

Physik 3 Schwingungen

Drehbewegungen	Linear	Rotation
	$x = \text{Weg}$	$\varphi = \text{Weg}$
	$v = x'$	$\omega = \varphi'$
	$a = v' = x''$	$\alpha = \omega' = \varphi''$
$x = \text{Weg [m]}$		
$v = \text{Geschwindigkeit [m/s]}$		
$a = \text{Beschleunigung [m/s}^2\text{]}$		
$\alpha = \text{Winkelbeschleunigung [rad/s}^2\text{]}$		
$\varphi = \text{Weg (Winkel) [rad]}$		
$\omega = \text{Geschwindigkeit [rad/s]}$		
$\alpha = \text{Beschleunigung [rad/s}^2\text{]}$		
$J = \text{Massenträgheitsmoment [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$		
$m = \text{Masse [kg]}$		
$M = \text{Moment [Nm]}$		
$r = \text{Radius [m]}$		
$F = \text{Kraft [N]}$		

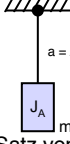
Harmonische Schwingungen

$T = \frac{2\pi}{\omega}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = 2\pi \cdot f$
Differentialgleichung (s)		
$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$		
Differentialgleichung (v)	Differentialgleichung (a)	
$y' = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$y'' = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	
Wenn max. gesucht: $\sin(\omega t + \varphi) = 1$		
$T = \text{Schwings- Periodendauer [s]}$		
$\omega = \text{Kreisfrequenz [1/s]}$		
$f = \text{Frequenz [Hz]}$		
$A = \text{Amplitude [m]}$		
$s_0 = \text{Ausschlag [m]}$		
$v = \text{Geschwindigkeit [m/s]}$		
$\varphi = \text{Phasenverschiebung [rad]}$		

Mathematisches Pendel (Schwependel)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	
$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$	Differentialgleichung	
$J = m \cdot l^2$	$l\varphi'' = -g \cdot \sin(\varphi)$	
	wenn φ klein, dann $\sin(\varphi) = \varphi$	

Physikalisches Pendel (Schwependel)

$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mga}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{g}}$	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_A}} = \sqrt{\frac{mga}{J_s + ma^2}} = \sqrt{\frac{g}{l_A}}$	Satz von Steiner	
$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{2} \sqrt{\frac{m}{J_s}}}$	$J_A = J_s + m \cdot a^2$	
$l_A = \frac{J_A}{m \cdot a} = \frac{J_s + ma^2}{ma} = \frac{J_s}{ma} + a = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2}$		

Differentialgleichung		
$J_A \varphi'' = -mgl \varphi$	wenn φ klein, dann $\sin(\varphi) = \varphi$ (immer wenn $\sin(\varphi)$ vorkommt)	
Bei mehreren Massen:	Abstand S, S'	
$J_A = J_{A1} + J_{A2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{(m_1 a_1 + m_2 a_2) \cdot g}}$	$a = \frac{m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2}{m_1 + m_2}$
$T = \text{Schwingsdauer [s]}$		
$\omega_0 = \text{Kreisfrequenz [1/s]}$		
$\omega_{\max} = \text{Maximale Kreisfrequenz [1/s]}$		
$J_A = \text{Massenträgheitsmoment [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$		
$J_s = \text{Massenträgheitsmoment [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$		
$c = \text{Federkonstante [N/m]}$		
$l = \text{Länge [m]}$		
$l_A = \text{reduzierte Pendellänge [m]}$		
$a = \text{Länge vom Schwerpunkt zum Drehzentrum [m]}$		

Drehpendel

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{c}}$	Differentialgleichung
		$J\varphi'' + c\varphi = 0$
		$T = \text{Schwingsdauer [s]}$
		$\omega_0 = \text{Kreisfrequenz [1/s]}$
		$J = \text{Massenträgheitsmoment [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$
		$c = \text{Federkonstante [N/m]}$

Federpendel (ohne Federmasse)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta h}{g}}$	Differentialgleichung
			$m\varphi'' + c\varphi = 0$

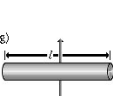
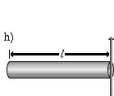
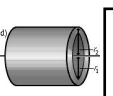
Federpendel (mit Federmasse)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{c}}$	Differentialgleichung
		$\left(m + \frac{m_F}{3}\right)\varphi'' + c\varphi = 0$

Schwingungsenergie beim Federpendel

$E_{\text{pot}} = \frac{cs^2}{2} = \frac{cA^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$	$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$
Federkonstante c	
$c = \frac{m \cdot g}{\Delta l}$	
$T = \text{Schwingsdauer [s]}$	$\varphi = \text{Weg (Winkel) [rad]}$
$\omega_0 = \text{Kreisfrequenz [1/s]}$	$A = \text{Auslenkung [m]}$
$c = \text{Federkonstante [N/m]}$	$\Delta l = \text{Längenänderung [m]}$
$m_F = \text{Federmasse [kg]}$	$s = \text{Weg [m]}$
$m = \text{Masse [kg]}$	

Massenträgheitsmomente

Zylinder	Stab (mitte)	Stab (ende)	Quader	Kugel	Hohlzylinder	Scheibe
						
$J_s = \frac{mr^2}{2}$	$J_s = \frac{ml^2}{12}$	$J_s = \frac{ml^2}{3}$	$J_s = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$	$J_s = \frac{2}{5}mr^2$	$J_s = \frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$	$J_s = \frac{1}{2}mr^2$

Physik 3 Schwingungen

Gedämpfte Schwingungen

$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{c}$$

Amplitudenabnahme pro Periode bei konst. Reibung bei Harmonischer Schwingung

Differentialgleichung

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0$$

Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

$$D \approx \frac{\Lambda}{2\pi}$$

für kleine Dämpfungsgrade

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$D < 1$ ----Gedämpfte Schwingung

für kleine Dämpfungen $\delta < \omega$

$$y = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$\delta = D \cdot \omega_0$$

$$\frac{E}{E_0} = 50\% \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} = \frac{A^2}{A_0^2}$$

Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung

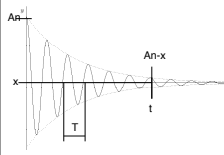
$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$E_{pot} = \frac{cs^2}{2} = \frac{cA^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Logarithmisches Dekrement



$$\Lambda = \delta T$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) \frac{T}{t}$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)$$

$$\Lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$D = 1$ ----Aperiodischer Grenzfall

$$y = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$$

$$\omega_0^2 = \delta^2$$

$$\lambda_1 = -\omega_0 (D + \sqrt{D^2 - 1})$$

$$\lambda_2 = -\omega_0 (D - \sqrt{D^2 - 1})$$

$D > 1$ ----Aperiodisch

$$y = (b_1 + b_2 t) e^{-\delta t}$$

$$y(t) = (b_1 + b_2 t) e^{-\delta t}$$

$$y(0) = y_0 = b_1$$

$$y'(0) = v_0$$

b_1, b_2 = Dämpfungsgrad (selber bestimmbar) [N/ms; kgs⁻¹]

ω_0 = Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung [1/s]

D = Dämpfungsgrad

δ = Abklingkoeffizient

m = Masse [kg]

Λ = logarithmisches Dekrement

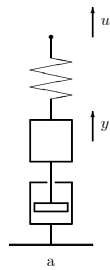
ω_d = Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung [1/s]

c = Federkonstante [N/m]

A = Amplitude [m]

E = Energie [J]

Fremderregte Schwingungen



Differentialgleichung

$$my'' + by' + cy = cu_0 \sin(\omega t)$$

$$my'' + by' + cy = F_0 \sin(\omega t)$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y = A(\omega) \cdot \sin(\omega t - \varphi) + B e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

Frequenz der Fremderregung

Einschwingungsvorgang

Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

Resonanzfrequenz

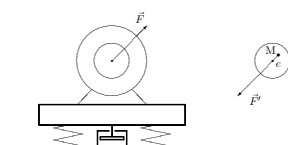
$$f_r = f_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Unwucht



Differentialgleichung

$$my'' + by' + cy = m_R e \omega^2 \sin(\omega t)$$

Resonanzamplitude

$$A_r = \frac{m_R}{m} \cdot \frac{e}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

Kraftamplitude

$$F_{F0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

Amplitude

$$A(\omega) = \frac{m_R e \omega^2}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2D^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Fliehkraft (starre Lagerung)

$$F_F = m_E \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

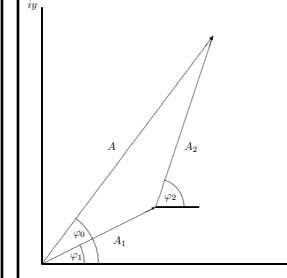
kritische Drehzahl

$$f = \frac{\omega_r}{2\pi}$$

Wenn max. gesucht: $\sin(\omega t) = 1$

$$\omega = \frac{n \cdot \pi}{30}$$

Überlagerung von Schwingungen



Schwingung mit gleicher Frequenz

$$y = y_1 + y_2$$

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \right)$$

Schwingung mit verschiedenen Frequenzen

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$y = A_s \sin(\omega t + \bar{\varphi})$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 [\cos(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) - \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})]}$$

$$\bar{A} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

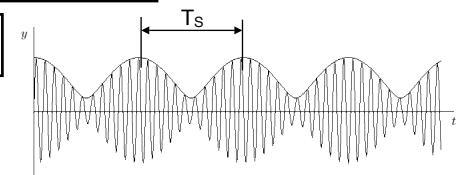
$$\bar{A} = \frac{A_1 - A_2}{2}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\bar{A}}{A} \tan(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\right)$$

$$\omega_s = |\omega_1 - \omega_2|$$



m_R = Resonanzmasse (Exzenter) [kg]

e = Exzentrizität [m]

η = Wirkungsgrad [-]

ω = Kreisfrequenz [s⁻¹]

ω_0 = Kreisfrequenz ungedämpft [s⁻¹]

f = Frequenz [s⁻¹]

n = Umdrehung [min⁻¹]