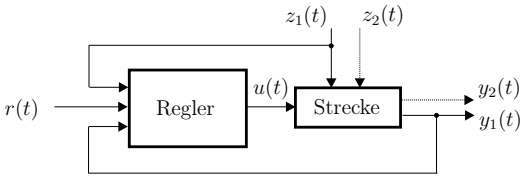
# 15 Optimierung von Reglern

Für die Optimierung eines Regel**kreises** können sowohl der Regler selbst, als auch die Regelstrecke optimiert werden. Hier wird allerdings nur auf die Optimierung des Reglers eingegangen.
⇒ Optimierung lohnt sich vor allem beim schwächsten Glied der Kette

## 15.1 Reglerstrukturen

Die gezeignte **allgemeine Reglerstruktur** ist für jeden Regelkreis gültig.

Signalpfade können skalare oder vektorielle Grössen sein!




Häufig werden Regler 'zentralisiert' entwickelt. Die Entwicklung kann jedoch beliebig komplex werden. Grundsätzlich erleichtert man sich also den Entwurf, wenn eine (Regelungs-)Aufgabe in **verschiedene Teilaufgaben unterteilt** wird. Gleichzeitig verhindert man damit tendenziell, dass der Gesamtentwurf optimal wird.

Folgende Reglerstrukturen eignen sich für die dezentrale Aufteilung der Regelungsaufgabe auf mehrere Blöcke. ⇒ Die Strukturen sind miteinander kombinierbar.

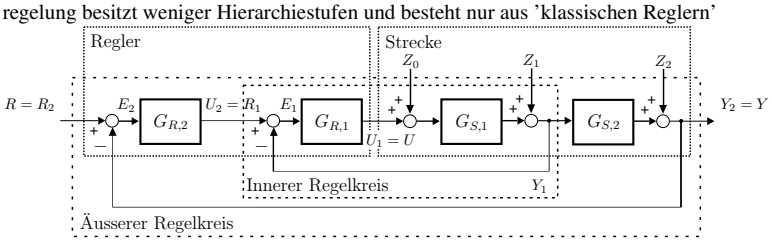
### 15.1.1 Hierarchische Regelung (S. 126-127)

Die Reglersturktur ist ähnlich einer Kaskadenregelung. (siehe Abschnitt 15.1.2)
Die einzelnen Hierarchiestufen des Regelkreises unterscheiden sich in folgenden Punkten:

- Tiefer liegende Regler: 'klassische Regler', die permanent gemäss einer Differenzial- oder Differenzengleichung arbeiten
- Höher liegende Schichten: Zustandautomaten und logische Grössen benutzt
- Obere Stufen können untere Stufen steuern / überwachen

### 15.1.2 Kaskadenregelung (S. 128-129)

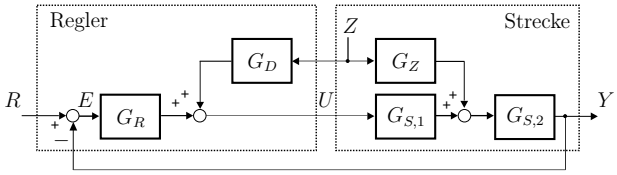
Die kaskadierte Struktur des Reglers beruht darauf, dass die Strecke einer Serieschaltung von Teilsystemen entspricht, deren Ausgänge gemessen werden können. Eine Kaskadenregelung besitzt weniger Hierarchiestufen und besteht nur aus 'klassischen Reglern'




- Reglerentwurf erfolgt von innen nach aussen
- Innere Regler: schnell
- Äussere Regler: genau
- Entkopplung (mittels Bandbreite) zwischen inneren und äusseren Regelkreisen
  - Regler stören sich somit nicht gegenseitig
- Kosten für zusätzlichen Sensor und dessen Integration nachteilig

### 15.1.3 Störgrössenaufschaltung (S. 130-131)

Grundlage ist ein Standardregelkreis mit $G_D = 0$. Die Störgrösse $Z$ wirkt sich auf die UTF $\frac{G_{S,2}\,G_Z}{1+G_{S,2}\,G_{S,1}\,G_Z}$ und den Ausgang $Y$ aus.



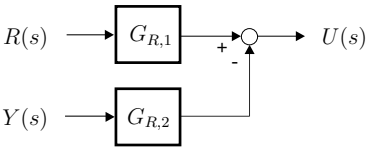

Falls $G_Z(s) + G_{S,1(s)} \cdot G_D(s) = 0$ erfüllt ist, dann verschwindet die Wirkung der Störgrösse.
⇒ **Vor der Strecke muss Störung 'herauskompensiert' sein!**

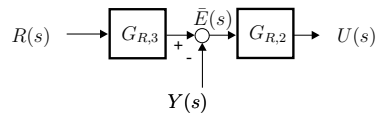
$$\text{Idealerweise kompensiert man also:} \quad G_D(s) = -\frac{G_Z(s)}{G_{S,1}}$$

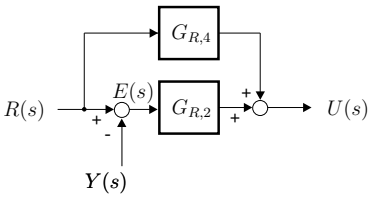
Dabei ist darauf zu achten, dass $G_{S,1(s)}$ keine Pole/NS in der RHE hat und $G_D(s)$ realisierbar ist.

### 15.1.4 2 degrees of freedom (2DOF) (S. 132-133)

Hat man zwei Signalpfade mit **unterschiedlichen UTFs**, $G_{R,1}(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$ und $G_{R,2}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$, so ergibt sich ein Regler mit **zwei Freiheitsgraden**.




Alle Darstellungen sind äquivalent, falls

$$G_{R,3}(s) = G_{R,2}^{-1}(s) \cdot G_{R,1}(s)$$
$$G_{R,4}(s) = G_{R,1}(s) - G_{R,2}(s)$$

**Hinweis:** Für $G_{R,3}(s) = 1$ und $G_{R,4}(s) = 0$ werden die Regler zu 1DOF-Reglern mit expliziter Bildung des Fehlers $E(s)$.

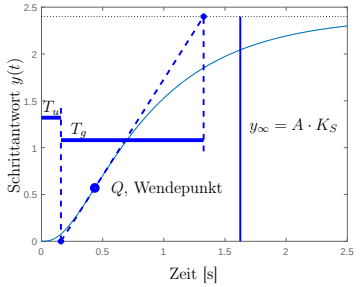
## 15.2 Reglereinstellung

Ist die Struktur eines Reglers gegeben, so geht es 'nur' noch darum, gute Werte für seine Parameter zu finden. Je mehr Parameter ein Regler hat, umso mächtiger ist er von seinen Möglichkeiten her. Mit der Anzahl der Parameter steigt aber auch der Aufwand, diese optimal, oder zumindest gut einzustellen.

## 15.3 Empirische Reglereinstellung nach Ziegler-Nichols (S. 134-135)

**Idee:** Eine Stecke wird mit einem Eingangssignal $u(t) = A \cdot \varepsilon(t)$ angeregt und ihre Schrittantwort $y(t)$ wird gemessen. An diese gemessene Schrittantwort $y(t)$ wird ein **PT$_1$-System mit Totzeit** 'gefittet'. Die daraus entstehenden Parameter werden für die Regler-Dimensionierung verwendet.

$$\text{PT}_1\text{-System mit Totzeit} \quad G_0(s) = \frac{K_s}{s \cdot T_g + 1} e^{-sT_u}$$




**Vorgehen PT$_1$ fitten / Parameter bestimmen**

- Tangente an Wendepunkt $Q$ einzeichnen
- Parameter $T_u$, $T_g$ und $K_s$ gemäss Grafik bestimmen
  - $K_s$: Verstärkung
  - $T_u$: Verzugszeit
  - $T_g$: Ausgleichszeit
- Konstanten für Tabellen bestimmen
  - $\mu = \frac{T_g}{T_u}$
  - $q = \frac{T_g}{T_u \cdot K_s} = \mu \cdot \frac{1}{K_s}$

**ACHTUNG: Struktur der Regler beachten!** Die Tabelle liefert Parameter für Regler in **serieller / additiver Form**.

$$G_{PID}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N} + s \cdot T_V\right) \qquad G_{PI}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N}\right) \qquad G_P(s) = K_R$$

| Regler | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P-Regler | $1.0 \cdot q$ | – | – |
| PI-Regler | $0.9 \cdot q$ | $3.33 \cdot T_u$ | – |
| PID-Regler | $1.2 \cdot q$ | $2.0 \cdot T_u$ | $0.5 \cdot T_u$ |

## 15.4 Optimierung mithilfe eines Gütemasses (S. 136-142)

Im Folgenden ist das Vorgehen zur Regler-Einstellung durch Optimierung beschrieben.

1. Reglerstruktur wählen
   ➔ Regler hat Parameter $k_1, \ldots, k_n$, welche optimiert werden sollen
2. **Geschlossenen** Regelkreis (inkl. Strecke) aufbauen (real oder **Simulation**)
3. Eingangssignale definieren (Führungsgrösse $r(t)$, Störgrösse $z(t)$), für welche Regelkreis optimiert werden soll (z.B. Sprung, Rampe)
4. Gütemass $J$ definieren ➔ repräsentative, skalare Zahl

$$J(k_1, \ldots, k_n) = \int_0^{T_{\text{end}}} f(e(t, k_1, \ldots, k_M))\, \mathrm{d}t$$

   ➔ Häufig wird $f(e) = |e|$ oder $\boldsymbol{f(e) = e^2}$ gewählt
5. Für verschiedene Parametersätze $k_1, \ldots, k_n$ Signale auf Regelkreis geben
6. Für jeden Parametersatz das Gütemass $J$ berechnen und beurteilen
   ➔ Parameter $k_1, \ldots, k_n$ sind **optimal**, wenn Gütemass $J$ **minimal** ist

**Achtung:** $T_{\text{end}}$ sollte minestens so gross sein, dass der Regelkreis bei vernünftiger Reglereinstellung als eingeschwungen gilt (steady-state).
Für analytische Berechnungen von $J$ wird $T_{\text{end}} = \infty$ gesetzt.

### 15.4.1 Quadratisches Gütemass aus $E(s)$ berechnen (S. 139)

Für $\boldsymbol{f(e) = e^2}$ kann das Fehlersignal $E(s)$ (im Frequenzbereich) gemäss dem Theorem von **Parseval** ausgewertet werden. Daraus folgt direkt das Gütemass $J_n$.

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot R(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

➔ **Nennerpolynom von $E(s)$ muss stabil sein!**

Für die Nennergrade $n = 1, \ldots, 4$ berechnet sich das Gütemass $J_n$ als:

$$J_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1} \qquad J_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2} \qquad J_3 = \frac{b_2^2a_0a_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_0^2a_2a_3}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}$$

$$J_4 = \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + (b_2^2 - 2b_1b_3)a_0a_1a_4 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3a_4 + b_0^2(a_2a_3a_4 - a_1a_4^2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)}$$

**Gütemass $J_n$ minimieren**:
Das Gütemass in Abhängigkeit eines Parameters (z.B. $K_R$) kann minimiert werden, indem die partielle Ableitung von $J_n$ null gesetzt wird.

$$\frac{\partial J}{\partial K_R} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{➔ Umformen nach } K_R$$

➔ Nicht alle Lösungen für den Parameter (z.B. $K_R$) sind sinnvoll!
➔ Negative $K_R$ 'aussortieren', da positives Integral ($e^2$) immer positive Lösung hat

## 15.5 Vorgabe der Führungsübertragungsfunktion (S. 143-146)

Oft hat man eine gewisse Vorstellung davon, wie zu einer Strecke $G_S(s)$ die optimale Führungs-UTF des geschlossenen Regelkreises $G_f(s)$ aussehen sollte. Bei bekannter Regelstrecke $G_S(s)$ kann die benötigte UTF des Reglers $G_R(s)$ mittels folgender Zusammenhänge ermittelt werden:

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad \leftrightarrow \quad G_0(s) = \frac{G_f(s)}{1 - G_f(s)} \quad \text{und } G_R(s) = \frac{G_0(s)}{G_S(s)}$$

Daraus folgt für die UTF $G_R(s)$ des Reglers:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{Z_f(s)}{N_f(s) - Z_f(s)} \cdot \frac{N_S(s)}{Z_S(s)}} \qquad \text{mit } G_S(s) = \frac{Z_S(s)}{N_S(s)} \text{ und } G_f(s) = \frac{Z_f(s)}{N_f(s)}$$

**Bemerkungen**:
- Pol-/NS-Kürzungen in der RHE **innerhalb von $G_R(s)$ sind erlaubt**, da der Regler während der Berechnung 'nur auf dem Papier' existiert. Nur das gefundene Endresultat muss stabil / realisierbar sein.
  - 'Erlaubte' Kürzungen im Regler werden begünstig, indem nicht-minimalphasige Nullstellen (in der RHE) in die Führungs-UTF $G_f(s)$ 'integriert' werden
    ➔ DC-Verstärkung auf 1 korrigieren
  - Pol-/NS-Kürzungen der **Strecke** in der **RHE sind weiterhin verboten!**
- Die Strecke darf keine Totzeit (Faktor $e^{sT_t}$) haben
- Der relative Grad (Polüberschuss) der vorgegebenen UTF $G_f(s)$ muss mindestens so gross sein wie derjenie der Strecke $G_S(s)$
  - Regler ist sonst nicht realisierbar

# 16 Implementation von Reglern (S. 147)

Die Implementation eines Reglers mit allgemeiner UTF $G_R(s)$ besteht aus zwei Schritten.

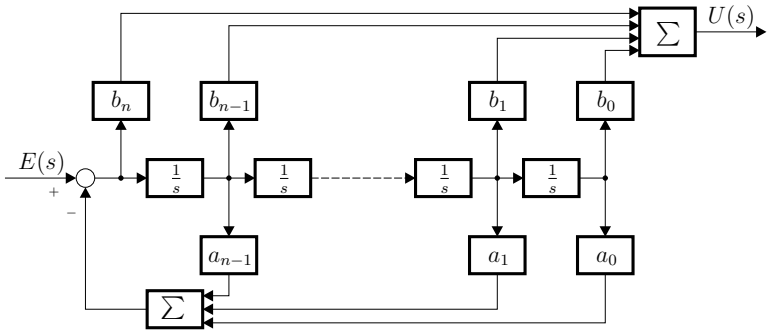
$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (m \le n)$$

1. UTF in Blockdiagramm umsetzen, welches nur aus Integratoren, Verstärkungen und Summatoren besteht
2. Blockdiagramm mittels Verstärkerschaltungen in Analogtechnik umsetzen (siehe Abschnitt 21)

Es wird immer eine **minimale** Implementierung angestrebt (minimale Anzahl Integratoren). Wenn der gegebene Regler $G_R(s)$ vollständig gekürzt ist, dann hat eine minimale Implementierung $n$ Integratoren.

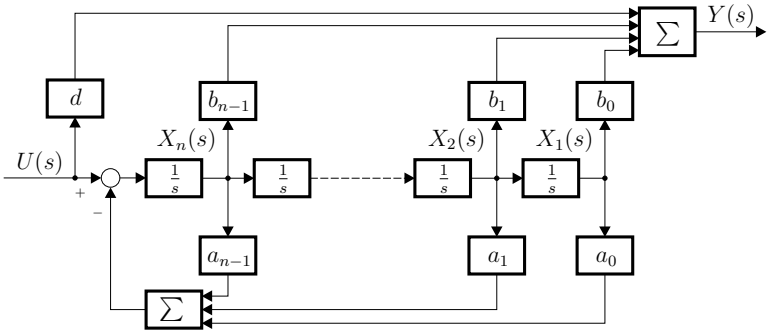
Folgende Abschnitte zeigen mögliche Implementationen (Blockdiagramme) für die Umsetzung eines Reglers.

## 16.1 Direkte Form

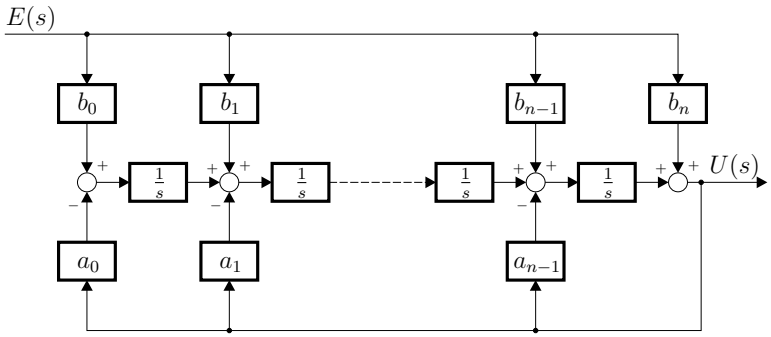



- Direkte Form ist eng verwandt mit Regelungsnormalform
  - Falls $b_n = 0$ (bzw. $m < n$) stimmen die Formen überein
  - Falls $m = n$ (direkte Kopplung zwischen Ein- und Ausgang) sind Formen verschieden

## 16.2 Regelungsnormalform




## 16.3 Transponierte direkte Form




- Falls $b_0 = 0$ ist (bzw. $m < n$) stimmt diese Form mit der Beobachtungsnormalform überein
  - Die Beobachtungsnormalform wird hier nicht weiter betrachtet

# II Anhang

## 17 Mathemathik-Hilfen

### 17.1 Trigonometie

| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha°$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| $\sin(\alpha)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan(\alpha)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\cot(\alpha)$ | $\pm\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ |

### 17.2 Dezibel dB

$$|K|_{\text{dB}} = 20\,\text{dB}\cdot\log_{10}|K| \quad\Leftrightarrow\quad |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{\text{dB}}}{20\,\text{dB}}\right)}$$

**Hinweis:** Die Betragsstrichte nur Notation! $|K|$ kann sehr wohl negativ sein!

#### 17.2.1 Rechenregeln

- Multiplikation ⇒ Addition
$$|K_1\cdot K_2|_{\text{dB}} = |K_1|_{\text{dB}} + |K_2|_{\text{dB}}$$
- Division ⇒ Subtraktion
$$\left|\frac{K_1}{K_2}\right|_{\text{dB}} = |K_1|_{\text{dB}} - |K_2|_{\text{dB}}$$
- Kehrwert ⇒ Negatives Vorzeichen
$$\left|\frac{1}{K_1}\right|_{\text{dB}} = |1|_{\text{dB}} - |K_1|_{\text{dB}} = -|K_1|_{\text{dB}}$$

#### 17.2.2 dB–Umrechnungstabelle (S. 133)

| Faktor [1] | Dezibel dB |
|---|---|
| 100 | 40 |
| 10 | 20 |
| 1 | 0 |
| 0.1 | −20 |
| 0.01 | −40 |

| Faktor [1] | Dezibel dB |
|---|---|
| 2 | 6 |
| $\sqrt{2}$ | 3 |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | −3 |
| $\frac{1}{2}$ | −6 |

### 17.3 z-Transformation

Die z-Transformation wird verwendet, um **diskrete** Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

| Zeitbereich | Frequenzbereich |
|---|---|
| $u(k)$ | $U(z)$ |
| $u(k-1)$ | $z^{-1}\cdot U(z) = \frac{1}{z}\cdot U(z)$ |
| $u(k+1)$ | $z\cdot U(z)$ |

#### 17.3.1 z-Transformation mit Matlab

```
s = tf('s');
G_R = K_R * (1 + s * T_N) / (s * T_N);  % UTF Regler
sysd = c2d(G_R, T_S, 'tustin')          % T_S: sampling time
```

### 17.4 Spezielle Ansätze PBZ

$$f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1{,}5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

## 18 Statische Grundglieder (ohne Gedächtnis)

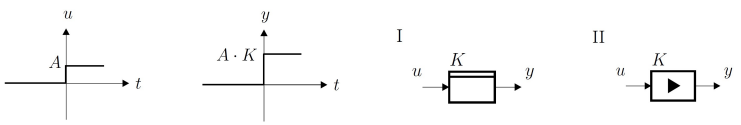
Der Ausgang des Systems ist **nur** vom aktuellen Eingang abhängig

$$y(t) = f(u(t))$$

**Hinweis:** $u(t)$ entspricht meist $A\cdot\varepsilon(t)$ (skalierter Einheitssprung)

### 18.1 P-Glied (Proportional)

$$y(t) = K\cdot u(t)$$




## 19 Dynamische Grundglieder (mit Gedächtnis)

Der Ausgang des Systems ist vom aktuellen **und** von vergangenen Eingängen abhängig. Vergangene Eingänge werden im System in einem Speicher, einem Zustand $x(t)$ abgelegt.

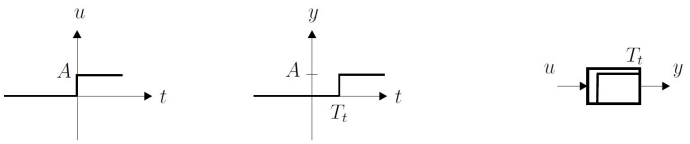
$$y(t) = f(u(t),\, x(t))$$

#### 19.0.1 Prozesse mit / ohne Ausgleich

ohne Ausgleich: Sprungantwort wächst grenzenlos an
mit Ausgleich: Sprungantwort strebt gegen endlichen Wert
⇒ **Gegenkopplung** am Ausgang

### 19.1 Totzeit-Glied

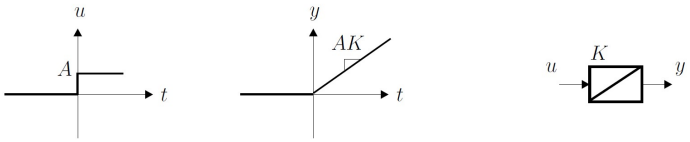
$$y(t) = u(t - T_t)$$




### 19.2 I-Glied (Integrierer)

DGL: $\dot{y}(t) = K\cdot u(t)$

$$y = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = K\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y(0)$$

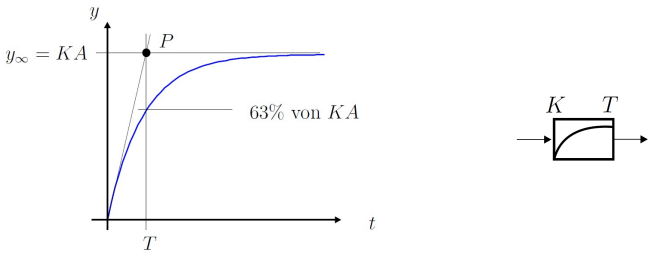



### 19.3 PT$_1$-Glied

Ein Energiespeicher ⇒ System schwingt nicht

DGL: $T\,\dot{y}(t) + y(t) = K\cdot u(t)$

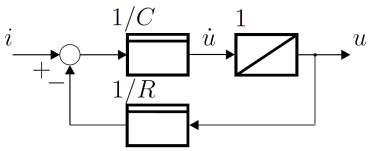
$$y(t) = K\,A + (y_0 - K\,A)\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$




#### 19.3.1 Modellierung einer PT$_1$ Regelstrecke

- Ausmessen der Sprungantwort $u(t) = A\cdot\varepsilon(t)$
  ⇒ Die Sprungantwort entspricht dem Diagramm
- Parameter $K$ berechnen: $K = \frac{y_\infty}{A}$
- Parameter $T$ bestimmen: Tangente am Anfang durch Punkt $P$
  oder: Zeit bis $y(T) = 0.63\cdot K\,A$ erreicht ist ⇒ $T$ ablesen

#### Beispiel: PT$_1$-Glied als Blockschaltbild




Allg: $T\,\dot{y}(t) + y(t) = K\cdot u(t)$

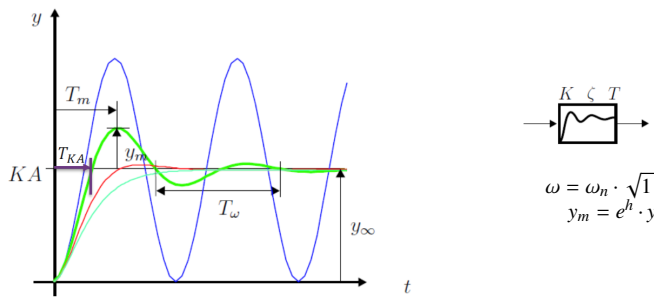
Bsp: $RC\,\dot{u}(t) + u(t) = R\cdot i(t)$

### 19.4 PT$_2$-Glied

Zwei Energiespeicher ⇒ **System kann schwingen**

DGL: $T^2\cdot\ddot{y} + 2\,\zeta\,T\cdot\dot{y} + y = K\cdot u$

$$y(t) = K\,A\left[1 + e^{\sigma t}\left(-\cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right]$$




$$\omega = \omega_n\cdot\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$y_m = e^h\cdot y_\infty$$

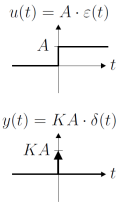
$$K = \frac{y_\infty}{A} \qquad h = \ln\left(\frac{y_m}{y_\infty}\right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{\pi}{T_m}$$
$$\sigma = \frac{h\omega}{\pi} = -\omega_n\cdot\zeta \qquad \omega_n = \sqrt{\omega^2+\sigma^2} = -\frac{\sigma}{\zeta} \qquad \zeta = -\frac{h}{\sqrt{h^2+\pi^2}}$$
$$T = \frac{1}{\omega_n} \qquad T_{KA} = T_M - \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \qquad y(T_{KA}) = K\,A$$

⇒ $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entspricht 5 % Überschwingen!

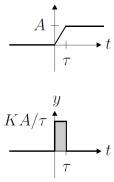
## 19.5 D-Glied (Idealer Differenzierer)

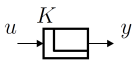
$$y(t) = K \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = K \cdot \dot{u}(t)$$

**ideal**




**real**

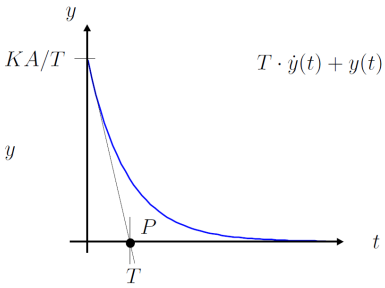


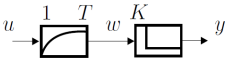

## 19.6 DT$_1$-Glied (Realisierbarer Differenzierer)

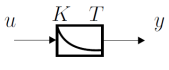
$$w(t) = A \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$y(t) = \frac{K \cdot A}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

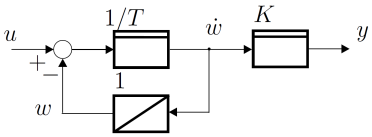


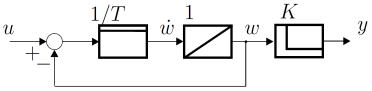

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot \dot{u}(t) \qquad (15)$$




### Beispiel: Mögliche Realisierungen von DT$_1$-Gliedern




## 19.7 Lead-Glied / Lag-Glied / Lead-Lag-Glied

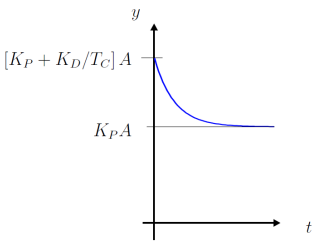
Lead-/ Lag-Glieder sind zwei Varianten von PDT$_1$-Gliedern.

Lead: $K_P$ und $K_D$ haben **gleiches** Vorzeichen

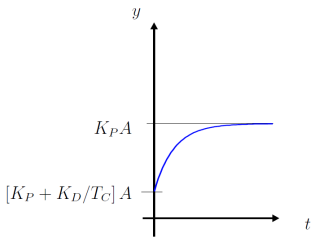
Lag: $K_P$ und $K_D$ haben **unterschiedliches** Vorzeichen

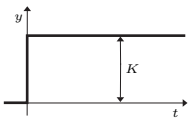
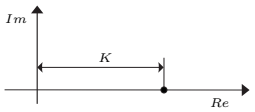
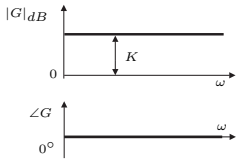
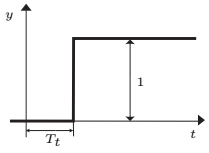
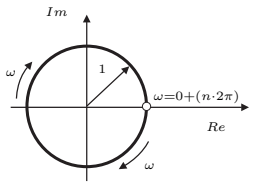
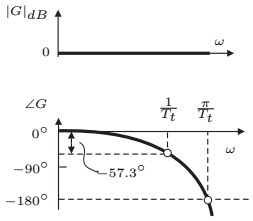
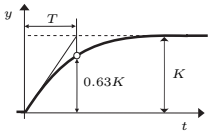
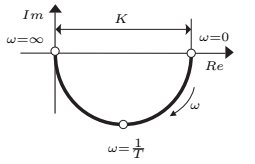
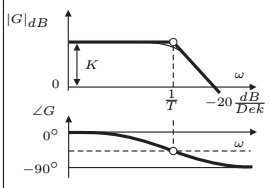
Lead- und Lag-Glieder können auch als Parallelschaltungen eines P- und eines PT$_1$-Glieds aufgefasst werden. Das Lead-Lag-Glied ist eine Serieschaltung aus Lead- und Lag-Glied.

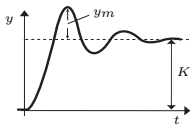
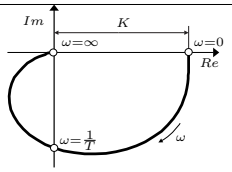
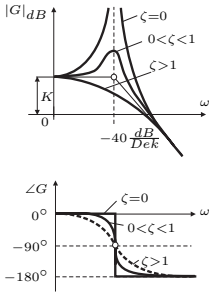
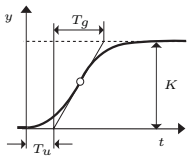
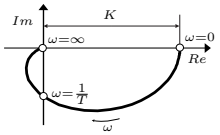
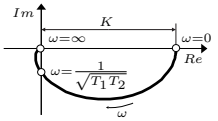
**Lead-Glied**

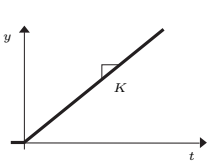
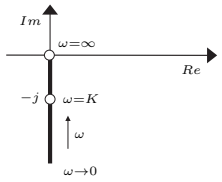
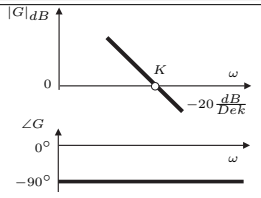
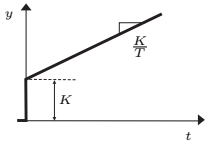
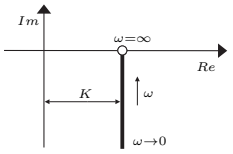
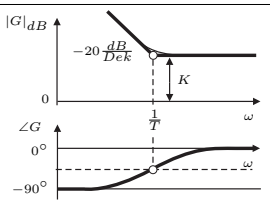
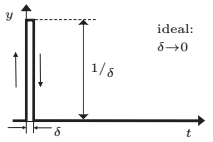
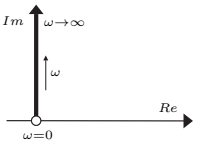
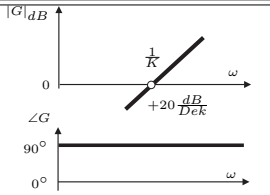
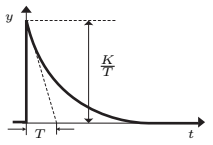
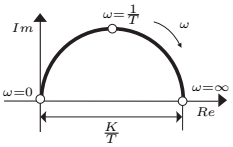
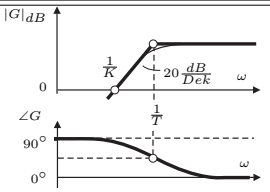


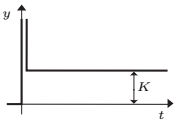
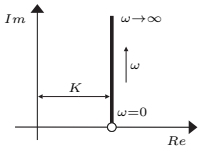
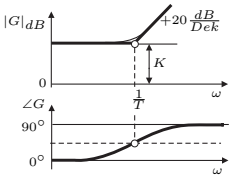
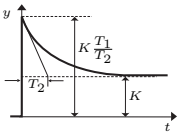
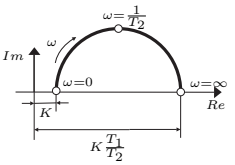
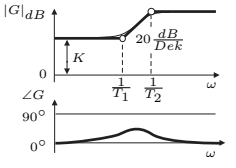
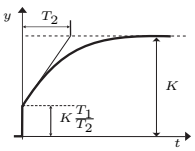
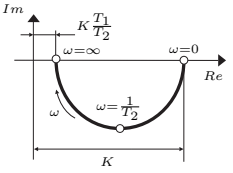
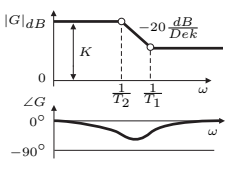

**Lag-Glied**

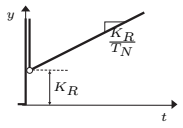
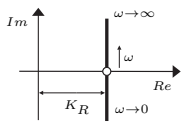
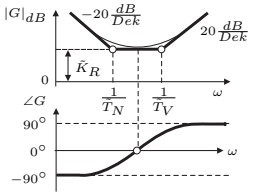
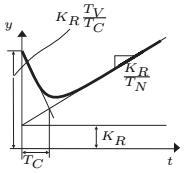
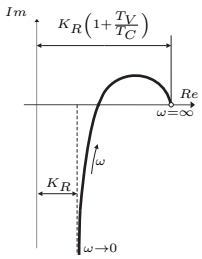
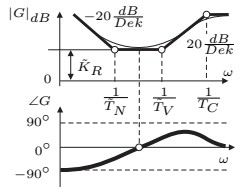


| Typ | Differential-gleichung | Frequenzgang $G(j\omega)$ | Schrittantwort $u(t)=\varepsilon(t)$ | Nyquistdiagramm (Ortskurve) | Bodediagramm (dB $\hat{=}$ 20·log$_{10}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $y(t)=Ku(t)$ | $K$ |  |  |  |
| $T_t$ | $y(t)=u(t-T_t)$ | $e^{-j\omega T_t}$ |  |  |  |
| $PT_1$ | $T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{j\omega T+1}$ |  |  |  |

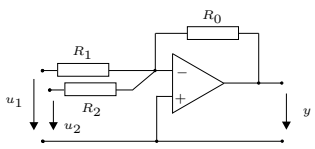
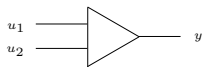
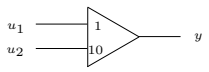
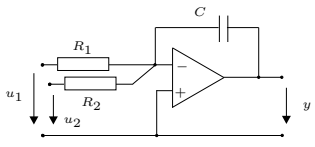
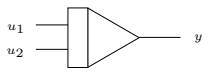
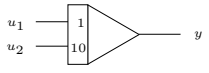
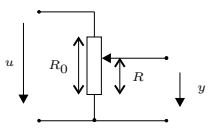
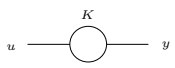
| Typ | Differentialgleichung | Frequenzgang $G(j\omega)$ | Schrittantwort $u(t)=\varepsilon(t)$ | Nyquistdiagramm (Ortskurve) | Bodediagramm (dB $\hat{=}$ 20·log$_{10}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| $PT_2$ | allgemein:<br>$T^2\ddot{y}(t)+2\zeta T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$ | $\frac{K}{(j\omega)^2T^2+2j\omega\zeta T+1}$ | | | |
| | $0<\zeta<1$<br>unterkritisch gedämpft, periodisch | $\frac{K}{(j\omega)^2T^2+2j\omega\zeta T+1}$<br>(nicht reell faktorisierbar) |  |  |  |
| | $\zeta=1$<br>kritisch gedämpft, aperiodisch<br>($\hat{=}$ zwei identische $PT_1$-Glieder in Serie) | $\frac{K}{(j\omega T+1)^2}$ |  |  | |
| | $\zeta>1$<br>überkritisch gedämpft, aperiodisch<br>($\hat{=}$ zwei $PT_1$-Glieder in Serie) | $\frac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)}$<br>$T_{1,2}=T(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})$<br>$T=\sqrt{T_1T_2}$<br>$\zeta=\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}$ | Ersatzmodell:<br>$\frac{K}{1+j\omega T_g}\cdot e^{-j\omega T_u}$ |  | |

| Typ | Differentialgleichung | Frequenzgang $G(j\omega)$ | Schrittantwort $u(t)=\varepsilon(t)$ | Nyquistdiagramm (Ortskurve) | Bodediagramm (dB $\hat{=}$ 20·log$_{10}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $y(t)=K\int_0^t u(\tau)d\tau$<br>$\dot{y}=Ku(t)$ | $\frac{K}{j\omega}$ |  |  |  |
| PI | $y(t)=$<br>$K[u(t)+\frac{1}{T}\int_0^t u(\tau)d\tau]$ | $K\left(1+\frac{1}{j\omega T}\right)$<br>bzw.<br>$K\frac{1+j\omega T}{j\omega T}$ |  |  |  |
| D | $y(t)=K\dot{u}(t)$ | $j\omega K$ |  |  |  |
| DT$_1$ | $T\dot{y}(t)+y(t)=K\dot{u}(t)$ | $\frac{j\omega K}{1+j\omega T}$ |  |  |  |

| Typ | Differential-gleichung | Frequenzgang $G(j\omega)$ | Schrittantwort $u(t)=\varepsilon(t)$ | Nyquistdiagramm (Ortskurve) | Bodediagramm (dB $\hat{=}$ 20·log$_{10}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| PD | $y(t)=$<br>$K[u(t)+T\dot{u}(t)]$ | $K(1+j\omega\ T)$ |  |  |  |
| PDT$_1$<br>(Lead-Glied)<br>mit<br>$T_1>T_2$ | $T_2\dot{y}(t)+y(t)$<br>$=K[u(t)+T_1\dot{u}(t)]$ | $K\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2}$ |  |  |  |
| PPT$_1$<br>(Lag-Glied)<br>mit<br>$T_1<T_2$ | $T_2\dot{y}(t)+y(t)=$<br>$K[u(t)+T_1\dot{u}(t)]$ | $K\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2}$ |  |  |  |

| Typ | Differential-gleichung | Frequenzgang $G(j\omega)$ | Schrittantwort $u(t)=\varepsilon(t)$ | Nyquistdiagramm (Ortskurve) | Bodediagramm (dB $\hat{=}$ 20·log$_{10}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| PID | $y(t)=K_R\big[u(t)+\frac{1}{T_N}\int_0^t u(\tau)d\tau+T_V\dot{u}(t)\big]$ | Additive Form: $K_R\Big(1+\frac{1}{j\omega T_N}+j\omega T_V\Big)$<br>Multiplikative Form: $\tilde{K}_R\frac{(1+j\omega\tilde{T}_N)(1+j\omega\tilde{T}_V)}{j\omega\tilde{T}_N}$ | Parameter zu additiver Form  | Parameter zu additiver Form  | Parameter zu multiplikativer Form  |
| PIDT$_1$ | Kann aus dem Frequenzgang bestimmt werden: mit $K_R=\tilde{K}_R\left(1+\frac{\tilde{T}_V}{\tilde{T}_N}\right)$ $T_N=\tilde{T}_N+\tilde{T}_V$ $T_V=\frac{\tilde{T}_N\tilde{T}_V}{\tilde{T}_N+\tilde{T}_V}$ | Additive Form: $K_R\Big(1+\frac{1}{j\omega T_N}+\frac{j\omega T_V}{1+j\omega T_C}\Big)$<br>Multiplikative Form: $\tilde{K}_R\frac{(1+j\omega\tilde{T}_N)(1+j\omega[T_C+\tilde{T}_V])}{j\omega\tilde{T}_N(1+j\omega T_C)}$ | Parameter zu additiver Form  | Parameter zu additiver Form  | Parameter zu multiplikativer Form  |

## 21 Analogrechner

| Schaltung | Komponenten | I/O-Gleichung | Symbol Analogrechner |
|---|---|---|---|
|  Summator mit Vorzeichenwechsel | $R_0=R_1=R_2=1$ [MΩ]<br>$K=\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_0}{R_2}=1$ | $y(t)=-K[u_1(t)+u_2(t)]$<br>$=-u_1(t)-u_2(t)$ |  |
| | $R_0=R_1=1$ [MΩ]<br>$R_2=R_1/10$<br>$K_1=\frac{R_0}{R_1}=1\quad K_2=\frac{R_0}{R_2}=10$ | $y(t)=-K_1u_1(t)-K_2u_2(t)$<br>$=-u_1(t)-10\cdot u_2(t)$ |  |
|  Integrator mit Vorzeichenwechsel | $C=1$ [μF]<br>$R_1=R_2=1$ [MΩ]<br>$K=\frac{1}{R_1C}=\frac{1}{R_2C}=1$ [s$^{-1}$] | $\frac{dy(t)}{dt}=-K[u_1(t)+u_2(t)]$<br>$=-u_1(t)-u_2(t)$ |  |
| | $C=1$ [μF]<br>$R_1=1$ [MΩ] $\quad R_2=R_1/10$<br>$K_1=\frac{1}{R_1C}=1$ [s$^{-1}$] $\quad K_2=10$ [s$^{-1}$] | $\frac{dy(t)}{dt}=-K_1u_1(t)-K_2u_2(t)$<br>$=-u_1(t)-10\cdot u_2(t)$ |  |
|  Spannungsteiler (passiv) | $R_0=1$ [MΩ]<br>$K=\frac{R}{R_0}\in[0\ldots1]$ | $y=K\cdot u(t)$ |  |