



V1.0.20250830

Inhaltsverzeichnis

I	Optik	2	8.8	Fremderregte Schwingung – Schwingkreis	9
			8.9	Fremderregte Schwingung – Güte	9
			8.10	Gekoppelte Pendel	9
1	Optische Grössen	2	III	Wellen	10
1.1	Licht	2	9	Wellen	10
1.2	Lichtquellen	2	9.1	Definition	10
1.3	Messgrössen	2	9.2	Klassifizierung von Wellen	10
1.4	Gegenüberstellung: Radiometrie – Photometrie	2	9.3	Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit	10
1.5	Raumwinkel	2	9.4	Wellengleichungen	10
2	Reflexion	2	9.5	Harmonische Wellen	10
2.1	Reflexionsgesetz	2	9.6	Wellenflächen / Wellenfronten	10
2.2	Reflexionen – Spezialfälle	2	9.7	Wellenausbreitung	10
3	Brechung	3	9.8	Bewegte Quellen	11
3.1	Brechungsgesetz / Geschwindigkeit	3	9.9	Doppler Effekt	11
3.2	Totalreflexion	3	9.10	Bewegte Quelle mit Winkel	11
3.3	Brechung an ebenen Grenzflächen	3	9.11	Bewegter Beobachter	11
3.4	Brechung an gekrümmten Flächen	3	9.12	Bewegte Quelle und bewegter Beobachter	11
3.5	Dispersion	3	9.13	Wellenwiderstand, Energietransport – Schallwellen	12
4	Abbildungen – Linsen	3	9.14	Dispersion	12
4.1	Konstruktions-Anweisung	3	10	Superposition von Wellen	12
4.2	Abbildungsgleichungen	4	10.1	Schwebung	12
4.3	Brechkraft	4	10.2	Interferenz	12
4.4	Linsenschleifergleichung	4	10.3	Kohärenz	12
4.5	Konvexe und Konkave Linsen	4	10.4	Reflexion und Transmission	12
4.6	Aberration	4	10.5	Anwendung: Elektromagnetische Wellen	13
4.7	Polarisation	4	11	Stehende Wellen	13
4.8	Streuung	5	11.1	Terminologie	13
5	Optische Apparaturen	5	11.2	Entstehung von stehenden Wellen	13
5.1	Abbildungssysteme – Auge	5	11.3	Prinzip von Huygens	13
5.2	Abbildungssysteme – Fotoapparat	5	11.4	Eigenschwingungen – 1D	13
5.3	Abbildungssysteme – Lupe	5	11.5	Eigenschwingungen – 2D	14
5.4	Abbildungssysteme – Fernrohr	5	12	Beugung	14
5.5	Abbildungssysteme – Mikroskop	6	12.1	Beugung – Spalt	14
5.6	Farbentheorie	6	12.2	Beugung – Runde Öffnung (2D)	14
II	Schwingungen	6	12.3	Beugung – Gitter	14
6	Ungedämpfte Schwingungen	6	12.4	Babinet-Prinzip	14
6.1	Schwingungen – Übersicht	6	13	Akustik	15
6.2	Freie Schwingungen	6	13.1	Terminologie	15
6.3	Beschreibung einer 1D-Schwingung	6	13.2	Pegel	15
6.4	Pendel	7	13.3	Schallintensität	15
6.5	Perkussionszentrum	7	13.4	Intensität bei Kugelwellen	15
6.6	Periodische Schwingung	7	13.5	Verschiedene Schallquellen	15
6.7	Signalmodulationen	7	13.6	PHON-Skala	15
7	Gedämpfte Schwingungen	7	13.7	Schalldämpfung / Schalldämmung	15
7.1	Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit	8	13.8	Schalldämmung / Schalldämm-Mass	15
8	Fremderregte Schwingung	8	13.9	Schalldämm-Mass	16
8.1	Definition	8	13.10	Anhall / Nachhall	16
8.2	Übersicht über Hilfsgrössen	8	IV	Anhang	16
8.3	Resonanz	8	14	Anhang	16
8.4	Fremderregte Schwingung – Krafterregung	8	14.1	Massenträgheitsmomente	16
8.5	Fremderregte Schwingungen – Dämpfererregung	8	14.2	Trigonometrie	16
8.6	Fremderregte Schwingungen – Stützererregung	8			
8.7	Fremderregte Schwingung – Unwuchterregung	8			

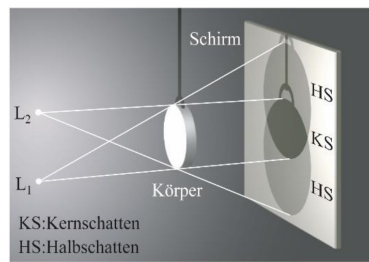
I Optik

1 Optische Grössen

1.1 Licht

Licht kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

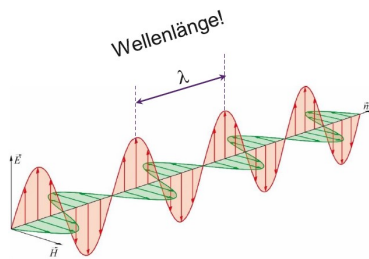
1.1.1 Lichtstrahlen



Die **geometrische Optik** oder **Strahlenoptik** geht davon aus, dass sich das Licht im Vakuum als **geradliniger Strahl** ausbreitet.

Mit der geometrischen Optik können die Phänomene Reflexion und Brechung erklärt werden.

1.1.2 Lichtwellen



Licht wird als elektromagnetische Welle modelliert.

Bild: linear polarisierte Welle

Lichtfarben und ihre Frequenzen / Wellenlängen:

Farbe	Wellenlänge in nm
violett	380 ... 435
blau	435 ... 465
blaugrün	465 ... 485
grün	485 ... 565
gelb	565 ... 590
orange	590 ... 630
rot	630 ... 780

$$\lambda = \frac{c}{f}$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta \lambda} = \frac{c}{\lambda^2}$$

λ Wellenlänge $[\lambda] = \text{m}$
 c Lichtgeschwindigkeit $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 f Frequenz $[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$

1.1.3 Lichtteilchen

Modellvorstellung des Lichts als ein Fluss von Lichtteilchen (**Photonen**)

$$E = h \cdot f$$

E	Energie eines Photons	$[E] = \text{J}$
h	Planck'sche Konstante $6.626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$	$[h] = \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$
f	Frequenz	$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$

1.2 Lichtquellen

1.2.1 Thermische Strahler

Schwarzkörper-Modell: Modell eines Körpers, der in alle Richtungen abstrahlt (und energetisch im Gleichgewicht ist)

Ein Schwarzkörper strahlt **alle** Lichtfarben ab. (auch die für den Mensch nicht sichtbaren.)

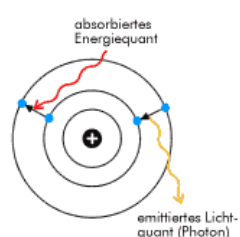
Glühlampen:

Muss auf allen Wellenlängen angeregt werden, um schliesslich sichtbares Licht abzustrahlen.
⇒ Es wird viel Energie nicht nutzbar 'verheizt'

LEDs:

Können mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden und strahlen nur gewünschtes Licht ab. ⇒ energieeffizient

1.2.2 Lumineszenz



- Elektronen werden angeregt und steigen in energetisch höheren Zustand.
- Sobald die Elektronen wieder in ihren Grundzustand zurückkehren wird ein Lichtquant (Photon) abgestrahlt.
- Die Leuchtfarbe wird durch die Frequenz der Anregung bestimmt.

Fluoreszenz: kein Nachleuchten
Phosphoreszenz: mit Nachleuchten

1.3 Messgrössen

1.3.1 Radiometrie

Physikalische Messgrössen der elektromagnetischen Strahlung

1.3.2 Photometrie

Radiometrische Grössen, gewichtet mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent K , welches die **Empfindlichkeit des menschlichen Auges** angibt.

Photometrischen Strahlungsäquivalent K :

Gibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges wieder und ist eine empirisch genormte Kurve

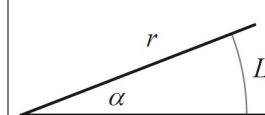
⇒ Menschliches Auge ist bei Wellenlänge von 555 nm (grüne Farbe) am empfindlichsten
⇒ Entspricht $638 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$

1.4 Gegenüberstellung: Radiometrie – Photometrie

	Radiometrie			Photometrie		
	Einheit	Symbol	Grösse	Grösse	Symbol	Einheit
Quellen	W	Φ_e	Strahlungsfluss	Lichtstrom	$\Phi_v = \int K(\lambda) \frac{d\Phi_e}{d\lambda} d\lambda$	lumen, lm
	W sr^{-1}	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	Strahlstärke	Lichtstärke	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	cd = lm sr ⁻¹
Empfänger	W m^{-2}	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	Bestrahlungsstärke	Beleuchtungsstärke	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	lx = lm m ⁻²

1.5 Raumwinkel

1.5.1 Winkel in der Ebene

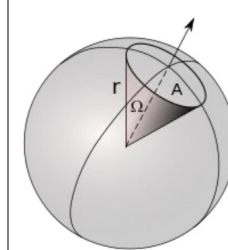


Länge des Bogens auf einem Kreis mit $r = 1 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Vollkreis: 2π
 $[\alpha] = \text{rad}$

1.5.2 Winkel im Raum



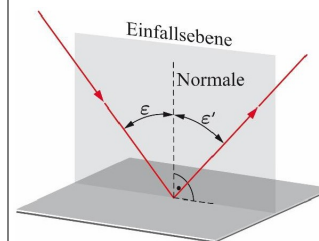
Aufgespannte Fläche, projiziert auf eine Kugel mit $r = 1 \text{ m}$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{1 \text{ m}^2}$$

Kugel: 4π
 $[\Omega] = \text{sr (Steradian)}$

2 Reflexion

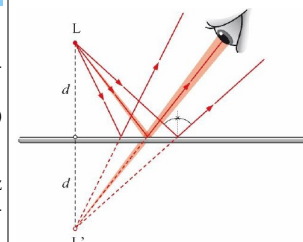
2.1 Reflexionsgesetz



Einfallswinkel = Ausfallwinkel

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

2.1.1 Grenzflächen von Reflexionen



L reelles Bild
Bild, welches auf Schirm abgebildet werden kann

L' virtuelles Bild (Spiegelbild von L)
Bild, welches nicht auf Schirm abgebildet werden kann

Glatte Spiegel: direkte Reflexion (siehe Bild oben)

Rauer Spiegel: diffuse Reflexion

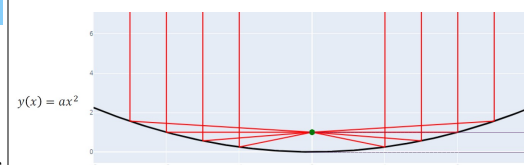
2.2 Reflexionen – Spezialfälle

Brennpunkt F Brennpunkt (Fokus) ist der Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf einen Spiegel oder eine Linse einfallende Strahlen sich schneiden

Brennweite f Abstand des Brennpunktes von der Linse bzw. dem Spiegel

2.2.1 Parabolspiegel

Parallel einfallende Strahlen werden in einem Punkt fokussiert.

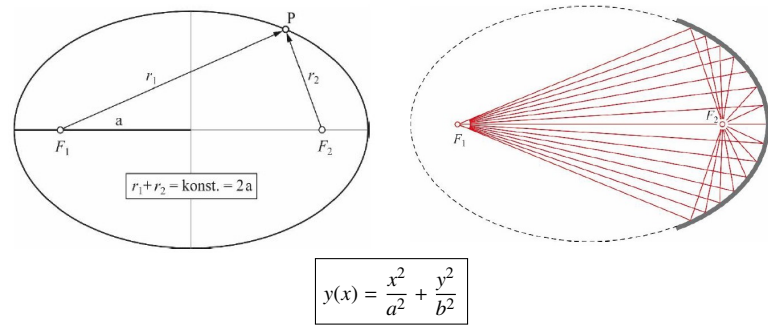


$$y(x) = a x^2$$

$$f = \frac{1}{4a}$$

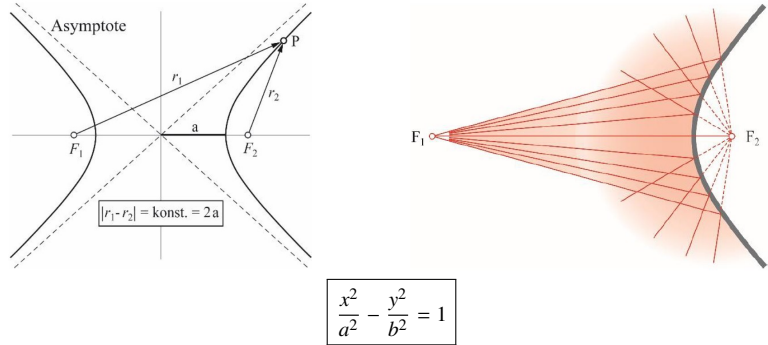
2.2.2 Elliptischer Spiegel

Konzentration von Energie in einem nicht zugänglichen Punkt



2.2.3 Hyperbolischer Spiegel

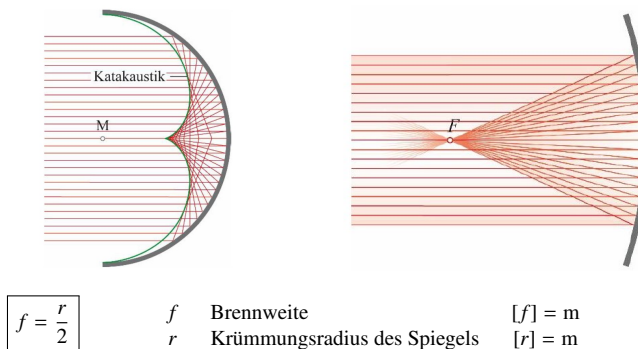
Objekt in Spiegel versetzen



2.2.4 Sphärische Spiegel

Parallel einfallende Strahlen werden nicht mehr in einem Punkt fokussiert (Katakaustik)

Da die achsnahen Strahlen nach der Reflexion annähernd durch einen Punkt gehen, wird dieser Punkt wieder Brennpunkt F genannt.

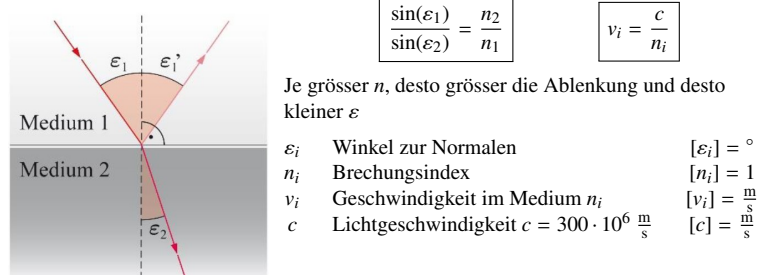


3 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt ein Teil des einfallenden Lichtes in das zweite Medium ein. Die auftretende Richtungsänderung wird als **Brechung** bezeichnet. Der in das zweite Medium eindringende Strahl wird **gebrochener Strahl** genannt.

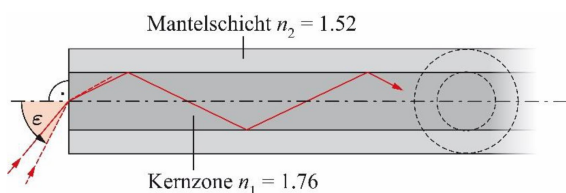
3.1 Brechungsgesetz / Geschwindigkeit

Achtung: Es gilt $n_1 < n_2$



Anwendung: Glasfaser:

Der Lichtstrahl bleibt in der Kernzone (Medium 1) gefangen, da diese einen grösseren Brechungsindex hat als die Mantelschicht (Medium 2)



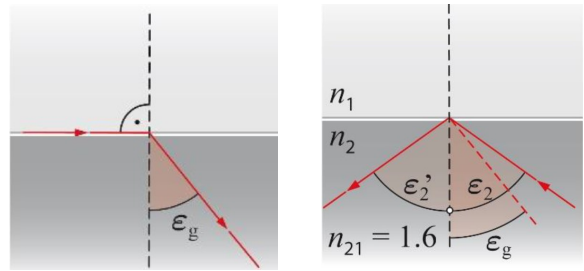
3.2 Totalreflexion

Der Einfallswinkel ϵ_1 kann nicht grösser als 90° sein.

Für $\epsilon_1 = 90^\circ$ berechnet sich $\epsilon_2 = \epsilon_g$ aus:

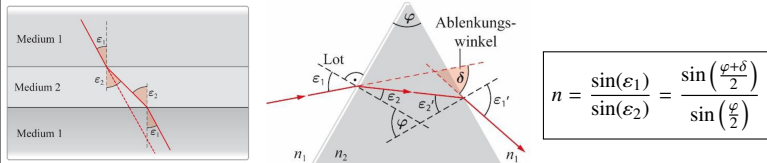
$$\epsilon_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für den Grenzfall von $\epsilon_1 > 90^\circ$ wird der gesamte Strahl reflektiert.



3.3 Brechung an ebenen Grenzflächen

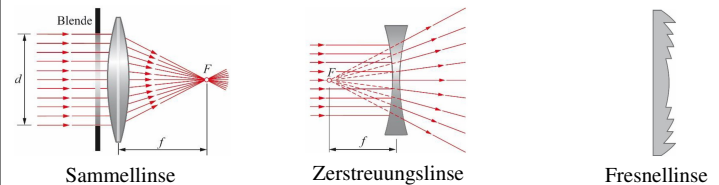
Ein Lichtstrahl wird verschoben bzw. in eine beliebige Richtung geändert



3.4 Brechung an gekrümmten Flächen

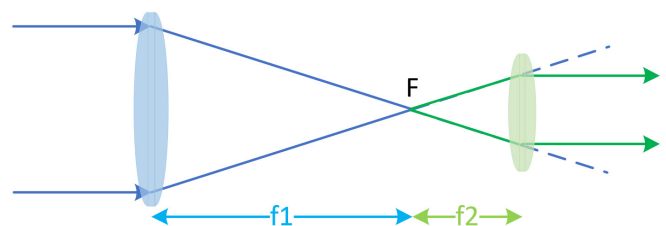
Die Anwendung der Brechung ist eine Linse.

Linsentypen:



Fresnellinse: Es kann vermieden werden, dass die Linse eine übermässige Dicke aufweist.

Beispiel: Brechung mit zwei Linsen



Rechts gibt es ein kleineres Bild als links.

3.5 Dispersion

Der **Brechungsindex** eines Mediums ist eine **Funktion der Wellenlänge**: $n = n(\lambda)$. Diese Wellenlängenabhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet.

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A}{\lambda_0^2 - \lambda^2}$$

$$n^2(f) = 1 + \frac{A'}{f_0^2 - f^2}$$

3.5.1 Abbe Zahl V

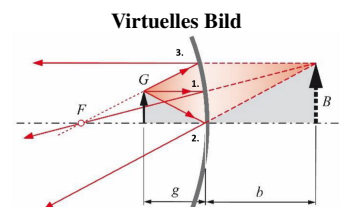
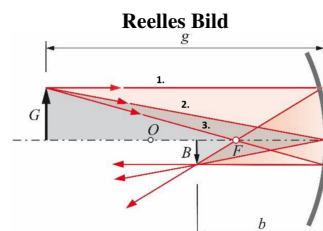
Gibt an, wie stark dispersiv ein Material ist. Grosse Abbe-Zahl $\Rightarrow$ wenig dispersives Material.

4 Abbildungen – Linsen

4.1 Konstruktions-Anweisung

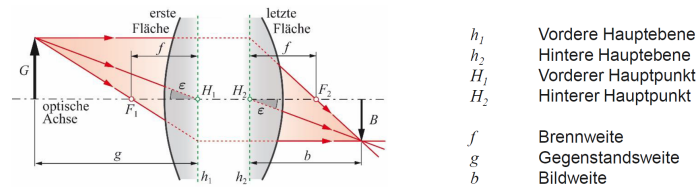
Man benutzt zwei der drei Hauptstrahlen:

1. Parallel Strahl $\Rightarrow$ Brennpunkt
2. Mittelpunkt Strahl $\Rightarrow$ mit gleichem Winkel zurück
3. Brennpunkt Strahl $\Rightarrow$ Paralleler Strahl



B wird als **reeller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich die austretenden Strahlen schneiden. B wird als **virtueller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich nur die Verlängerungen der austretenden Strahlen schneiden.

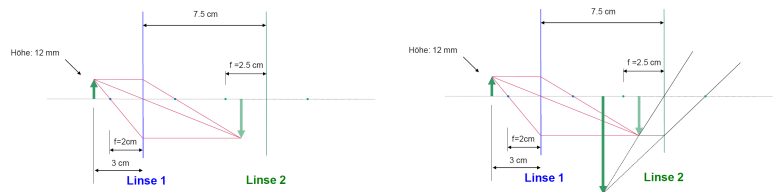
4.1.1 Terminologie



Die **Öffnungsblende** oder **Aperturblende** bergrenzt das in das System einfallende Lichtbündel

Die **Feldblende** begrenzt das Bildfeld. Sie legt den Ausschnitt der Objektebene fest, der abgebildet wird.

Beispiel: Abbildungen bei zwei Sammellinsen



4.2 Abbildungsgleichungen

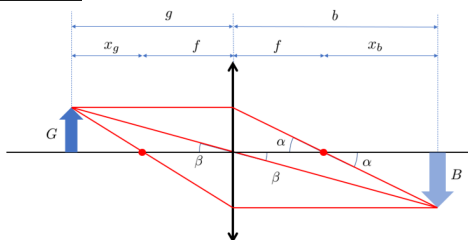
Ein Bild ist scharf dargestellt, wenn die Abbildungsgleichung erfüllt ist!

Abbildungsgleichung:

Newton'sche Abb.-Gleichung:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

$$x_b \cdot x_g = f^2$$



g	+	falls sich der Gegenstand vor der Linse befindet	f	+	Sammellinse
	-	falls sich der Gegenstand hinter der Linse befindet		-	Zerstreuungslinse
b	+	reelles Bild hinter der Linse	G	+	reeller Gegenstand
	-	virtuelles Bild vor der Linse	B	+	reelles Bild, seitenverkehrt

Hinweis: Ein Spiegel hat eine Brennweite von $f = \infty$

→ Vereinfachung der Abbildungsgleichung!

4.2.1 Vergrößerungsverhältnis

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$V_{\text{tot}} = V_1 \cdot V_2$$

V	Vergrößerungsverhältnis	[V] = 1
b	Bildweite	[b] = m
g	Gegenstandsweite	[g] = m
B	Bildgröße	[B] = m
G	Gegenstandsgröße	[G] = m
f	Brennweite	[f] = m

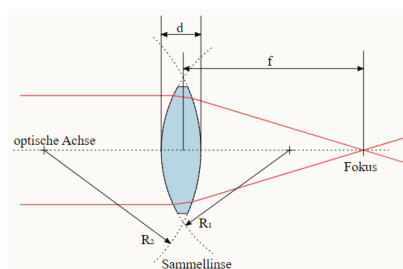
4.3 Brechkraft D

Die Optiker benutzen nicht die Brennweite sondern die Brechkraft in **Dioptrie**

Es gilt: 1 dpt = 1 m⁻¹

$$D = \frac{1}{f}$$

4.4 Linsenschleifengleichung



$$D = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Achtung: Vorzeichen von R_i beachten!
Beide haben gleiches Vorzeichen, wenn Krümmungsmittelpunkte auf gleicher Seite der Linse liegen

4.4.1 Symmetrische Linsen ($R_1 = R_2$)

Für symmetrische Linsen gilt:

$$D = (n - 1) \frac{2}{R}$$

$$f = \frac{1}{D} = \frac{R}{2(n - 1)}$$

D	Brechkraft	[D] = dpt
f	Brennweite	[f] = $\frac{1}{s}$ = Hz
R _i	Linsenradius	[R _i] = m
n	Brechungsindex	[n] = 1

4.4.2 Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum

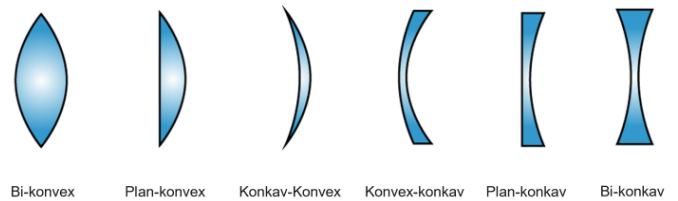
Die Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum ist wie folgt definiert:

$$D = D_1 + D_2$$

4.5 Konvexe und Konkave Linsen

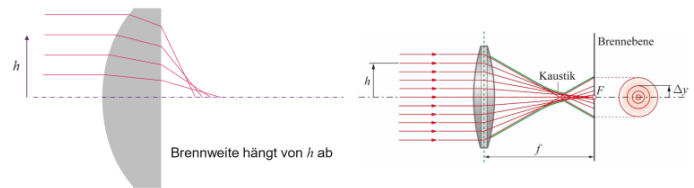
Konvex: nach aussen gewölbt ⇒ Sammellinsen

Konkav: nach innen gewölbt ⇒ Zerstreuungslinsen

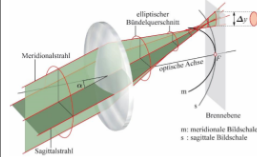


4.6 Aberration

Unter dem Begriff Aberration versteht man die Abweichung vom idealisierten Fall.



4.6.1 Astigmatismus



Meridionale Krümmung (auf Bild vertikal)
Sagittale Krümmung (auf Bild horizontal)

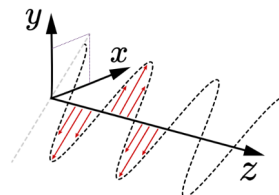
Astigmatismus
Meridionale Krümmung ≠ Sagittale Krümmung

Krümmungen unterschiedlich → Brennweiten unterschiedlich

4.7 Polarisation

4.7.1 Lineare Polarisation

- E_x und E_y können **unterschiedliche Amplituden** haben
- Die **Phasen müssen gleich** sein.



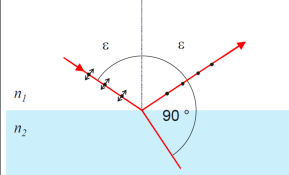
EM-Wellen können mit dem **Herzschen Gitter** oder mit dem **Brewster Winkel** linear polarisiert werden.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ kann zu $\vec{0}$ werden

4.7.2 Brewster Winkel

Achtung: Es gilt $n_1 < n_2$

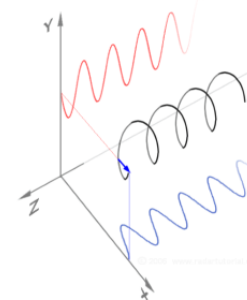


Unter dem **Brewster Winkel** wird nur **linear polarisiertes Licht** zurückgeworfen. Der ins Medium 2 eindringende Strahl steht dabei **senkrecht** auf dem reflektierten Strahl

$$\tan(\epsilon) = \frac{n_2}{n_1}$$

4.7.3 Zirkulare Polarisation

- x und y Komponenten haben die **gleiche Amplitude**
- **Phasendifferenz von 90°**



Positive zirkulare Polarisation σ^+
Positive zirkulare Polarisation σ^-

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi f t - k z) \\ E_0 \sin(2\pi f t - k z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ kann nicht zu $\vec{0}$ werden

4.7.4 Elliptische Polarisation

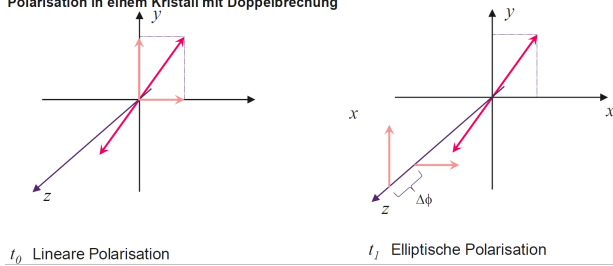
- x und y Komponenten haben **unterschiedliche Amplituden**
- **beliebige Phasendifferenz**

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi f t - k z) \\ E_0 \cos(2\pi f t - k z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.7.5 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist eine anisotropische Eigenschaft von Kristallen
Diese Kristalle haben unterschiedliche Brechungsindizes in unterschiedliche Richtungen
Nach einer gewissen Zeit t haben die x - und y -Komponente einen Phasenunterschied.
=> x und y bewegen sich unterschiedlich schnell fort

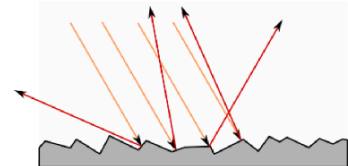
Polarisation in einem Kristall mit Doppelbrechung



4.8 Streuung

4.8.1 Diffuse Streuung

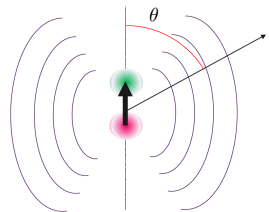
Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d \gg \lambda$



- Licht als **Strahlen**
- Reflexion in alle Richtungen
- Keine bevorzugte Richtung unabhängig von λ
- Wolken, Nebel
- milchiche Lösungen

4.8.2 Rayleigh-Streuung

Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d < \lambda$ (atomare Grösse)



$$I(\theta) = A f^4 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}$$

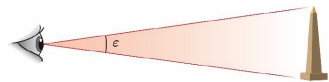
- hochfrequentes Licht wird viel stärker abgestrahlt!
- Licht als **Wellen** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Abstrahlungsmuster eines Dipols
- Himmel tagsüber blau
- Himmel abends rötlich

5 Optische Apparaturen

5.1 Abbildungssysteme – Auge

5.1.1 Terminologie des Auges

Sehwinkel ε :



Die Grösse, in der ein Gegenstand dem betrachtenden Auge erscheint (**in Bogenminuten**) $1^\circ \Leftrightarrow 60'$

Auflösung:

Minimaler Winkelabstand $\varepsilon_{\min}$, den zwei Punkte haben müssen, damit sie noch getrennt wahrgenommen werden.

Normalsichtiges Auge: Auflösung ca. 1 Bogenminute ($1'$)

Sehschärfe:

Reziprokwert der Auflösung

$$S = \frac{1}{\varepsilon_{\min}} \quad \text{beim Menschen also } S = 1$$

Deutliche Sehweite s (normierte Betrachtungsdistanz):

Damit die Vergrößerungen von Lupen und Mikroskopen eindeutig bestimmt werden können, wird eine **deutliche Sehweite** definiert:

$$s = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

5.1.2 Kurzsichtigkeit vs. Weitsichtigkeit

Kurzsichtigkeit

- Augapfel zu lang
- Konkave Streulinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand näher heran

Weitsichtigkeit

- Augapfel zu kurz
- Konvexe Sammellinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand weiter weg

5.2 Abbildungssysteme – Fotoapparat

Bildgrösse B :

Die Bildweite b ist normalerweise viel kleiner als die Gegenstandsweite g und daraus folgt:

$$B = \frac{f}{g} G$$

Lichtstärke H :

Die Intensität des Lichts auf dem Film ist gegeben durch

$$H = \left(\frac{d}{f}\right)^2 = q^2$$

Blendenzahl Z :

z.B.: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, ...

$$Z = \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

Belichtung E , Belichtungszeit t :

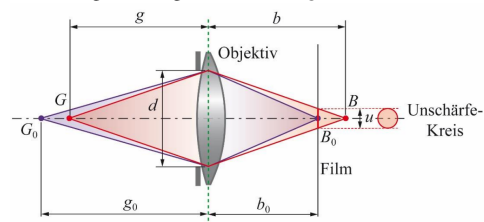
$$E = Ht \approx q^2 t$$

$$t = \frac{G}{v} = \frac{g}{f} \frac{B}{v}$$

Schärfentiefe:

In der Filmebene ergibt sich vom Punkt G kein scharfer Bildpunkt, sondern ein **Unschärfekreis** mit dem Durchmesser u .

Es wird folgende Gegenstandsweite g in den Unschärfekreis abgebildet:

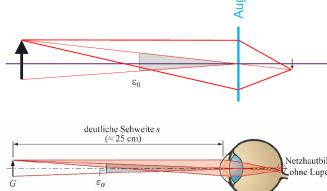


$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{q f^2}$$

b	Bildweite	$[b] = \text{m}$
b_0	Bilddistanz ₀	$[b_0] = \text{m}$
B	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$
B_0	Bild ₀	$[B_0] = \text{m}$
g	Gegenstandsweite (G zu Objektiv)	$[g] = \text{m}$
g_0	Gegenstandsdistanz ₀ (G_0 zu Objektiv)	$[g_0] = \text{m}$
G	Gegenstandsgrösse	$[G] = \text{m}$
G_0	Gegenstandsgrösse ₀	$[G_0] = \text{m}$
f	Brennweite	$[f] = \text{m}$
u	Durchmesser Unschärfekreis	$[u] = \text{m}$
d	Durchmesser Blendenöffnung	$[d] = \text{m}$

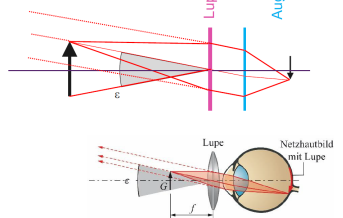
5.3 Abbildungssysteme – Lupe

Ohne Lupe



$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{G}{s}$$

Mit Lupe



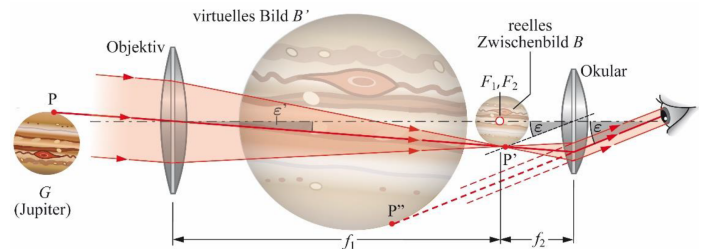
$$\tan(\varepsilon) = \frac{G}{f}$$

$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{s}{f}$$

ε_i	Sehwinkel	$[\varepsilon_i] = ^\circ$
s	Deutliche Sehweite $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
f	Brennweite	$[f] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$
G	Gegenstandsgrösse	$[G] = \text{m}$

5.4 Abbildungssysteme – Fernrohr

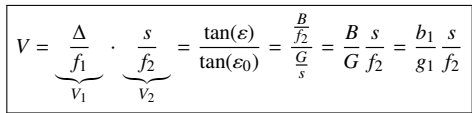
Es wird zuerst ein vergrössertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{\frac{B}{f_2}}{\frac{B}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

ε_i	Sehwinkel	$[\varepsilon_i] = ^\circ$
f_i	Brennweite	$[f_i] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$
B	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$

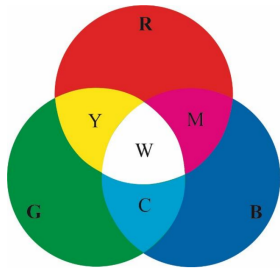
Es wird zuerst ein vergrössertes Bild erzeugt, welchs selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



ε_i	Schinkel	$[\varepsilon_i] = ^\circ$
s	Deutliche Sehweite $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
f_i	Brennweite	$[f_i] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$
Δ	optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte)	$[\Delta] = \text{m}$
b_1	Bildweite	$[b_1] = \text{m}$
g_1	Gegenstandsweite	$[g_1] = \text{m}$
B	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$
G	Gegenstandsgrösse	$[G] = \text{m}$

Spektralfarben: Die gesamten Lichtfarben
Monochromatisches Licht: Nur eine einzige Wellenlänge (Farbe)

Additive Farbmischung



Drei Filter hintereinander

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$y(t)$	Position zum Zeitpunkt t	$[y(t)] = \text{m}$
$\dot{y}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	$[\dot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\ddot{y}(t)$	Beschleunigung zum Zeitpunkt t	$[\ddot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
A	Amplitude	$[A] = \text{m}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
φ	Phase	$[\varphi] = \text{rad}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
f	Frequenz	$[f] = \frac{1}{\text{s}}$

$$F_{\text{res}} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_{\text{Feder}} = -k \cdot x$$

Kräftegleichgewicht: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$

DGL: $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$ mit $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Allgemeine Lösung: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

m	Masse	$[m] = \text{m}$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} \\ &= \frac{k}{2} A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

A graph of a periodic function on a grid. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The function is a blue sine wave. A red horizontal line segment above the wave is labeled T , indicating the period of the function. The wave oscillates between $y = A$ and $y = -A$, with the peak labeled A and the trough labeled $-A$.

Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit

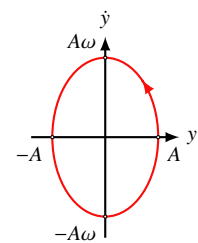
Beispiel: Oszilloskop

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Auslenkung als Zeiger (komplexe Zahl), der um den Ursprung rotiert

$$z(t) = \underbrace{x(t)}_{\mathcal{R}(z)} + i \underbrace{y(t)}_{\mathcal{I}(z)}$$

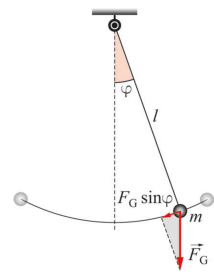
6.3.3 Phasenraum



Darstellung der Position y und der Ableitung (Geschwindigkeit)

6.4 Pendel

6.4.1 Fadenpendel

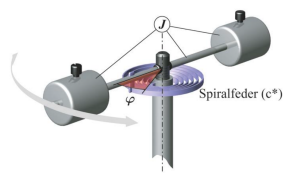


$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \approx m \cdot g \cdot \varphi$$
$$x = \varphi \cdot l \rightarrow \varphi = \frac{x}{l}$$
$$\Rightarrow F_G = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

Kräftegleichgewicht: $F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$

DGL: $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$ mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$

6.4.2 Drehpendel



Analogie ohne Rotation:

$$F = -k \cdot x$$

$$M = -c^* \cdot \varphi$$

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Gleichgewicht: $J \cdot \ddot{\varphi} = -c^* \cdot \varphi$

DGL: $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi$ mit $\omega^2 = \frac{c^*}{J}$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels und hat die Lösung:

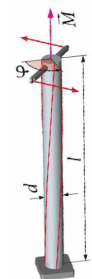
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

J Trägheitsmoment $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

c^* Winkelrichtgröße $[c^*] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$

6.4.3 Torisonpendel

Variante des Drehpendels mit der Winkelrichtgröße



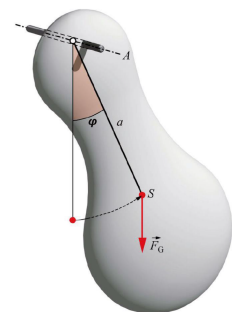
$$c^* = \frac{\pi r^4 G}{2l}$$

G Torsionsmodul

l Länge

$r = \frac{d}{2}$ Radius

6.4.4 Physikalisches Pendel



$$M = -a \cdot \sin(\varphi) \cdot F_G = -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Bewegungsgleichung: $M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Gleichgewicht: $-a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Kleine Winkel: $-a \cdot m \cdot g \cdot \varphi = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

DGL: $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi$ mit $\omega^2 = \frac{g}{L^*} = \frac{g \cdot a \cdot m}{J_A}$

$$L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$$

$$J_A = J_S + m \cdot a^2$$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

Physikalisches Pendel mit mehreren Massen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \cdot g}}$$

$\Rightarrow J$ -Tabelle im Anhang Abschnitt 14.1

S Schwerpunkt des Körpers

J_S Trägheitsmoment bzgl. S

a Abstand Schwerpunkt – Drehpunkt

L^* Reduzierte Länge

J_A Trägheitsmoment um Aufhängepunkt

$$[J_S] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$[a] = \text{m}$$

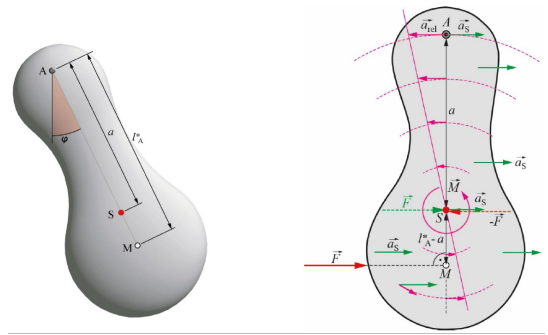
$$[L^*] = \text{m}$$

$$[J_A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

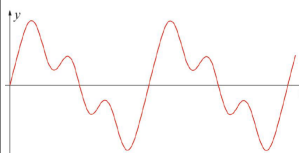
6.5 Perkussionszentrum

Frage: Wie weit vom Drehpunkt A muss ein Impuls auf einen Körper ausgeübt werden, damit keine Kraft auf die Achse ausgeübt wird?

Antwort: Auf Höhe der **reduzierten Länge** $L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$



6.6 Periodische Schwingung



Muster wiederholt sich mit Periode T

$$f(t) = f(t - T)$$

Periodische Schwingungen können im **Frequenzbereich** in eine **Grundschiwingung** und **Oberschwingungen (Harmonische)** zerlegt werden.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega + \varphi_n)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega_n = n \cdot \omega_0$$

Grundschiwingung
 n -te Harmonische

6.6.1 Fourier-Analyse

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

6.7 Signalmodulationen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudenmodulation (AM):

Veränderung von A



Frequenzmodulation (FM):

Veränderung von ω

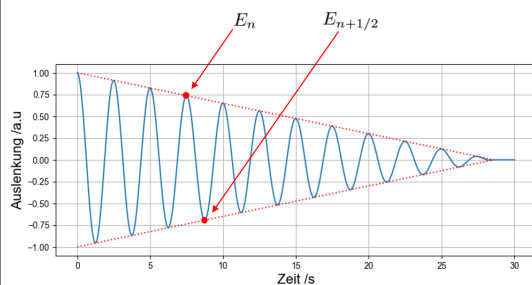


7 Gedämpfte Schwingungen

7.0.1 Dämpfung mit konstanter Reibungskraft

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu F_N \quad \text{für } \dot{x}(t) > 0$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + \mu F_N \quad \text{für } \dot{x}(t) < 0$$



$$E = \frac{k A^2}{2}$$

$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{k}$$

E Energie bei max. Auslenkung

$k = c$ Federkonstante

A Amplitude bei max. Auslenkung

ΔA Amplitudenänderung pro Periode

F_R Reibungskraft

$$[E] = J$$

$$[k] = \frac{N}{m}$$

$$[A] = m$$

$$[\Delta A] = m$$

$$[F_R] = N$$

7.1 Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit

$$\text{DGL: } \ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{\kappa}{2\omega}$$

$$f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

Fall 1	$\delta^2 - \omega^2 > 0$	$D > 1$	$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$	Aperiodische Schwingung $\lambda_{1,2} = -\omega(D \pm \sqrt{D^2 - 1})$
Fall 2	$\delta^2 - \omega^2 < 0$	$D < 1$	$x(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$	Period. Schwingung (gedämpft) $\Omega^2 = \omega^2(1 - D^2)$
Fall 3	$\delta^2 - \omega^2 = 0$	$D = 1$	$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$	Grenzfall

$$\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2 = \omega^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2$$

$$z \cdot \Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+z}}\right) = z \cdot \delta T = z \cdot \frac{\kappa}{2} T$$

$\delta = \frac{\kappa}{2}$	Abklingkonstante	$[\kappa = \delta] = \frac{1}{s}$
ω	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
Ω	Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung	$[\Omega] = \frac{\text{rad}}{s}$
Λ	Logarithmisches Dekrement	$[\Lambda] = 1$
A_n	Amplitude zum Zeitpunkt t	$[A_n] = m$
A_{n+z}	Amplitude zum Zeitpunkt $t + z \cdot T$	$[A_{n+z}] = m$
z	Anzahl verstrichene Schwingungen	$[z] = 1$
T	Periodendauer	$[T] = s$
f	Frequenz der gedämpften Schwingung	$[f] = \text{Hz}$

8 Fremderregte Schwingung

8.1 Definition

Erzwungene Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine **periodische Störung** verursacht werden.

8.2 Übersicht über Hilfsgrößen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \delta = \frac{\kappa}{2} = \frac{b}{2m} \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\kappa}{2\omega_0}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \Omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{s}$
Ω_d	Kreisfrequenz gedämpfte Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{\text{rad}}{s}$
ω_r	Resonanzkreisfrequenz	$[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{s}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$
$\delta = \frac{\kappa}{2}$	Abklingkonstante	$[\kappa] = [\delta] = \frac{1}{s}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{N}{m}$

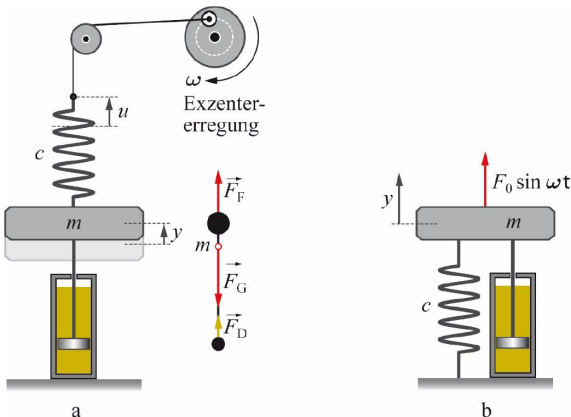
8.3 Resonanz

Die Amplitude A wird maximal, wenn der Nenner von $A(\omega)$ minimal wird.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$A_r = \frac{u_0}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

8.4 Fremderregte Schwingung – Kräfteerregung



$$\text{DGL: } m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = F_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)}_{y_p(t)} + \underbrace{B e^{-\delta t} \sin(\Omega_d t + \varphi_0)}_{y_h(t)}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

8.4.1 Vergrößerungsfunktion / Phasenverschiebung

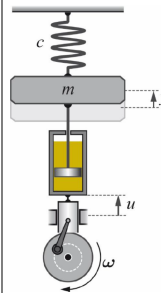
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

$$V_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_r^4}} \quad \text{mit } \eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}$$

φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
V_r	Vergrößerungsfunktion	$[V_r] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$A(\omega)$	Amplitudenverlauf	$[A(\omega)] = m$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{s}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

8.5 Fremderregte Schwingungen – Dämpfererregung



$$\text{DGL: } m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = b \omega u_0 \cos(\omega t)$$

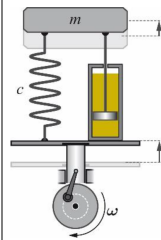
$$A(\omega) = \frac{b \omega u_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$V = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

⇒ Legende siehe Abschnitt 8.4.1

8.6 Fremderregte Schwingungen – Stützererregung



$$\text{DGL: } m \ddot{q} + b \dot{q} + c q = -m \omega^2 u_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } q = y - u$$

$$A(\omega) = \frac{\omega^2 u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

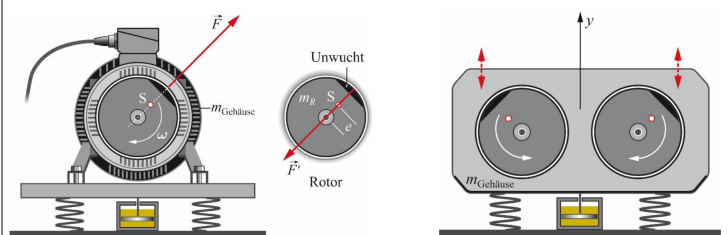
$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right) - \pi$$

⇒ Legende siehe Abschnitt 8.4.1

8.7 Fremderregte Schwingung – Unwuchterregung

Unwucht: Schwerpunkt S des Rotors der Masse m_R bewegt sich auf einem Kreis mit Radius e



$$\text{DGL in y-Richtung: } m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = -m_R \omega^2 e \sin(\omega t)$$

Radiale Beschleunigung des Schwerpunkts des Rotors: $a_R = \omega^2 e$

Kraft des Rotors auf die Maschine:

$$F_U = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \omega^2 e$$

$$A(\omega) = \frac{m_R}{m} \frac{e \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_R = \frac{m_R}{m} \frac{e}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

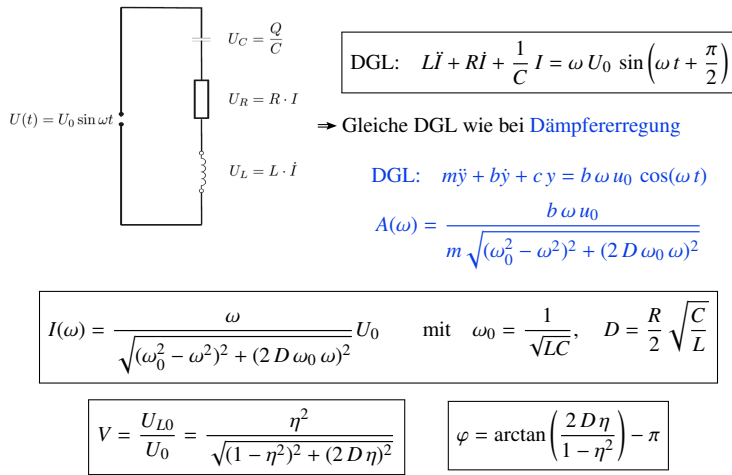
8.7.1 Kraft auf die Basis des Gehäuses

$$F_B = cy + b\dot{y} = F_{B0} \sin(\omega t - \varphi + \psi) \quad \varphi = \psi - \pi$$

$$F_{B0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

F_{B0}	Kraft auf Basis des Gehäuses	$[F_{B0}] = N$
m_R	Masse des Rotors	$[m_R] = \text{kg}$
a_R	Radiale Beschleunigung Schwerpunkt	$[a_R] = \frac{m}{s}$
e	Abstand Mittelpunkt - Schwerpunkt	$[e] = m$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$A(\omega)$	Amplitude	$[A(\omega)] = m$
A_R	Resonanzamplitude	$[A_R] = m$

8.8 Fremderregte Schwingung – Schwingkreis



8.8.1 Resonanz

Resonanzfrequenz:

Amplitude @ Resonanz:

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_{0r} = \frac{U_0}{R}$$

ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω_r	Resonanzfrequenz	$[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
I_{0r}	Strom-Amplitude @ Resonanz	$[I_{0r}] = \text{A}$
U_0	Amplitude der Erregerspannung	$[U_0] = \text{V}$
U_{L0}	Amplitude Spulenspannung	$[U_{L0}] = \text{V}$
$A(\omega)$	Amplitude der Schwingung	$[A(\omega)] = \text{m}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$

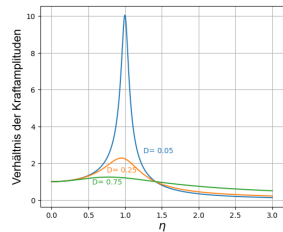
8.9 Fremderregte Schwingung – Güte Q

8.9.1 Definition

Die relative Abnahme der Schwingungsenergie $E(t)$ pro Schwingdauer wird als **Güte** oder **Gütefaktor** bezeichnet.

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

8.9.2 Beziehungen



$$Q = \frac{1}{2D}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Breite der Resonanzkurve bei $U_0 = \frac{U_{0r}}{\sqrt{2}}$
Breite Kurve ⇒ tiefe Güte

8.10 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden.

Die Bewegung eines Pendels hat Auswirkungen auf die Bewegung des anderen Pendels. Gesucht ist eine Beschreibung der Bewegung des Pendels.

Allgemein:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g a_1 \varphi_1 + c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -m_2 g a_2 \varphi_2 - c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Spezialfall:

$$\bullet J_1 = J_2 = J \quad \bullet m_1 = m_2 = m \quad \bullet a_1 = a_2 = a$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \varphi_1 + k (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \varphi_2 - k (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Im Spezialfall gilt:

$$\Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Phi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\omega^2 = \frac{m g a}{J} \quad k = \frac{c \cdot h^2}{J} \quad \omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$$

$$\text{Symm:} \quad \ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+ \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos(\omega t)$$

$$\text{Antisymm:} \quad \ddot{\Phi}_- = -(\omega^2 + 2k) \Phi_- \quad \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos(\omega_k t)$$

8.10.1 Allgemeine Lösung des gekoppelten Systems

⇒ Linearkombination der symmetrischen und asymmetrischen Lösung

$$\varphi_1(t) = \Phi \sin(\Omega t) \cdot \cos(\bar{\omega} t) \quad \Omega = \frac{\omega_k - \omega}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \Phi \cos(\Omega t) \cdot \sin(\bar{\omega} t) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_k}{2}$$

k	Kopplungsfaktor	$[k] = 1$
h	Abstand zur Aufhängung	$[h] = \text{m}$
J	Massenträgheitsmoment	$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
c	Federkonstante	$[c] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

III Wellen

9 Wellen

9.1 Definition

Eine Welle ist eine **Störung** eines **Gleichgewichtszustands**, die sich **im Raum ausbreitet**.

9.1.1 Bemerkungen zur Definition

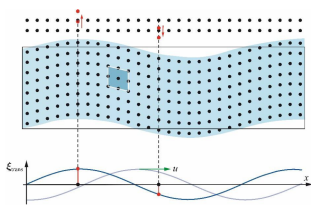
- Voraussetzung für **Ausbreitung** einer Welle ist **Kopplung** benachbarter Teilchen
- Störung kann von ganz unterschiedlicher Natur sein:
 - Druck in Luft
 - Auslenkung einer Position entlang einem Seil (Saite)
 - Elektrische Signale

→ Die Störung wird mit ξ beschrieben: $\xi = \xi(x, y, z, t)$

9.2 Klassifizierung von Wellen

Transversalwellen:

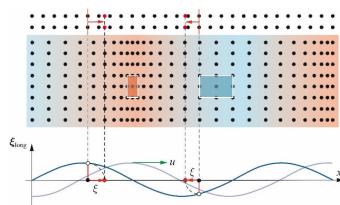
Welle breitet sich **senkrecht** zur Störung aus



Beispiel: Lichtwellen

Longitudinalwellen:

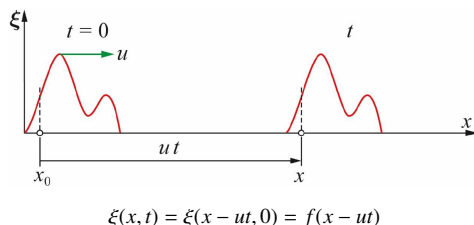
Welle breitet sich **parallel** zur Störung aus



Beispiel: Schallwellen

9.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit u

Die Störung an der Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ breitet sich mit der Geschwindigkeit u aus und erreicht nach einer Zeit t die Position x



In einem Medium mit grösserer Dichte breiten sich Wellen schneller aus!

⇒ Bessere Kopplung der Moleküle

Man schaut bei der Beschreibung der Fortbewegung auf den Ort. Die Verschiebung des Ortes wird mit der Zeit hineingebracht.

9.3.1 Verschiedene Wellengeschwindigkeiten

Schallwellen in Fluiden

$$u = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Schallwellen in Gasen

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Elastische Longitudinalwellen in einem schlanken Stab

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Elastische Transversalwellen

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Elektromagnetische Wellen (transversal)
(z.B. Lichtwellen)

$$u = \frac{c}{n}$$

- u Wellengeschwindigkeit
- A Querschnittsfläche
- E Elastizitätsmodul
- F Spannkraft des Seils / der Saite
- G Schubmodul
- M Molmasse
- p Druck
- R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
- T **Absolut**-Temperatur
- κ Kompressibilität
- γ Adiabatenexponent
- ρ Dichte
- n Brechungsindex
- c Lichtgeschwindigkeit: $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $[A] = \text{m}^2$
- $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
- $[F] = \text{N}$
- $[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
- $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
- $[p] = \text{Pa}$
- $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
- $[T] = \text{K}$
- $[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
- $[\gamma] = 1$
- $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $[n] = 1$
- $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.4 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen stellen eine **Verbindung zwischen Zeit und Ort** her.

Eindimensional

Welle breitet sich in 1D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Zweidimensional

Welle breitet sich in 2D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Dreidimensional

Welle breitet sich in 3D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

9.4.1 Wichtige Lösung der Wellengleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ansatz: $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x)$

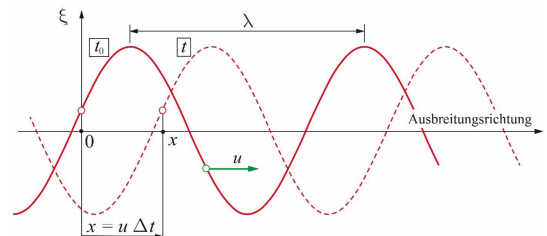
$$\underbrace{-k^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\omega^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$\text{mit Lösung } u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

9.5 Harmonische Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x + \varphi)$$

9.5.1 Terminologie



ξ_0	Amplitude	$[\xi_0]$
ω	Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
k	Wellenzahl	$[k] = \frac{1}{\text{m}}$
λ	Wellenlänge	$\lambda = \text{m}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$

9.5.2 Zusammenhänge

Grösse →	k	ω	f	u	T	λ
ausgedrückt mit →	k		$k \cdot u$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{k \cdot u}$	$\frac{2\pi}{k}$
	ω	$\frac{\omega}{u}$		$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	$\frac{2\pi u}{\omega}$
	f	$\frac{2\pi f}{u}$	$2\pi f$		$\frac{2\pi f}{k}$	$\frac{1}{f}$
	u	$\frac{\omega}{u}$	ku	$\frac{u}{\lambda}$		$\frac{\lambda}{u}$
	T	$\frac{2\pi}{u \cdot T}$	$\frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2\pi}{k \cdot T}$	
	λ	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{2\pi u}{\lambda}$	$\frac{u}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{T}$	$\frac{\lambda}{u}$

9.6 Wellenflächen / Wellenfronten

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand sind, bilden eine Fläche im Raum.

Diese **Flächen mit gleicher Phase** werden **Wellenflächen** oder **Wellenfronten** genannt.

Eine Welle kann sich in 3 Dimensionen ausbreiten und dabei **verschiedene Wellenflächen** zeigen.

9.7 Wellenausbreitung

Wellengleichung (3D)

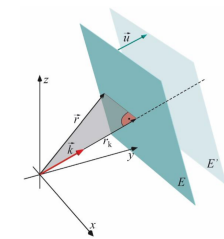
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Lösungsansatz

$$\xi = \xi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

mit Wellenvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ und Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

9.7.1 Ebene Wellen



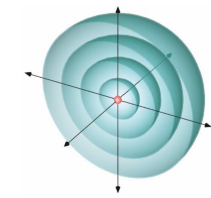
- Wellenfronten sind Ebenen im Raum
- Wellenvektor $\vec{k}$ steht senkrecht auf den Ebenen
- Abstand zw. zwei Wellenfronten ist λ

Die Ebenen bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k} \quad \text{mit } k = \|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

in die **Richtung**, die durch den **Wellenvektor** $\vec{k}$ gegeben ist.

9.7.2 Kugelwellen



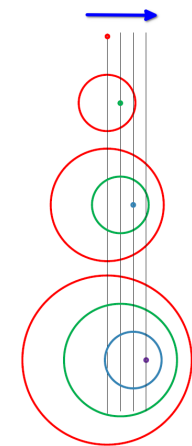
- Wellenfronten sind Kugeln
- Wellenvektor $\vec{k}$ steht senkrecht auf Wellenfronten
- Wellenfronten bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit vom Zentrum weg
- Amplitude nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab

Für eine **punktförmige Quelle** und **keine Winkelabhängigkeit** gilt:

Wellengleichung: $\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$

Lösungsansatz: $\xi(t, r) = \frac{1}{r} \xi_0 e^{i(\omega t - k r)}$

9.8 Bewegte Quellen



Die Quelle bewegt sich mit der **Geschwindigkeit** v_Q in eingezeichneter Richtung fort

Die Quelle verschiebt sich in der Zeit T um

$$\Delta x = v_Q \cdot T$$

9.8.1 Frequenzverschiebung durch Bewegung der Quelle

Die Quelle sendet eine Frequenz f aus. Durch die Bewegung der Quelle ändert sich die Wellenlänge λ und somit ergibt sich eine neue Frequenz f' , welche ein statischer Beobachter wahrnimmt.

$$f' = \frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_Q}{u}\right)} f$$

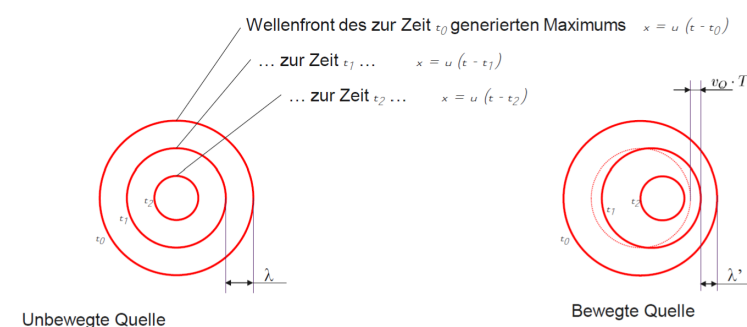
- + Quelle bewegt sich vom Beobachter weg
- Quelle bewegt sich zum Beobachter hin

λ	Wellenlänge der aussendeten Welle	$[\lambda] = \text{m}$
λ'	Wellenlänge der wahrgenommenen Welle	$[\lambda'] = \text{m}$
v_Q	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
f'	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$
T	Periodendauer (Dauer der Ausbreitung)	$[T] = \text{s}$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda - v_Q \cdot T \\ \lambda' &= \lambda - v_Q \frac{\lambda}{u} \\ \lambda' &= \lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u}\right) \\ f' &= \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u}\right)} = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_Q}{u}\right)} \end{aligned}$$

9.8.2 Bewegte Quelle vs. unbewegte Quelle

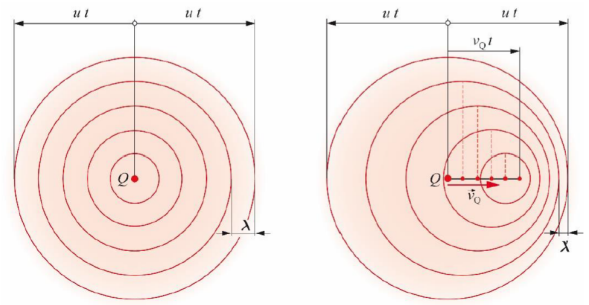


Unbewegte Quelle

Bewegte Quelle

9.9 Doppler Effekt

Die **Veränderung der Wellenlänge** λ der von einer **bewegten Quelle** ausgesandten Wellen ist als **Doppler Effekt** bekannt.



9.10 Bewegte Quelle mit Winkel

Die Quelle bewegt sich nicht direkt auf den Beobachter zu, sondern sie bewegt sich am **Beobachter vorbei**



$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(\theta_Q)} f$$

v_Q	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
f'	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$

9.10.1 Beispiel Winkel zw. Quelle und Beobachter

Gegeben: v_Q, θ, u, d, l **Gesucht:** $\frac{f'}{f}$

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(\theta_Q)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{d^2}{l^2} + 1 \quad \cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}}}$$

9.11 Bewegter Beobachter

$$f' = \left(1 \pm \frac{v_B}{u}\right) f$$

+ Beobachter geht auf Quelle zu
- Beobachter geht von Quelle weg

v_B	Geschwindigkeit des bewegten Beobachters	$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
v_Q	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f_B	Frequenz, welche Beobachter wahrnimmt	$[f_B] = \text{Hz}$
f_Q	Frequenz, welche Quelle 'aussendet'	$[f_Q] = \text{Hz}$

9.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter

$$f_B = \frac{u + v_B \cos(\theta_B)}{u - v_Q \cos(\theta_Q)} f_Q$$

$\theta_B = \theta_B$	siehe Skizze	$[\theta_B] = ^\circ$
v_B	Geschwindigkeit bewegter Beobachter	$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\theta_Q = \theta_Q$	siehe Skizze	$[\theta_Q] = ^\circ$
v_Q	Geschwindigkeit bewegte Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f_B	Frequenz beim bewegten Beobachter	$[f_B] = \text{Hz}$
f_Q	Frequenz bei der bewegten Quelle	$[f_Q] = \text{Hz}$

9.12.1 Optischer Doppler Effekt

Wird verwendet, wenn die Wellengeschwindigkeit u gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist!

Es spielt nur die **relative** Bewegung von Beobachter und Quellen eine Rolle

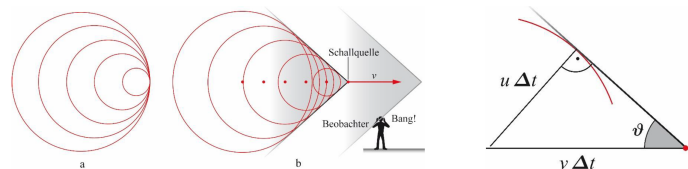
$$f' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\theta)} f \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad f' \approx \frac{1}{1-\beta \cdot \cos(\theta)} \cdot f$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \text{ und } \theta \approx \frac{\pi}{2} \quad f' \approx \frac{1}{1-\beta} \cdot f$$

9.12.2 Mach'scher Kegel

Wenn sich die Quelle schneller fortbewegt als die Wellengeschwindigkeit, dann entsteht ein Mach'scher Kegel



$$\sin(\theta) = \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{u}{v}$$

$$M = \frac{v}{u}$$

v	Geschwindigkeit der Quelle	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit)	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
M	Machzahl	$[M] = 1$

9.13 Wellenwiderstand, Energietransport – Schallwellen

9.13.1 Terminologie Wellenwiderstand

Der **Wellenwiderstand** Z (auch **Impedanz** genannt) beschreibt, wie ein Medium den Fluss von Energie beeinflusst.

⇒ 'Wie gut können sich Wellen in einem Medium ausbreiten?'

$$Z = \rho \cdot u = \frac{\Delta p_0}{v_0}$$

Z	Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
ρ	Dichte des Mediums	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0	Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
v_0	Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.13.2 Weitere Terminologien

Schalldruck	$p = \Delta p_0 \cos(\omega t - kx)$	$[p] = \text{Pa}$
Druckamplitude	$\Delta p_0 = \rho u v_0$	

Schallschnelle (Schnelle)	$v = v_0 \cos(\omega t - kx)$	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Schnellenamplitude	$v_0 = \omega \xi_0$	

9.13.3 Intensität der Schallwelle

Intensität = gemittelte Energieflussdichte

$$E_{\text{kin}} = \frac{\rho \cdot v^2}{4} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4} \quad E_{\text{pot}} = \frac{p^2 - p_0^2}{2 \rho u^2} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2}$$

$$I = u \cdot \bar{w} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 u = \frac{(\Delta p_0)^2}{2Z} = \frac{P}{A}$$

I	Schallintensität	$[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$\bar{w}$	Energieflussdichte	$[\bar{w}] = \frac{\text{Ws}}{\text{m}^2}$
	Pot. Energie ⇒ 'Kompression Gas'	
	Kin. Energie ⇒ 'Geschw. Teilchen'	
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v_0	Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
ξ_0	Amplitude	$[\xi_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0	Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
Z	Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
P	Leistung	$[P] = \text{W}$
A	(Abstrahl-) Fläche	$[A] = \text{m}^2$

9.14 Dispersion

Die **Abhängigkeit** der Wellengeschwindigkeit **von der Wellenlänge** wird als Dispersion bezeichnet.

⇒ Siehe Beispiel Optik Abschnitt 3.5

9.14.1 Dispersion bei Wasserwellen

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)}$$

Tiefes Wasser ($\lambda \ll h$)

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

Flaches Wasser ($\lambda \gg h$)

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

g	Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
λ	Wellenlänge	$[\lambda] = \text{m}$
σ	Oberflächenspannung	$[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
h	Wassertiefe	$[h] = \text{m}$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

10 Superposition von Wellen

Superposition beschreibt die Überlagerung (Addition) von Wellen

- Linearität der Wellengleichung
- Die Summe zweier Lösungen der Wellengleichung ist auch eine der Wellengleichung.

Das Superpositionsprinzip erlaubt die Darstellung von periodischen Wellen als eine Summe von harmonischen Wellen.

10.1 Schwebung

Superposition von Wellen mit **unterschiedlichen** Frequenzen ⇒ Hörbar als ein 'Flattern'

$$f_{\text{Schwebung}} = f_2 - f_1$$

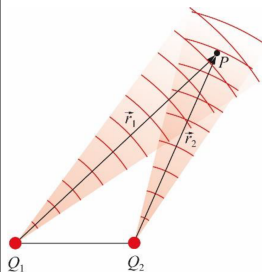
$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin(\bar{\omega} t) \cdot \cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

10.2 Interferenz

Superposition von Wellen mit **gleichen** Frequenzen



$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega t - k r_1)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right)$$

- ⇒ Der cos-Term hängt nur vom Ort ab!
- ⇒ Es gibt **Orte**, an denen Welle sich auslöscht!

10.3 Kohärenz

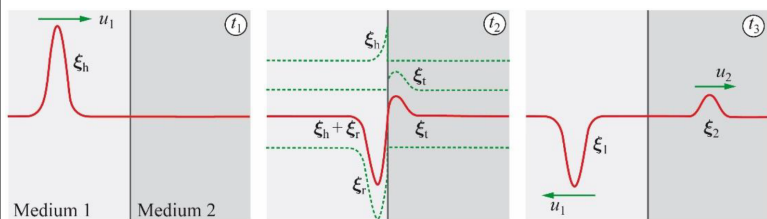
Zwei Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn eine **feste Phasendifferenz** zwischen den beiden Wellen besteht.

- Kohärenz ist eine **Vorbedingung**, damit sich eine **Interferenz** bilden kann
- **Kohärenzlänge** ist der **maximale Streckenunterschied**, den zwei Wellen haben dürfen, damit eine (**stabile**) **Interferenz** beobachtet werden kann.

10.4 Reflexion und Transmission

10.4.1 Verhalten von Wellen an Grenzflächen von zwei Medien

Ein Teil der Welle wird reflektiert und ein Teil wird transmittiert

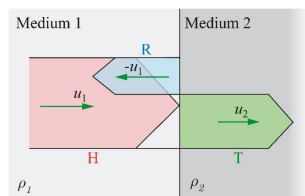


Physikalische Bedingung:

Stetigkeit der Wellenfunktion und der Ableitung an der Grenzfläche

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$$

10.4.2 Intensität von Reflexion und Transmission



$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

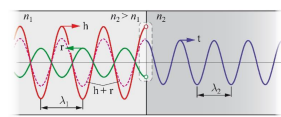
$$T = \frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$\sqrt{R} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{u_R}{u_H} = \frac{A_R}{A_H} = \frac{p_R}{p_H} = \dots$$

$$\frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{u_T}{u_H} = \frac{A_T}{A_H} = \frac{p_T}{p_H} = \dots$$

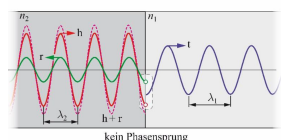
R	Reflexionskoeffizient	$[R] = 1$
T	Transmissionskoeffizient	$[T] = 1$
u_H	Geschwindigkeit hinlaufende Welle	$[u_H] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u_R	Geschwindigkeit reflektierte Welle	$[u_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u_T	Geschwindigkeit transmittierte Welle	$[u_T] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
p_H	Druck hinlaufende Welle	$[p_H] = \text{Pa}$
p_R	Druck reflektierte Welle	$[p_R] = \text{Pa}$
p_T	Druck transmittierte Welle	$[p_T] = \text{Pa}$
A_H	Amplitude hinlaufende Welle	$[A_H] = 1$
A_R	Amplitude reflektierte Welle	$[A_R] = 1$
A_T	Amplitude transmittierte Welle	$[A_T] = 1$
Z_i	Wellenwiderstand im Medium i	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

10.4.3 Phasensprünge bei Reflexionen



Reflexion an 'dichtem' Material
⇒ **Phasensprung**

dicht: $n_2 > n_1$
kleinere Wellengeschwindigkeit, **größerer** Wellenwiderstand



Reflexion an 'dünnem' Material
⇒ **kein Phasensprung**

10.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen

10.5.1 Elektromagnetische Wellen in Doppelleiter

$$U_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$U_t = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$I_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

$$I_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

Kabel mit kurzgeschlossenem Ende $Z_2 = 0$:

$$U_r = -U_h$$

$$U_1 = U_h + U_r = U_h - U_h = 0$$

Kabel mit offenem Ende $Z_2 = \infty$:

$$I_r = -I_h$$

$$I_1 = I_r + I_h = I_r - I_r = 0$$

U_r	Reflektierte Spannung	$[U_r] = \text{V}$
U_h	Eintreffende Spannung	$[U_h] = \text{V}$
I_r	Reflektierter Strom	$[I_r] = \text{A}$
I_h	Eintreffender Strom	$[I_h] = \text{A}$
Z_i	Wellenwiderstand im Medium i	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

10.5.2 Elektromagnetische Wellen in homogenem Milieu

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 = Z_0 \frac{c}{n}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

R	Reflexionskoeffizient	$[R] = 1$
Z_i	Wellenwiderstand im Medium i	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
μ_r	Permeabilitätszahl	$[\mu_r] = 1$
ϵ	Dielektrizitätszahl	$[\epsilon_r] = 1$
n_i	Brechungsindex von Medium i	$[n] = 1$

ϵ_0	Ele. Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
μ_0	Magn. Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Ns}}{\text{Am}}$
Z_0	Wellenwiderstand Vakuum	$Z_0 \approx 376.73 \Omega$
c	Lichtgeschwindigkeit	$c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

11 Stehende Wellen

11.1 Terminologie

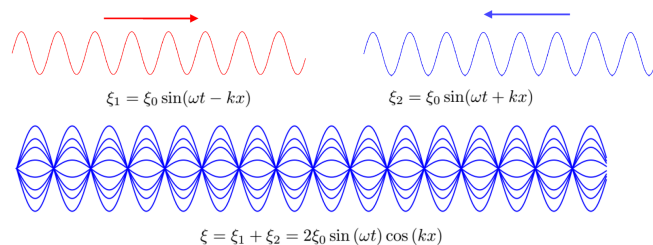
Eine **stehende Welle** ist eine Welle, bei der Orte maximaler Auslenkung (oder minimaler Auslenkungen) sich **nicht fortbewegen**.

- Ort- und Zeitabhängigkeit sind separiert
- Die Welle bewegt sich nicht im Raum ('Muster bleibt stehen')

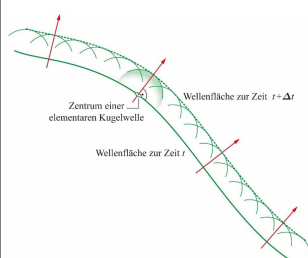
$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx) \Rightarrow \sin(\cdot)\text{-Terme sind auch erlaubt!}$$

- Orte, wo die Welle für alle Zeit $= 0$ ist heißen **Wellenknoten**
⇒ **Zwei benachbarte Knoten sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**
- Orte, wo die Welle eine maximale Auslenkung erreicht, heißen **Wellenbauch**
⇒ **Zwei benachbarte Bäuche sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

11.2 Entstehung von stehenden Wellen



11.3 Prinzip von Huygens



Jedes Flächenelement auf einer Wellenfläche kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden.
Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende aller dieser Elementarwellen.

11.4 Eigenschwingungen – 1D

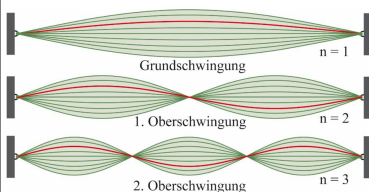
$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{u}{\lambda_n}$$

$$\text{Auslenkung max: } k_n \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

11.4.1 Saite

- Reflexion an einer Grenzfläche → Stehende Welle
- Stehende Welle muss in vorhandenen Raum passen ⇒ Geometrische Bedingung
- Knoten an beiden Enden**



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

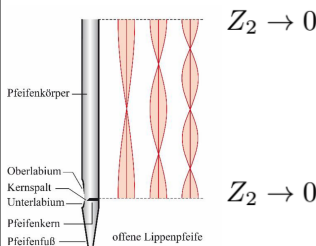
$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

k_n	Wellenzahl	$[k_n] = \frac{1}{\text{m}}$
l	Länge der Saite	$[l] = \text{m}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
λ_n	Wellenlänge	$[\lambda_n] = \text{m}$
n	Ganze Zahl	$[n] = 1$
ω	Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
A	Querschnitt der Saite	$[A] = \text{m}^2$

11.4.2 Pfeifen

Offene Pfeiffe:

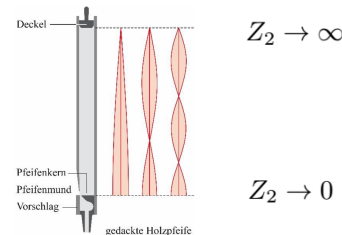
Länge $l = \frac{\lambda}{2}$



Auslenkung an Enden:
Wellenbauch

Gedackte Pfeiffe:

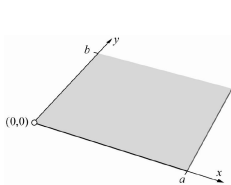
Länge $l = \frac{\lambda}{4}$



Auslenkung offenes Ende:
Wellenbauch
Auslenkung gedacktes Ende:
Knoten (max. Auslenkung)

11.5 Eigenschwingungen – 2D

11.5.1 Rechteckige Membrane



$$\xi(x, y, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\text{Wellenvektor: } k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Randbedingungen:

Auslenkung = 0

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b}$$

12 Beugung

12.0.1 Terminologie

Die **Richtungsänderungen** der Wellenausbreitung in einem homogenen Medium durch **Hindernisse** wird als **Beugung (Diffraction)** bezeichnet.

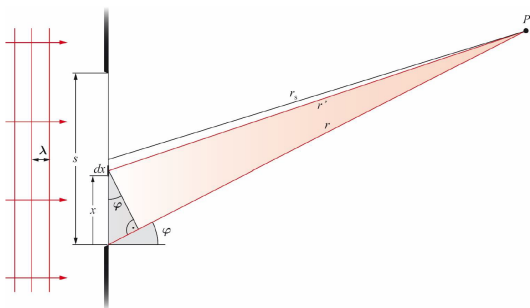
- Das Hindernis kann eine Kante, ein Spalt oder ein kleines Objekt sein
- Beugung tritt auf, wenn das **Hindernis** von **ähnlicher Grösse** ist, wie die **Wellenlänge**

⇒ **Beugung tritt auf, wenn eine Welle limitiert wird!**

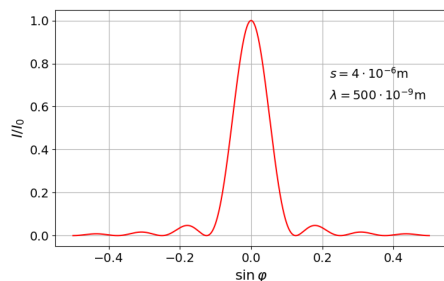
Dies gilt insbesondere für: Spalt, Kante, Loch (Pinhole), Objektiv-Öffnung

12.1 Beugung – Spalt

12.1.1 Beschreibung Setup



12.1.2 Intensität nach dem Spalt



$$I_s \propto \frac{A^2}{r^2} \frac{\sin^2\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)}{\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)^2}$$

Minima der Intensität:

$$\sin(\varphi) = n \frac{\lambda}{s}$$

I_s Intensität

s Länge des Spalts

λ Wellenlänge

n Ordnung (typ. 1)

A Amplitude

r siehe Bild Abschnitt 12.1.1

φ Einfallswinkel der Welle zum Spalt

Hinweis: Oft muss gegebenes φ durch 2 geteilt werden!

$$[I_s] = \frac{W}{m^2}$$

$$[s] = m$$

$$[\lambda] = m$$

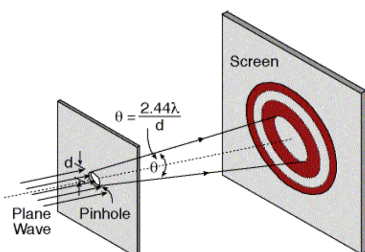
$$[n] = 1$$

$$[A] =$$

$$[r] = m$$

$$[\varphi] = ^\circ$$

12.2 Beugung – Runde Öffnung (2D)



Nullstelle erster Ordnung:

$$\sin(\varphi) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

λ Wellenlänge

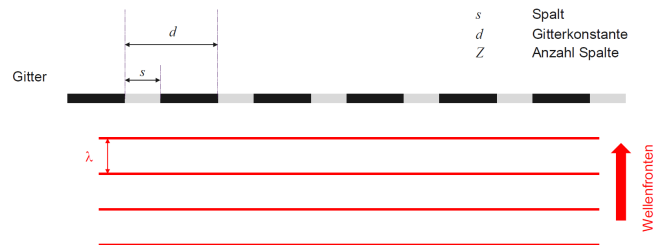
$$[\lambda] = m$$

D Loch-Durchmesser

$$[D] = m$$

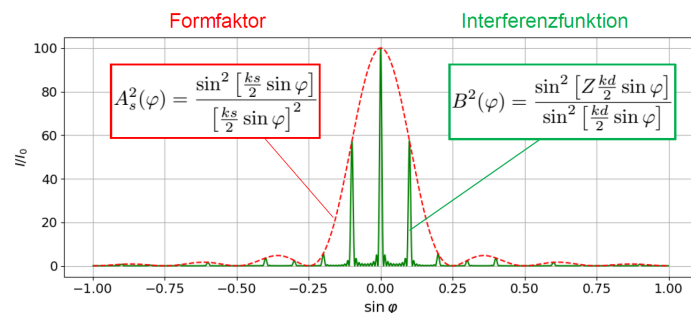
12.3 Beugung – Gitter

12.3.1 Beschreibung Setup



12.3.2 Intensität nach dem Gitter

$$I_G = \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$$



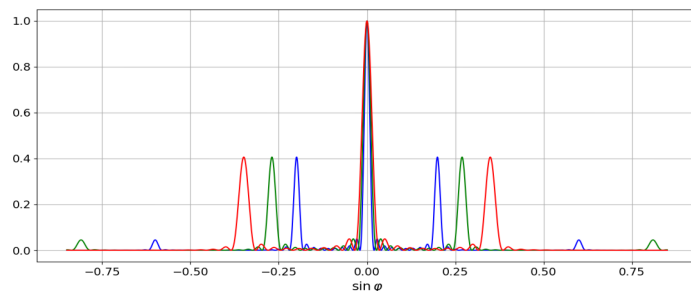
$A_s^2(\varphi)$ hat Nullstellen bei $n \frac{\lambda}{s}$ (hängt von s ab)

$B^2(\varphi)$ hat Hauptmaxima bei $n \frac{\lambda}{d}$ und $Z - 2$ Nebenmaxima dazwischen (hängt von Z und d ab)

I_G	Intensität nach Gitter	$[I_G] = \frac{W}{m^2}$
k	Wellenzahl	$[k] = \frac{1}{m}$
s	Spalt	$[s] = m$
d	Gitterkonstante	$[d] = m$
Z	Anzahl Spalte	$[Z] = 1$

12.3.3 Auflösungsvermögen

Verschiedene Wellenlängen können getrennt (aufgelöst) werden



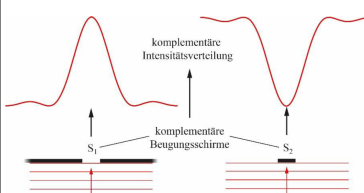
Kriterium:

Zwei Wellenlängen werden gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum von λ_2 mit dem Minimum von λ_1 zusammenfällt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nZ$$

λ	Wellenlänge	$[\lambda] = m$
$\Delta\lambda$	Unterschied der Wellenlängen	$[\Delta\lambda] = m$
n	Ordnung der Beugung (typ. 1)	$[n] = 1$
Z	Anzahl der Spalten	$[Z] = 1$

12.4 Babinet-Prinzip



Ausserhalb des Bereichs geometrisch-optischer Abbildung produzieren komplementäre Beugungsschirme gleiche Beugungsbilder

13 Akustik

13.1 Terminologie

Ton:

Eine harmonische Schallwelle wird als **Ton** bezeichnet.

Ein (reiner) Ton entspricht also einer **Schallschwingung**, die **eine einzige Frequenz** enthält.

Klang:

Eine **Überlagerung** von harmonischen Schwingungen, deren **Frequenzen** in einem **ganzzahligen Verhältnis** zur tiefsten Frequenz, zur Frequenz des **Grundtons**, stehen, wird **Klang** genannt.

Geräusch:

Bei einem **Geräusch** besteht das Frequenzspektrum nicht mehr aus einzelnen diskreten Linien, sondern weist in einem bestimmten Frequenzbereich eine **kontinuierliche Verteilung** auf.

13.2 Pegel

'Einheit': Bel:

'Einheit': Dezibel:

$$\text{Pegel} = \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\text{Pegel}}$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\left(\frac{\text{Pegel}}{10}\right)}$$

Pegel	Dimensionslose Grösse	[Pegel] = 1
x	Zu vergleichende Grösse	[x]
b_0	Basisgrösse	[b_0] = [x]

13.3 Schallintensität

$$L_I = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff}0}}\right)$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

L_I	Schallintensitätspegel	[L_I] = dB
L_p	Schalldruckpegel	[L_p] = dB
I	Intensität	[I] = $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
p_{eff}	Schalldruck (Effektivwert)	[p_{eff}] = Pa
Δp_0	Druckamplitude	[Δp_0] = Pa
I_0	Bezugsintensität	$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$p_{\text{eff}0}$	Bezugsschalldruck	$p_{\text{eff}0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$

13.4 Intensität bei Kugelwellen

ohne Dämpfung

mit Dämpfung

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-\alpha r}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2 - r_1)}$$

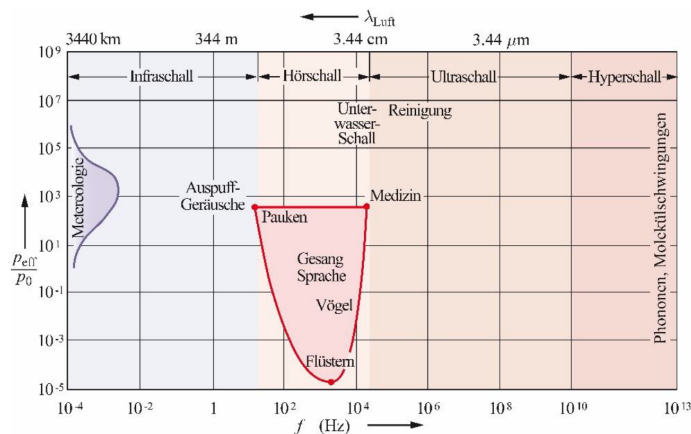
Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

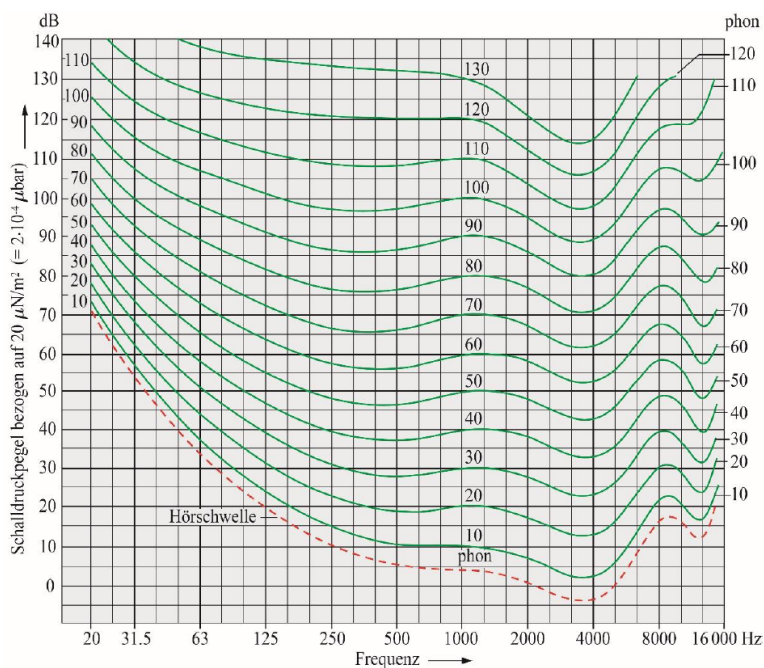
$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - K(r_2 - r_1)$$

$I(r)$	Intensität	[$I(r)$] = $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
P	Leistung	[P] = W
r_i	Abstand (Radius) zum Wellenursprung	[r_i] = m
L_i	Pegel	[L_i] = dB
α	Absorptionsgrad ($\alpha = 1 - R$, siehe 10.4.2)	[α] = 1
K	Dämpfung	[K] = $\frac{\text{dB}}{\text{m}}$

13.5 Verschiedene Schallquellen



13.6 PHON-Skala



13.7 Schalldämpfung / Schalldämmung

13.7.1 Schalldämpfung

Schalldämpfung bedeutet eine **Abschwächung** der Schallwellen durch **Absorption**. Schallenergie wird in **'Wärme'** **umgewandelt**, d.h. durch die Absorption von Energie werden das von den Schallwellen durchdrungene Medium oder die das Schallfeld begrenzenden Körper **erwärmt**.

Verschiedene Arten von Absorption für Schalldämpfung Innen:

- Poröse Schicht (mit oder ohne perforierte Abdeckung)
- Akustikplatte
- Plattenresonator
- Helmholtz-Resonator

13.7.2 Schalldämmung

Schalldämmung ist die **Behinderung der Schallausbreitung** durch **reflektierende** Hindernisse. Mauern, Türen und Fenster bewirken eine Schalldämmung für den von aussen in das Gebäude eindringenden Schall. Auch die Ausbreitung von Schall innerhalb eines Gebäudes wird durch die Schalldämmung von Zwischenwänden und Türen abgeschwächt. Im Freien wird durch Schallschutzwände eine Schalldämmung für die dahinterliegenden Gebäude erreicht.

13.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass

Bei der Schallübertragung muss zwischen **Luftschall** und **Körperschall** unterschieden werden.

13.8.1 Luftschalldämmung

Es gibt Schallquellen, die ihre Schallenergie (fast) ausschliesslich in die Luft abstrahlen. Beispiele: menschliche Stimme, Geigen, Lautsprecher und Blasinstrumente

13.8.2 Körperschalldämmung

Andere Schallerzeuger übertragen die Schallschwingungen nicht nur auf die Luft, sondern auch direkt auf feste Körper. Streichinstrumente, wie Cello oder Bassgeige, und Klavier oder Flügel übertragen die Schallschwingungen auch direkt auf den Fussboden. Wird ein Nagel in die Wand geschlagen, so wird ein grosser Anteil des erzeugten Schalls als Körperschall übertragen.

Beispiele: Trittschall, Wasserleitungsgeräusche

13.9 Schalldämm-Mass

$$\mathcal{R} = 10 \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

13.10 Anhall / Nachhall

13.10.1 Anhall

Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich eine konstante Energiedichte der Schallwellen im Raum aufgebaut hat. Dieser Vorgang wird Anhall genannt. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des Ohrs wird er praktisch nicht wahrgenommen.

13.10.2 Nachhall

Die von den Begrenzungsflächen des Raumes mehrfach reflektierten Wellen bewirken andererseits, dass beim plötzlichen Abschalten einer Schallquelle der Schall nicht sofort verschwindet, sondern allmählich abklingt. Dieses Phänomen wird Nachhall genannt und ist im Gegensatz zum Anhall deutlich wahrnehmbar.

Per Definition ist die Nachhallzeit jene Zeitspanne, in welcher der Schallpegel im Raum um 60 dB sinkt.

13.10.3 Nachhallzeit T_N

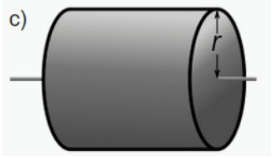
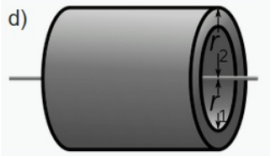
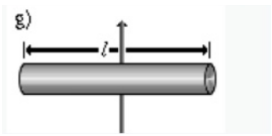
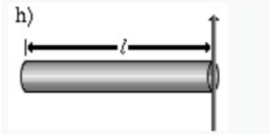
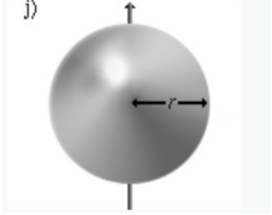
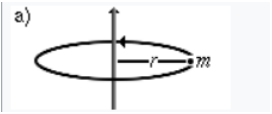
$$T_N = 0.16 \frac{s}{m} \frac{V}{\sum_i \alpha_i A_i}$$

T_N	Nachhallzeit	$[T_N] = s$
V	Raumvolumen	$[V] = m^3$
α_i	Absorptionsgrad	$[\alpha_i] = 1$
A_i	Teilfläche der Raumbegrenzung mit Absorption α_i	$[A_i] = m^2$

IV Anhang

14 Anhang

14.1 Massenträgheitsmomente

Zylinder / Scheibe c)  $J = \frac{1}{2} m r^2$	Hohlzylinder d)  $J = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$
Dünner Stab (Mitte) g)  $J = \frac{1}{12} m l^2$	Dünner Stab (Ende) h)  $J = \frac{1}{3} m l^2$
Kugel j)  $J = \frac{2}{5} m r^2$	Massenpunkt a)  $J = m r^2$

14.2 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

14.2.1 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \sin(\pi + a) &= -\sin(a) \\ \cos(-a) &= \cos(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$$

14.2.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) & \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$$

14.2.3 Summen und Differenzen

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} \end{aligned}$$

14.2.4 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{aligned}$$

14.2.5 Winkelveelfache und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cdot \cos(a) & \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \sin(3a) &= 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a) & \cos(3a) &= 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a) \\ \sin\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} & \cos\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))} \end{aligned}$$

14.2.6 Potenzen

$$\begin{aligned} \sin^2(a) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) & \cos^2(a) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \\ \sin^3(a) &= \frac{1}{4} (3 \sin(a) - \sin(3a)) & \cos^3(a) &= \frac{1}{4} (\cos(3a) + 3 \cos(a)) \end{aligned}$$