

## Wellen generell

- ist ein Transport von Energie
- es wird keine Masse verschoben

Wellenarten:

- Longitudinalwellen: gerade Schwingung (Schallwellen)
- Transversalwellen: Sinusschwingung (Wasserwellen)

## Wichtige Beziehungen

$$u = \lambda \cdot \nu$$

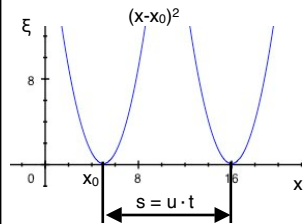
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$v = \frac{1}{T}$$

u = Geschwindigkeit [m/s]  
λ = Wellenlänge [m]  
ν = Frequenz [1/s]  
k = Wellenzahl [1/m]  
ω = Kreisfrequenz [rad/s]  
T = Periode [s]

## Wellengeschwindigkeiten (I)



ξ = Auslenkung ("Xi")  
u = Geschwindigkeit

$$\xi(x,t) = (x-x_0)^2$$

ξ(x,t) = (x-ut, 0), wenn Welle nach rechts läuft  
ξ(x,t) = (x+ut, 0), wenn Welle nach links läuft

Elastische Longitudinalwellen  
in einem schlanken Stab:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Elastische Transversalwellen:

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Transversalwellen auf einem  
Seil oder Saite:

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

Schwerewellen in flachen  
Wasser:

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

λ < Wassertiefe  
(Tsunami)

Schwerewellen in tiefen  
Wasser:

$$u = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

λ > Wassertiefe

## Wellengeschwindigkeiten (II)

Schallwellen in Gasen:

$$u = \sqrt{\frac{\chi \cdot p}{\rho}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\chi RT}{M}}$$

Mittlere mol-Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}} = 2 \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}$$

u = Geschwindigkeit [m/s]  
E = Elastizitätsmodul [N/mm<sup>2</sup>]  
ρ = Dichte [kg/m<sup>3</sup>]  
G = Schubmodul [N/mm<sup>2</sup>]  
F = Kraft [N]  
A = Fläche [m<sup>2</sup>]  
h = Wassertiefe [m]  
λ = Wellenlänge [m]  
χ = Adiabatenkoeffizient (Tab. 18)  
T = Temperatur [K] (0°C = 273K)  
R = Gaskonstante [8.314]  
M = Molmasse [kg/mol] (aus PSE)  
k = Boltzmann-Konst. [1.381 · 10<sup>-23</sup> J/K]  
v̄ = mittlere mol-Geschw. [m/s]  
p = Druck [Pa] (1 bar = 10<sup>5</sup> Pa)

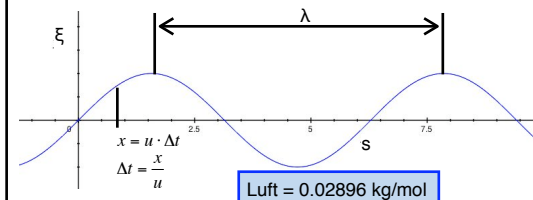
$$\frac{kg}{dm^3} \cdot 1000 = \frac{kg}{m^3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Luft = 0.02896 kg/mol

m/s \* 3.6 = km/h

## Harmonische (Sonnenlicht)



$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx + \phi_0)$$

wenn keine Phasen-  
verschiebung φ<sub>0</sub> = 0

$$u = \lambda \cdot \nu$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$k = \frac{\omega}{u}$$

$$T = \frac{1}{\nu}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

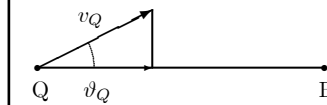
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

u = Geschwindigkeit [m/s]  
λ = Wellenlänge [m]  
ν = Frequenz [1/s]  
ξ = Amplitude [m]  
ξ<sub>0</sub> = Amplitude [m]  
k = Wellenzahl [1/m]  
ω = Kreisfrequenz [rad/s]  
T = Periode [s]  
φ<sub>0</sub> = Phasenverschiebung [m]

## Doppler Effekt

### Akustischer Doppler-Effekt (Schallwellen)

$$u = \lambda \cdot \nu$$



Bewegte Quelle  
Ruhender Beobachter

$$\nu' = \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c} \cdot \cos(\theta_Q)} \cdot \nu$$

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c} \cdot \cos(\theta_Q)} \cdot \nu$$

Wenn kein Winkel  
angegeben cos(θ) = 1

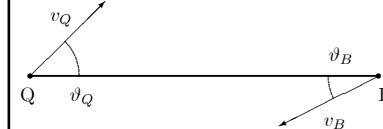
Ruhende Quelle  
Bewegter Beobachter

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) \nu$$

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) \nu$$

Bewegte Quelle (mit Frequenz) und bewegter Beobachter kommen aufeinander zu:  
1. ν'(Bewegte Quelle) mit gegebener Frequenz ausrechnen  
2. ν'(Bewegter Beobachter) mit ν = ν'(Bewegte Quelle) ausrechnen

### Optischer Doppler-Effekt (elektromagnetische Wellen) / Radar



u = Geschwindigkeit [m/s]  
β = Relativgeschwindigkeit [-]  
λ = Wellenlänge [m]  
ν = Frequenz [Hz]  
v<sub>Q</sub> = Geschwindigkeit Quelle [m/s]  
v<sub>B</sub> = Geschwindigkeit Beobachter [m/s]  
c = Lichtgeschwindigkeit (Optisch) (Tab. 38)  
Schallgeschwindigkeit (Schall) (Tab. 35)  
θ = Winkel v-Vektor zur Gerade QB [°]

$$\nu' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)} \cdot \nu$$

$$\beta = \frac{v_B}{c}$$

$$\beta = \frac{v_Q}{c}$$

Linearisierung:

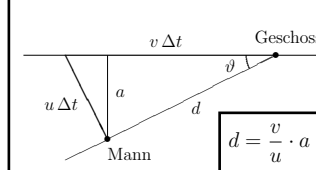
$$f(\beta + \Delta\beta) = (1 + \beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\beta + \Delta\beta) = f(\beta) + f'(\beta) \cdot \Delta\beta$$

$$f'(\beta) = f'(\beta) + f'(\beta) \cdot \beta$$

Man kann β=0 setzen, da es unendlich  
klein ist. Nach dem Umformen ergibt  
sich dann die obige Gleichung.

## Mach'schen Kegel



$$\sin \theta = \frac{u}{v}$$

$$\sin \theta = \frac{a}{d}$$

u = Schallgeschwindigkeit [m/s]  
v = Objektgeschwindigkeit [m/s]  
a = Abstand zum Beobachter [m]  
d = Distanz [m]

Wie weit ist ein Objekt weg bis man es hört.

## Schallwellen

Schallwellen sind immer Longitudinal!

Schallausschlag (Amplitude):

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k \cdot T$$

$$E_{kin} = \frac{3}{2} k \cdot T$$

Intensität:

$$I = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot u$$

u = Schallgeschwindigkeit [m/s] (Tab. 35)

$\omega$  = Kreisfrequenz [rad/s]

t = Zeit [s]

k = Wellenzahl [1/m]

T = Periode [s] ???

m = Masse [kg]

p^ = Schalldruck [N/m^2]

$\rho$  = Dichte [kg/m^3]

I = Intensität [W/m^2]

$\xi$  = Auslenkung [m]

$\nu$  = Frequenz [1/s]

Schallausschlag (Amplitude):

$$p(x, t) = p_0 + \tilde{p}$$

Schalldruck:

$$\hat{p} = \Delta p_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta p_0 = \rho \cdot \xi_0 \cdot \omega \cdot u$$

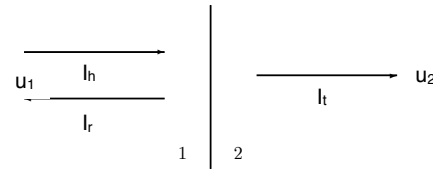
Schallschnelle (v):

$$v = v_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$v_0 = \xi_0 \cdot \omega$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 1000 = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

## Reflexion und Transmission



$$I_r = R \cdot I_h$$

$$I_h = I_r + I_t$$

$$I_t = T \cdot I_h$$

$$R = \left( \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$$

$$T = 1 - R = \frac{4z_1 \cdot z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$Z = Z_0 \cdot \frac{c}{n}$$

$$z = \rho \cdot u$$

u = Geschwindigkeit [m/s]

$\rho$  = Dichte des Materials [kg/m^3]

$I_r$  = Intensität reflektiert [W/m^2]

$I_t$  = Intensität transmittiert [W/m^2]

$I_h$  = Intensität herein [W/m^2]

Z = Wellenwiderstand [ $\Omega$ ]

T = Transmissionskoeffizient (0-1 => 0-100%)

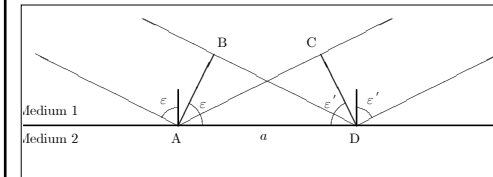
R = Reflexionskoeffizient (0-1 => 0-100%)

c = Schallgeschwindigkeit (Tab. 35)

n = Brechungsindex [-]

$$u = \frac{c}{n}$$

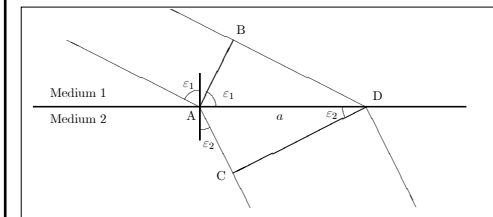
## Huygens (Brechung)



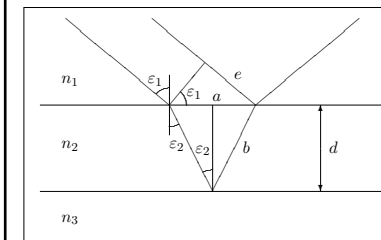
$$u_1 < u_2 = \sin(\epsilon') > \sin(\epsilon)$$

$$\frac{\sin(\epsilon)}{\sin(\epsilon')} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\epsilon = \epsilon'$$



Am Stahl wird die ganze Welle zu 100% reflektiert. Allgemein wird alles reflektiert wenn die Oberfläche des Materials  $1/4 \lambda$  beträgt.



Wenn die Welle von einem leichten Medium ( $n=1$ ) in ein schweres ( $n > 1$ ) fällt, gibt es einen Phasensprung von  $\pi$ . Umgekehrt passiert nichts.

## Interferenzen

Wellen beeinflussen sich gegenseitig. löschen sich aus, vergrößern sich

$$\xi_A = \xi(s_1, t) + \xi(s_2, t)$$

$$\xi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\xi(s_1, t) = A/2 \sin(ks_1 - \omega t)$$

$$\xi(s_2, t) = A/2 \sin(ks_2 - \omega t)$$

$$\xi(x_A, t) = A \cdot \cos\left(\frac{k \cdot (s_1 - s_2)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot (s_1 + s_2)}{2} - \omega t\right)$$

Amplitude  
 $A(\Delta s)$

Welle  
 $\sin(kx - \omega t)$

$$x = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

Maximale Amplitude: ( $\cos = 1$ )  
verstärken sich

$$\frac{k \cdot \Delta s}{2} = \pi \cdot n$$

$$\frac{2\pi \cdot \Delta s}{\lambda} = \pi \cdot n$$

$$\Delta s = n \cdot \lambda \quad n \in \mathbb{N}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\Delta s$  = Wegunterschied [m]

Minimale Amplitude: ( $\cos = 0$ )  
löschen sich aus

$$\frac{k \cdot \Delta s}{2} = \pi \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Delta s = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

## Schwebung

$$T_s = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

$$f_s = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

resultierende Frequenz  
( $f_1$  und  $f_2$  in gleicher Richtung)

$$f_s = f_1 - f_2$$

$$f_s = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

resultierende Frequenz  
( $f_1$  und  $f_2$  in entgegengesetzter Richtung)

$f_1$  = Frequenz Schallwelle 1 [Hz]

$f_2$  = Frequenz Schallwelle 2 [Hz]

$f_s$  = Schwebungsfrequenz [Hz]

$T_s$  = Schwebungsdauer [s]

Die Überlagerung zweier Schallwellen gleicher Ausbreitungsrichtung ergibt bei geringer Frequenzdifferenz eine Schwebung.

## Stehende Wellen

$$\xi_1(x,t) \rightarrow \xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\xi_2(x,t) \leftarrow \xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$

$$\xi(x,t) = \rho_0 \cdot 2 \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Ort  
A(x)

Zeit

$$A(x) \cdot \alpha \cdot \sin(kx)$$

$$\sin(kx) = 0 \quad kx = n\pi$$

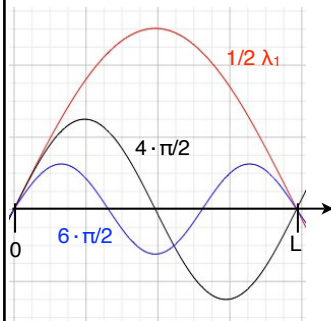
$$x = n \frac{\pi}{k}$$

$$x = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\xi(x,t) = A(x) \cdot \cos(\omega t)$$

$$A(x) = 2 \cdot \xi_0 \cdot \sin(kx)$$

Eingespannte Saite (gilt auch für Balken, 2-seitig eingespannt)



$$\lambda_1 = 2L \quad \omega_1 = u \frac{2\pi}{2L} = \pi \frac{u}{L}$$

$$\lambda_2 = L \quad \omega_2 = u \frac{2\pi}{L} = \pi \frac{u}{L} \cdot 2$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad \omega_3 = u \frac{8 \cdot \pi \cdot 3}{8L} = \pi \frac{u}{L} \cdot 3$$

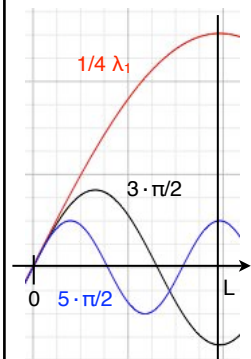
$$\omega = u \cdot k = u \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega_n = \pi \frac{u}{L} \cdot n$$

$$v_n = \frac{u}{2L} \cdot n$$

$v$  = Frequenz [1/s]  
 $\omega$  = Kreisfrequenz [rad/s]  
 $L$  = Länge [m]

Einseitig fixierter Balken



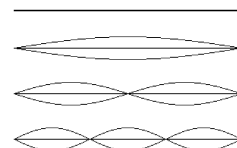
$$\lambda_1 = 4L$$

$$\lambda_2 = \frac{4L}{3}$$

$$\lambda_3 = \frac{4L}{5}$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

$$\omega_n = u \cdot \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{u\pi}{L} \left( n - \frac{1}{2} \right)$$

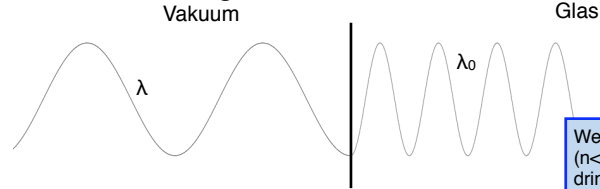


$n = 1$ : Grundschiwingung

$n = 2$ : 1. Oberschiwingung

$n = 3$ : 2. Oberschiwingung

## Wellenausbreitung von Licht



$$u = \frac{c}{n}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$n$  = Brechungsindex [-]

Wenn das Licht von einem leichten Material ( $n < 1$ ) in ein schweres Material ( $n > 1$ ) eindringt, erfolgt eine Phasenverschiebung um  $\pi$ . (Umgekehrt passiert nichts.)

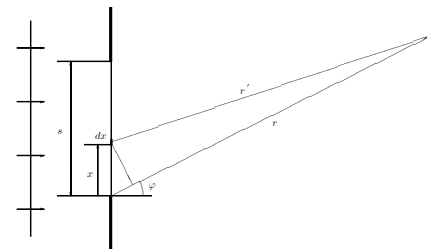
## Beugung / Brechung

Beugung: Die Welle wird gebogen. (Z.B. Haufenmauer)

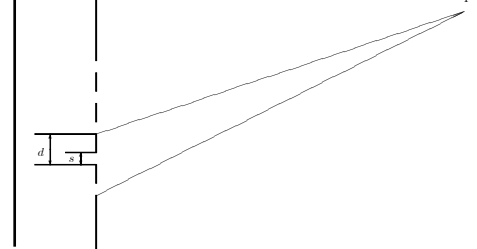
Brechung: Geschieht nur zwischen zwei verschiedenen Materialien

## Beugung

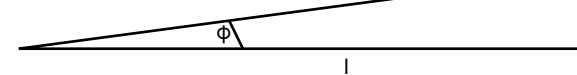
Beugung am Spalt



Beugung am Gitter



Idee:



$$\tan(\varphi) = \frac{d}{l}$$

$$\tan(\varphi) \approx \sin(\varphi)$$

Da  $\tan(\varphi)$  sehr klein

Nullstelle Spalt

$$\sin(\varphi)_n = n \frac{\lambda}{s}$$

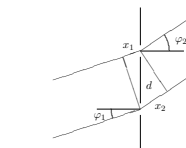
Nullstelle Gitter

$$\sin(\varphi)_n = n \frac{\lambda}{d}$$

Nullstelle Kreisförmig

$$\sin(\varphi)_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Bei  $n$  ist meistens 1 einzusetzen



$$\sin(\varphi_2) = \sin(\varphi_1) + n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{n}$$

Wichtig ist nur die Spaltbreite, die Dicke ist egal.

Ob Spalt oder Faden ist kein Unterschied. Beides hat zwei Kanten

Beugung tritt an allen Kanten auf.

Nullstelle: Diese Stellen an der projizierten Fläche, an denen sich die Wellen überlagern und sich somit auslöschen

$\phi$  = Winkel [°]

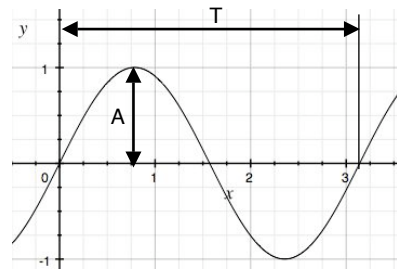
$l$  = Abstand zur projizierten Fläche [m]

$d$  = Abstand von hell-/dunkel-Stellen [m]

$s$  = Spaltbreite [m]

$D$  = Durchmesser der Öffnung [m]

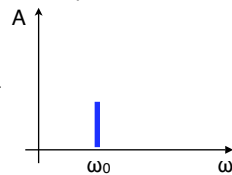
## Ton



$$\xi = \Delta p$$

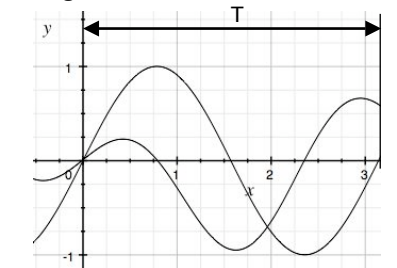
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tonspektrum



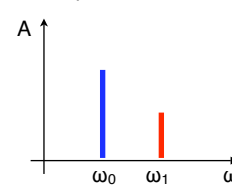
welche Schwingungen habe ich

## Klang

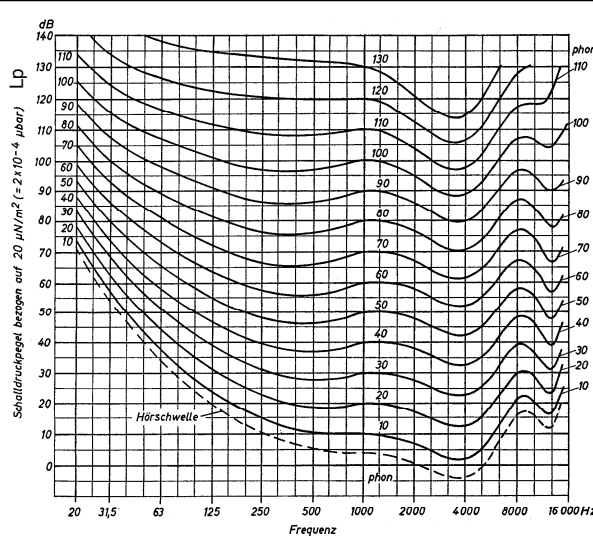
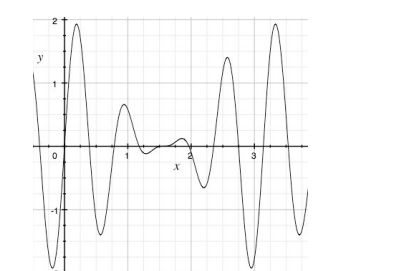


$$\xi = \Delta p$$

Tonspektrum



## Geräusch



Bei 1000 Hz entspricht Phon = dB

Dichte von Gas

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

$\rho$  = Dichte [kg/m³]  
T = Temperatur [K] (0°C = 273K)  
R = Gaskonstante [8.314]  
M = Molmasse [kg/mol] (aus PSE)  
p = Druck [Pa] (1 bar = 10⁵ Pa)

## Dämpfung

Dämpfung

$$D = d \cdot (l_2 - l_1)$$

Schallintensitätsspiegel mit Dämpfung

$$L = L_1 - D$$

Schalldämm-Mass

$$R = 10 \log \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

D = Dämpfungswert [dB]  
d = Dämpfungsfaktor [dB/m] (2dB/100m)  
l₁ = Anfangslänge [m]  
l₂ = Endlänge [m]  
L = Schallintensitätspegel mit Dämpfung [dB]

## Schallausbreitung

Kugelwellen

Schallintensität

$$I = \frac{P}{4 \pi r^2}$$

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_1}{4 \cdot \pi \cdot r_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Schallintensitätspegel

$$L_2 = L_1 - 20 \log \frac{r_2}{r_1} - K (r_2 - r_1)$$

Zylinderwellen

Schallintensität

$$I = \frac{P_l}{2 \pi r}$$

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1}{2 \cdot \pi \cdot r_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Schallintensitätspegel

$$L_2 = L_1 - 10 \log \frac{r_2}{r_1} - K (r_2 - r_1)$$

$$L_2 = 10 \cdot \log \left( \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \left( \frac{I_1 \cdot r_1}{I_0 \cdot r_2} \right) = 10 \cdot \log \left( \frac{I_1}{I_0} \right) + 10 \cdot \log \left( \frac{r_1}{r_2} \right)$$

I = Intensität [W/m²]

P = Schallleistung [W]

r = Radius [m]

L₁ = Schallintensitätspegel [dB]

L₂ = Schallintensitätspegel [dB]

K = Dämpfungsfaktor [-]

Wenn Absorption in einer Kugelwelle auftritt (z.B. Gras), dann muss die Quelle doppelt so laut sein wie der Pegel an der gewünschten Distanz. (mit Halbkugelwelle rechnen)

Bei einer 100%igen Reflexion kann mit einer Kugelwelle gerechnet werden.

## Schallfeldgrößen

Schallausschlag

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - k x)$$

Schallschnelle

$$v = v_0 \cos(\omega t - k x)$$

$$v = \dot{\xi} = \omega \xi_0 \cos(\omega t - k x) = v_0 \cos(\omega t - k x)$$

Schalldruck

$$\bar{p} = \Delta p_0 \cos(\omega t - k x)$$

Schallkennimpedanz

$$Z = \rho u$$

Schallkennimpedanz

$$I = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{\Delta p_0^2}{2 Z}$$

$$v = \omega \cdot \xi$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$$

Druckamplitude

$$\Delta p_0 = Z v_0$$

$$\xi_0 = \frac{p_{eff}}{\sqrt{2} \rho u v}$$

Schallintensitätspegel

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \log \frac{p_{eff}}{p_{eff0}}$$

Effektivwert des Schallwechseldrucks

$$p_{eff} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$I = 10^{10} \cdot I_0$$

Bezugsschalldruck  
(bei 0 dB und 2000 Hz)

$$p_{eff0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

L₁ = Schallintensitätspegel [dB]

ζ = Störung [-]

ζ₀ = Anfangsstörung [-]

ω = Kreisfrequenz [1/s]

v = Schallschnelle [m/s]

v₀ = Anfangsschallschnelle [m/s]

k = Wellenzahl [1/m]

p^A = Schalldruck [N/m²]

(N/m² = 1 Pa; 1 bar = 10⁵ Pa)

Z = Schallkennimpedanz [kg/(m²·s)]

Δp₀ = Druckamplitude [-]

I = Intensität [W/m²]

ρ = Dichte

u = Wellengeschwindigkeit

I₀ = Intensität menschl. Gehör [W/m²]

Schallkennimpedanz:

Eine Kenngrösse des Mediums, in dem sich der Schall ausbreitet. (Wellen- oder Schallwiderstand)