

NaT 1

Braun & Co, Jürg & DIE Schweisser, Körner, Gwerder, Hannes

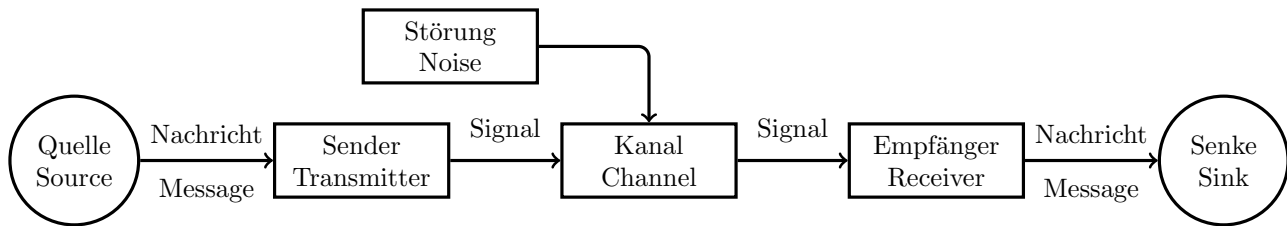
9. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	2
2	LTI-Systeme Schaum S. 25	4
3	AM (Amplitudenmodulation) Schaum S. 43	6
4	Winkelmodulation (FM/PM) Schaum S. 68	9
5	Multiplexingverfahren	13
6	Digitale Uebermittlung analoger Signale Schaum S. 90	14
7	Idiotenseite	20
8	Übungsverzeichnis	22
9	Prüfungsverzeichnis	23
10	Tabellen	24

1 Grundbegriffe

1.1 Einfaches Kommunikationsmodell



1.2 Signalklassifizierungen

Energie $E = W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$	Leistung $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ X(j\omega) ^2}{T} \right) d\omega$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ^2 \text{ (Parsevalsches Theorem)}$
Energiesignal - "Impuls" bspw. Nachrichtensignal $E < \infty$ 	Leistungssignal - "Dauersignal" bspw. Trägersignal $E = \infty$ und $P < \infty$
Aperiodisch $x(t) \neq x(t + n \cdot T)$	Periodisch $x(t) = x(t + n \cdot T)$ Periodendauer T ; $n \in \mathbb{Z}$
Deterministisch - mit vorbestimmten Verlauf $x(t) = f(t)$	Stochastisch - ohne vorbestimmten Verlauf $x(t) = ?$
Zeitkontinuierlich $x(t)$ ist definiert $\forall t \in \mathbb{R}$ 	Zeitdiskret $x(t)$ nur definiert an Stellen $x(n \cdot T)$ mit Abtastintervall T und $n \in \mathbb{Z}$
Amplitudenkontinuierlich $x(t) = y$ mit $y \in \mathbb{R}$ 	Quantisiert $x(t) = y_k$ mit $k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{Z}$
Analog - zeit- und amplitudenkontinuierlich	Digital - zeitdiskret und quantisiert

1.3 Amplituden und Leistungen

1.3.1 Normierte Signale

- Absolute Werte des Signals sind irrelevant - Physikalische Dimension wird weggelassen.
- Signal $x(t)$ wird auf $|x_n(t)| \leq 1$ normiert.

1.3.2 Signalbeschreibung

Effektivwert	$x_{RMS} = \sqrt{P_x}$	
Crestfaktor	$C = \frac{ x _{pk}}{x_{RMS}}$	, sinusförmige Signale $C = \sqrt{2}$
physikalische Leistung	$P_{phys} = c \cdot P_x$	
Bsp. $x(t) = i(t)$	$[A]$	$P_x = I_{RMS}^2 \quad [A^2] \quad P_{phys} = R \cdot I_{RMS}^2 \quad [W]$

1.4 Pegel (Dezibel)

Mit Dezibel (dB) vergleicht man Leistungspegel, nicht Amplituden!

1.4.1 Relative Pegel

Spannungspegel	$L_U = 20 \cdot \log_{10} \frac{U_x}{U_0}$	$U_x = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}}$	$[L_U] = dB$
Strompegel	$L_I = 20 \cdot \log_{10} \frac{I_x}{I_0}$	$I_x = I_0 \cdot 10^{\frac{L_I}{20}}$	$[L_I] = dB$
Leistungspegel	$L_P = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_x}{P_0}$	$P_x = P_0 \cdot 10^{\frac{L_P}{10}}$	$[L_P] = dB$

Beachte: Jeder relative Pegel gilt für U, I & P. (Bei gleicher Referenz)

1.4.2 Absolute Pegel

dBW	Leistungspegel mit Bezugsgrösse $P_0 = 1W$	$\Rightarrow 0 dBW = 1W = P_{0dBW}$
dBm	Leistungspegel mit Bezugsgrösse $P_0 = 1mW$	$\Rightarrow 0 dBm = 1mW = P_{0dBm}$
dBV	Spannungspegel mit Bezugsgrösse $U_0 = 1V$	$\Rightarrow 0 dBV = (1V)^2 / R_{ref} = P_{0dBV}$
dBμV	Spannungspegel mit Bezugsgrösse $U_0 = 1μV$	$\Rightarrow 0 dBμV = (1μV)^2 / R_{ref} = P_{0dBμV}$

Bei Leistungen in Bezug zu absoluten **Spannungspegeln** (dBV, dBμV) muss immer der **Referenz-Widerstand** (R_{ref}) berücksichtigt werden:

In der **HF-Technik** üblich, $R_{ref} = 50\Omega \Rightarrow 0dBV = 20mW$ In der **Telefonie** üblich, $R_{ref} = 600\Omega \Rightarrow 0dBV = 1.67mW$

1.5 Fourier-Theorie

Die ganze Theorie zu den Fourier-Reihen, sowie zu der Fourier-Transformation sind in der Zusammenfassung des Moduls **Integral Transformation** zu finden.

1.5.1 Ergänzung für NaT

Symmetrie-Eigenschaft

Jedes Signal $x(t)$ kann aufgespalten werden in:

- einen geraden (even) Anteil $x_e(t)$
- einen ungeraden (odd) Anteil $x_o(t)$

$$\Rightarrow x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Es gilt: $x_e(-t) = x_e(t) : X_e(\omega)$ ist reellwertig
 $x_o(-t) = -x_o(t) : X_o(\omega)$ ist imaginär

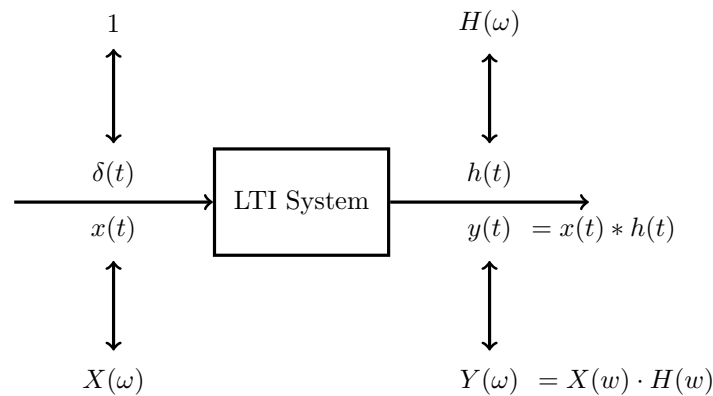
Sinusförmige Funktionen im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + (\delta(\omega + \omega_0))) \\ \sin(\omega_0 t) &\longleftrightarrow -j\pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) - (\delta(\omega + \omega_0))) \end{aligned}$$

Spektrum periodischer Leistungssignale

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

2 LTI-Systeme Schaum S. 25



$y(t) = T[x(t)]$ Operator T erzeugt aus dem Eingangssignal $x(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$.

Linearität und Zeitinvarianz gelten!

Bedingung für Linearität: $T(x_1(t) + x_2(t)) = T(x_1(t)) + T(x_2(t))$

$T(ax(t)) = a \cdot T(x(t))$

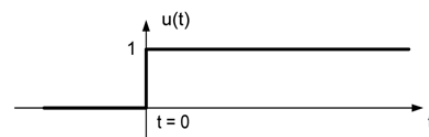
Bedingung für Zeitinvarianz: $y(t) = H(x(t)) \quad y(t - t_0) = H(x(t - t_0))$

Kausalität Ein System ist kausal, wenn jedes Ausgangssignal durch ein vorhergehendes Eingangssignal gebildet wird.

2.1 Schrittfunktion - unit step

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ (praxis) oder undef. (math.)} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

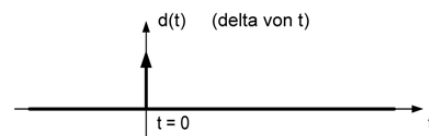
$$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = \Sigma(\omega)$$



2.2 Impulsfunktion - dirac delta function

Definition $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Zusammenhang mit der σ -Funktion $\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t)$



$$1 \circ \bullet 2\pi\delta(\omega) \quad \delta(t) \circ \bullet 1(\omega)$$

2.3 Impulsantwort Schaum S. 25-2.2B

Die Impulsantwort $h(t)$ ist definiert als: $h(t) = T[\delta(t)]$

Bei kausalen Systemen: $h(t) = 0$ für $t < 0$

Bei akausalen Systemen: $h(t) \neq 0$ für $t < 0$

Die Antwort auf das Eingangssignal $x(t)$ berechnet sich: $y(t) = x(t) * h(t)$

Für weitere Details siehe Signale & Systeme, bzw. IntTra Zusammenfassung.

2.3.1 Filtereigenschaft von $H(\omega)$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \quad \varphi_Y(\omega) = \varphi_X(\omega) + \varphi_H(\omega)$$

2.3.2 Logarithmische Darstellung des Amplitudengangs

$$|H(\omega)|[dB] = 20 \cdot \log_{10}(|H(\omega)|) \quad \text{So vereinfacht sich Berechnung der Ausgangsamplitude:}$$

$$|Y(\omega)|[dB] = |X(\omega)|[dB] + |H(\omega)|[dB]$$

2.4 Verzerrungen Schaum S. 26

Signale werden in Übertragungssystemen in vielfacher Weise verformt (z.B. gefiltert, moduliert, gedämpft, entzerrt).

Lineare Verzerrungen

- Verursacht durch lineare (LTI) Systeme
- Das Superpositionsprinzip bleibt gültig

Nicht-Lineare Verzerrungen

- Verursacht durch nicht-lineare Systeme
- Oft schwierig modellierbar
- Oft nur numerisch berechenbar

2.4.1 Verzerrungsfreies LTI-System

Ein LTI-System ist verzerrungsfrei, wenn es das Eingangssignal zum Ausgang hin nur um t_d verzögert und/oder um einen Faktor K skaliert.

$$\begin{aligned} y(t) &= K \cdot x(t - t_d) \\ \Rightarrow Y(\omega) &= K \cdot e^{-j\omega t_d} \cdot X(\omega) \Rightarrow |H(\omega)| = K \\ &\quad \boxed{H(\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_d}} \quad \varphi_H(\omega) = -t_d \cdot \omega \end{aligned}$$

2.4.2 Verzerrungen im LTI-System

Amplitudenverzerrung

$\Rightarrow |H(\omega)|$ ist nicht konstant

Phasenverzerrung

$\Rightarrow \varphi_H(\omega)$ ist nicht linear von der Frequenz ω abhängig

2.5 Filter Schaum S. 27

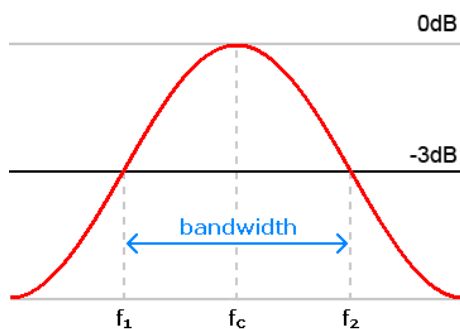
Tiefpass	Lowpass Filter	LPF
Hochpass	Highpass Filter	HPF
Bandpass	Bandpass Filter	BPF
Bandsperre	Bandstop Filter	BSF

Ideale Filter sind nicht realisierbar, da sie akausal sind.

Kausale Filter sind Annäherung an ideale Filter.

TODO: Bilder von Filterdurchlasskurve einfügen

2.5.1 Bandbreite Schaum S. 28



Die Bandbreite ist nur für Tief- und Bandpassfilter definiert und bezieht sich auf das **einseitige** (reelle) Spektrum.

LPF Die Bandbreite $W_B = 2\pi B$ eines LPF entspricht der Frequenz, bei der $|H(\omega)|$ gegenüber $|H(0)|$ um $3dB$ gedämpft ist

BPF Filterbandbreite $W_B = 2\pi B$ bei BPF entspricht der Differenz der (Kreis-) Frequenzen, bei denen Amplitudengang $|H(\omega)|$ gegenüber $|H(\omega_c)|$ um $3dB$ gedämpft ist

2.5.2 Quadraturfilter, Hilberttransformation Schaum S. 29

Der Quadraturfilter ist ein Allpassfilter ($|H(\omega)| = 1 \quad \forall \omega$) mit Phasendrehung um $-\frac{\pi}{2}$; (-90°). Ein Quadraturfilter ist technisch nur für einen beschränkten Bandbreitenbereich realisierbar.

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega > 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega < 0 \end{cases} = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad \bullet \longrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{\pi \cdot t}$$

Hilberttransformation (Signal nach Quadraturfilter)

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega)X(\omega) = [-j \operatorname{sgn}(\omega)]X(\omega) \quad \bullet \longrightarrow \quad \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi \cdot t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

3 AM (Amplitudenmodulation) Schaum S. 43

Bei der Amplitudenmodulation ist die Amplitude des Trägersignals $A(t)$ linear von der dem Nachrichtensignal $m(t)$ abhängig. Daher wird die Amplitudenmodulation oftmals als lineare Modulation bezeichnet.

Trägersignal carrier $A(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t)$

Nachrichtensignal message $m(t)$, oft normiert als $m_n(t)$: $|m_n(t)| < 1$

Moduliertes Signal $x(t) \sim m(t)$

AM im Frequenzbereich:

Durch die Multiplikation eines Signals $x(t)$ mit $\cos(\omega_0 t)$ verschiebt sich dessen Spektrum $X(\omega)$ nach $\pm\omega_0$, konkret:

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

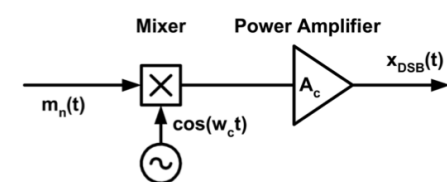
3.1 DSB(-SC): Doppelseitenband (Double-Sideband)-AM Schaum S. 44

Bei der Doppelseitenband-Amplitudenmodulation ist das untere Seitenband (Lower Sideband) sowie das obere Seitenband (Upper Sideband) präsent. Da der Träger im Spektrum nicht präsent ist, ist bei dieser Art von AM auch von **DSB-SC** (Double-Sideband Suppressed Carrier) die Rede.

Bandbreite: $B_{X(\omega)} = 2 \cdot B_{M(\omega)}$

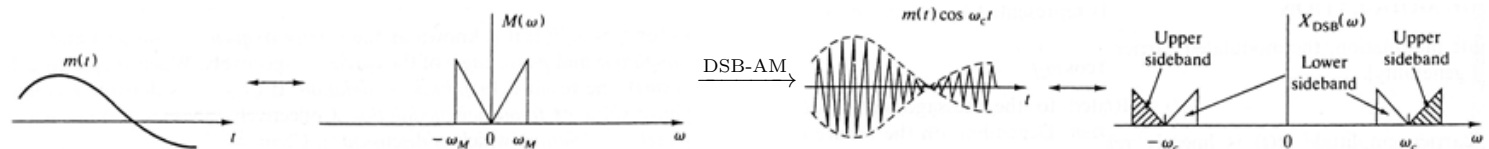
Leistung: $P_{DSB} = P_m \cdot \frac{A_c^2}{2}$

3.1.1 Modulation DSB

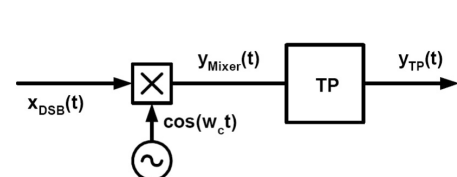


Bei der Doppelseitenband AM wird das Nachrichtensignal mit dem sinusförmigen Trägersignal multipliziert, wodurch sich gemäss dem Modulationssatz folgendes Spektrum ergibt.

$$x_{DSB}(t) = m_n(t) A_c \cos(w_c t) \circ \bullet X_{DSB} = \frac{A_c}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2} M(\omega + \omega_c)$$



3.1.2 Demodulation DSB



Das DSB-Signal wird mit einem sogenannten **synchronen Demodulator** oder **kohärenten Demodulator** zurückgewonnen. Hierbei wird das DSB-Signal mit dem lokalen Träger multipliziert und anschliessend das Nachrichtensignal mittels einem Tiefpassfilter rausgefiltert.

$$y_{Mixer}(t) = x_{DSB}(t) \cdot \cos(\omega_c t) \circ \bullet Y_{Mixer}(\omega) = \frac{1}{2}A_c M(\omega) + \frac{1}{4}A_c(M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c))$$

$$y_{TP}(t) = T_{LPF}[y_{Mixer}(t)] \circ \bullet Y_{TP}(\omega) = \frac{1}{2}A_c M(\omega)$$

Weicht die Frequenz oder die Phase des Demodulators x_{osc} von denen des Modulators ab, so ergeben sich Abschwächungen im demodulierten Nachrichtensignal.

Auswirkungen einer Phasenabweichung um φ : $y_{TP}(t) = \frac{1}{2}m(t) \cos(\varphi)$ mit $x_{osc} = \cos(\omega_c t + \varphi)$

Auswirkungen einer Frequenzabweichung um $\Delta\omega$: $y_{TP}(t) = \frac{1}{2}m(t) \cos(\Delta\omega t)$ mit $x_{osc} = \cos((\omega_c + \Delta\omega)t)$

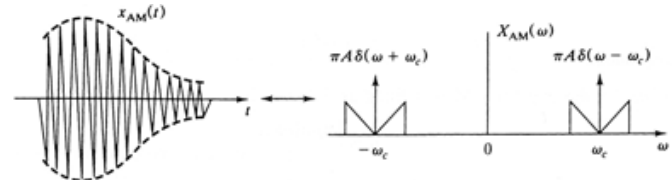
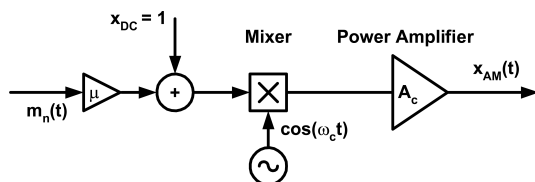
3.2 AM: Gewöhnliche(Ordinary)-AM Schaum S. 45

Die gewöhnliche AM wird generiert, indem man vor der Multiplikation mit dem Trägersignal noch ein DC-Anteil dazugibt.

3.2.1 Modulation OAM

$$x_{AM}(t) = (1 + \mu \cdot m_n(t)) \cdot A_c \cdot \cos(\omega_c t) \quad \longleftrightarrow \quad X_{AM}(\omega) = \frac{1}{2}\mu A_c M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}\mu A_c M(\omega + \omega_c) + \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

mit $m(t) \longleftrightarrow M(\omega)$

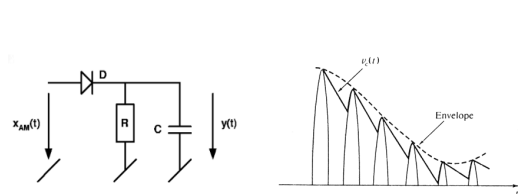


Die Bandbreite bleibt gleich wie bei DSB-AM, jedoch befindet sich nun ein grosser Teil der Signalleistung im Träger. Diese Art von AM hat sich v.a. in früheren Zeiten durchgesetzt, weil die Demodulation mit sehr wenig Aufwand realisiert werden kann.

3.2.2 Demodulation OAM

Mit Enveloppen Detektor

Der Enveloppen Detektor braucht nur drei Bauteile, der Schaltungsaufwand ist entsprechend gering.



Damit der Envelope Detektor korrekt funktioniert müssen R und C korrekt gewählt werden, es gilt:

$$RC \leq \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\omega_m \mu} \quad \text{was gleichbedeutend ist mit:} \quad \frac{1}{RC} \geq \omega_m \frac{\mu \cdot \sin(\omega_m t_0)}{1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0)}$$

In der Praxis genügt jedoch meist das Erfüllen der Bedingung $B_m < \frac{1}{RC} \ll f_c$, wobei es sich bei B_m um die Bandbreite des Nachrichtensignals handelt.

Mit kohärentem (synchronen) Demodulator

Ordinary AM kann auch mit dem kohärenten Demodulator demoduliert werden: $y(t) = \frac{1}{2}(A + m(t)) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}A$ mit nachfolgendem seriellen Kondensator (Hochpass zum Filtern des DC-Anteils).

3.2.3 Modulationsindex Schaum S. 46

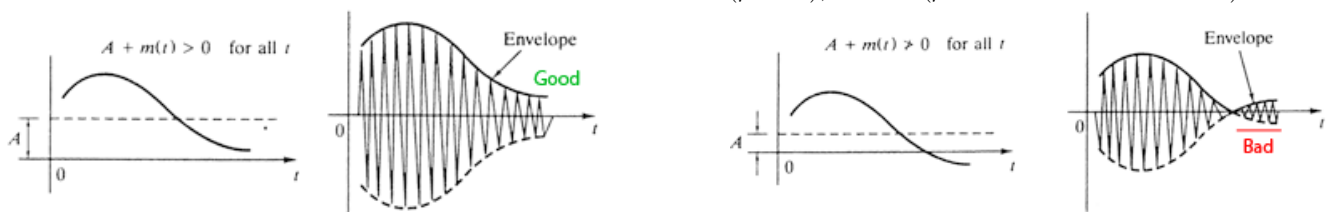
Der Modulationsindex μ ist für AM wie folgt definiert:

$$\mu = \frac{|\min\{m(t)\}|}{A_c} = \frac{A_m}{A_c}$$

Um eine Demodulation mit dem Envelope-Detektor zu ermöglichen, muss die Bedingung $\mu \leq 1$ erfüllt sein.

Ist dies nicht der Fall ($\mu > 1$) so spricht man von einer **Übermodulation** oder einem **übermodulierten Träger**, was in einer Envelope-Verzerrung resultiert.

Anbei zwei Fälle zur Veranschaulichung dieser Problematik: Links ($\mu \ll 1$), Rechts ($\mu > 1 \rightarrow$ Übermodulation).



3.2.4 Effizienz / Wirkungsgrad OAM Schaum S. 55-3.4

Unter der Effizienz η der gewöhnlichen AM versteht man das Verhältnis von der Signalleistung P_s der beiden Seitenbänder zur Gesamtleistung P_t des AM-Signals. P_c entspricht der Leistung des Trägersignals und P_m der des modulierenden Nachrichtensignals.

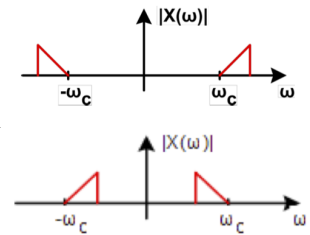
$$P_t = \frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 \cdot P_m) = \frac{A_c^2}{2} + \frac{\mu^2 A_c^2}{2} \cdot P_m = P_c + P_s \quad \implies \quad \eta = \frac{P_s}{P_t} = \frac{\frac{1}{2}A_c^2 \mu^2 P_m}{\frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 P_m)} = \frac{\mu^2 \cdot P_m}{1 + \mu^2 \cdot P_m}$$

Die maximale Effizienz (bei $\mu = 100\%$ und $P_m = 1/2$) beträgt nur gerade $\eta = 33\%$.

3.3 SSB: Einseitenband (Single-Sideband)-AM Schaum S. 47

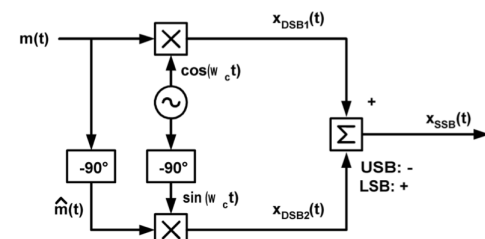
Sowohl Gewöhnliche AM als auch DSB verschwenden Bandbreite, weil diese immer beide Seitenbänder übermitteln.

Ist dies nicht der Fall - wird somit **nur ein Seitenband** übertragen - so spricht man von Einseitenband-AM. Deren Vorteil liegt in der Reduktion der Bandbreite, was aber auch den Nachteil - Die Komplexität der Implementation - mit sich bringt.



3.3.1 Modulation SSB Schaum S. 57-3.7

Phasenverschiebung



Eine Möglichkeit ein SSB-Signal zu generieren ist mit Hilfe von -90° -Phasenschiebern, siehe 2.5.2 Quadraturfilter/Hilberttransformation (S. 5). Phasenschiebung auf $m(t)$ angewendet:

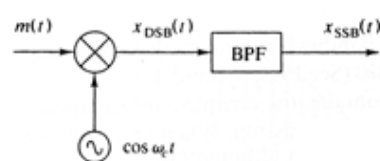
$$\hat{m}(t) \circ -j \operatorname{sgn}(\omega) M(\omega) = -jM_+(\omega) + jM_-(\omega)$$

Nachdem das Signal ähnlich der DSB-AM moduliert wurde, kann durch das entsprechende Vorzeichen des phasenverschobenen Signals das entsprechende Seitenband ausgewählt werden:

+: Lower Sideband; -: Upper Sideband

Die Amplitude des SSB-Signals ist im Spektrum **gleich hoch** wie die des Nachrichtensignals.

Filtermethode



Hierbei wird ein DSB-Signal mit einem Hoch- oder Tiefpass gefiltert, sodass ein SSB-Signal resultiert. Diese Methode ist in der **Praxis unüblich**, da sehr steile Filter benötigt werden.

Die Amplitude des SSB-Signals ist im Spektrum **halb so hoch** wie die des Nachrichtensignals.

3.3.2 Demodulation SSB

Zur Demodulation kann die gleiche Phasenschieber-Schaltung wie zur Modulation verwendet werden. Die Signale werden jedoch immer addiert, nie subtrahiert.

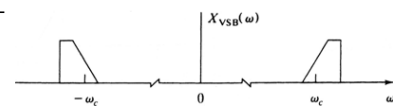
Die Demodulation kann auch mit dem kohärenten Demodulator (siehe DSB-AM) erfolgen, dabei entspricht $Y_{LPF}(\omega) = \frac{1}{4}M(\omega)$

3.4 VSB: Restseitenband (Vestigial-Sideband)-AM

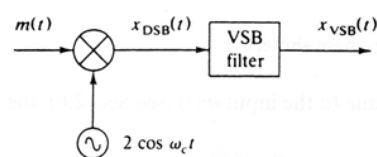
Restseitenband-AM ist sozusagen die praktische Realisierung der Frequenzdiskriminierungsmethode bei SSB.

Vorteil: extreme Anforderungen an Filter-Flankensteilheit entfallen.

Nachteil: benötigt ca. 1.25 x Bandbreite von SSB



3.4.1 Modulation VSB



- Filter dämpft eines der Seitenbänder zu Restseitenband
- Filterkurve läuft antisymmetrisch bzgl. der Trägerfrequenz:
 $H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = \text{const}$ für $|\omega| \leq |\omega_m|_{\max}$
- Schlussendlich resultiert das VSB-Signal mit etwa 1.25-facher Bandbreite von SSB. $W_{VSB} \approx 1.25 \cdot W_{SSB}$

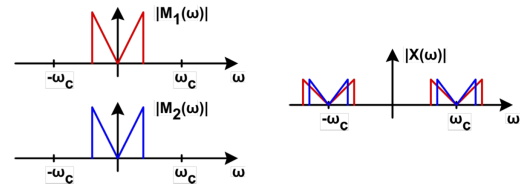
3.4.2 Demodulation VSB

Auch diese Art von AM kann mit einem kohärenten Demodulator demoduliert werden. Dabei ist die antisymmetrie der Filterkurve für eine verzerrungsfreie Demodulation erforderlich. Auch hier entspricht $Y_{LPF}(\omega) = \frac{1}{4}M(\omega)$

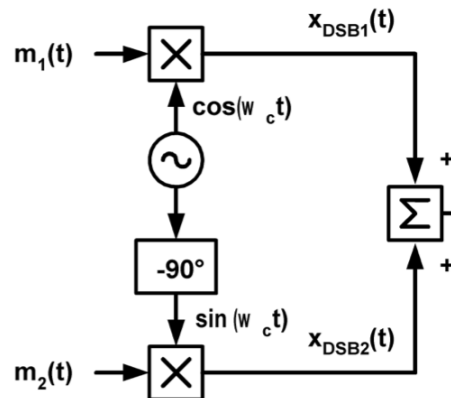
3.5 QAM: Quadratur-AM

Hierbei werden zwei orthogonale Träger (sin, cos) verwendet, sodass zwei Nachrichtensignale zusammen übertragen werden können. Dies ist zwar technisch aufwendiger, jedoch wird die Bandbreite doppelt genutzt.

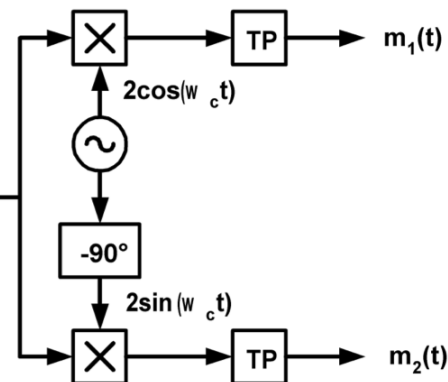
Bei der Demodulation muss darauf geachtet werden, dass der Demodulator synchronisiert ist. Ist dies nicht der Fall, so kann sich bei grösserer Phasenabweichung das andere Nachrichtensignal "einschleichen".



Modulator:



Demodulator:



4 Winkelmodulation (FM/PM) Schaum S. 68

Obwohl Winkel- und Frequenzmodulation - im Vergleich zu AM - komplexer ist und mehr Bandbreite benötigt hat es einen erheblichen Vorteil, welcher die vorhin genannten Nachteile kompensiert. Nämlich ist die **Störanfälligkeit** und das **Rauschen** kleiner als bei AM.

Die Grundlage bietet der sinusförmige Träger, dessen Phase oder Frequenz je nach Amplitude des Nachrichtensignals moduliert wird.

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(t)) = A_c \cos(\theta(t))$$

PM	FM
$\varphi(t) = k_p m(t)$	$\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f m(t) \Rightarrow \varphi(t) = k_f \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau + \varphi(t_0)$
$x_{PM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$	$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$
$k_p = \text{Phasenhubkonstante [rad]}$	$k_f = \text{Frequenzhubkonstante [\frac{rad}{s}]}$

4.1 Momentanfrequenz, Frequenzabweichung

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ \omega_{iFM} &= \omega_c + k_f m(t) \\ \omega_{iPM} &= \omega_c + k_p m'(t) \\ \Delta\omega &= |\omega_i - \omega_c|_{max} = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|_{max}\end{aligned}$$

ω_i Momentanfrequenz

ω_c Trägerfrequenz

$\Delta\omega$ maximale Frequenzabweichung

$\varphi(t)$ momentane Phasenabweichung

FM: $\max|d\phi/dt|$ PM: $\max|\phi|$

4.2 Spektrum der Winkelmodulation

Durch die Potenzreihenentwicklung von $e^{j\varphi(t)}$ aus $x_{PM/FM} = A_c \cdot \text{Re}(e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\varphi(t)})$ wird sichtbar, dass die Spektren von $\varphi^n(t)$ um die Trägerfrequenz ω_c herum gruppiert sind.

So ist daraus zu schliessen, dass **PM/FM nicht-lineare bzw. exponentielle Modulationen** sind.

4.3 Klein- und Grosshub Schaum S. 70-4.5

Abhängig von der maximalen Phasenabweichung sind zwei verschiedene Arten von Winkelmodulationen zu unterscheiden.

Kleinhub - NB (Narrowband)

$$|\varphi(t)|_{\max} < 0.2 \Leftrightarrow \beta < 0.2 \Leftrightarrow D < 0.2 \quad \text{Annähernd lineare Modulation (Nur } \varphi^1(t) \text{ relevant für Spektrum)}$$

Grosshub - WB (Wideband)

$$|\varphi(t)|_{\max} \gg 1 \Leftrightarrow \beta \gg 1 \Leftrightarrow D \gg 1$$

4.4 Einton Winkelmodulation (Sinusoidal Modulation) Schaum S. 71-4.6

$$m(t) = \begin{cases} A_m \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ A_m \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases} \quad \varphi(t) = \beta \cdot \sin(\omega_m t)$$

4.4.1 Modulationsindex (Modulation Index)

Nur für Einton-Signale definiert

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \begin{cases} k_p \cdot A_m & \text{PM} \\ \frac{k_f \cdot A_m}{\omega_m} & \text{FM} \end{cases}$$

β Modulationsindex (max. Phasenabw.), $[\beta] = \text{rad}$

A_m Amplitude des Nachrichtensignals, $[A_m] = 1$

$\Delta\omega = 2\pi\Delta f$

Δf Frequenzhubkonstante

k_f Frequenzabweichungskonstante, $[k_f] = 1$

k_p Phasenabweichungskonstante, $[k_p] = 1$

4.4.2 Spektrum Einton-Winkelmodulation

$$x_{st}(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \Rightarrow x_{st}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos((\omega_c + n\omega_m)t)$$

$J_n(\beta)$ ist die **Bessel Funktion erster Art n -ter Ordnung** (Schaum S. 323f). Das Spektrum besteht aus dem Trägersignal plus einer unendlichen Anzahl Spektrallinien, wobei $J_n(\beta)$ sehr klein ist für grosse n .

Für ($\beta \ll 1$, Kleinhub) sind nur J_0 , J_1 und J_{-1} relevant. Bei ($\beta \gg 1$, Grosshub) existieren jedoch einige signifikante Seitenbänder.

Eigenschaft der Besselfunktion

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n \cdot J_n(\beta) \quad J_{n-1}(\beta) + J_{n+1}(\beta) = \left(\frac{2n}{\beta}\right) \cdot J_n(\beta) \quad \sum J_n^2(\beta) = 1$$

4.4.3 Bandbreite Einton-Winkelmodulation nach Carson

Mit der Bedingung $J_n(\beta) \approx 0, \forall (n > \beta + 1)$ kann die Bandbreite approximativ berechnet werden. 98% der durchschnittlichen Signalleistung sind in diesem Frequenzspektrum angesiedelt.

$$W_{PM/FM} = 2(\beta + 1) \cdot \omega_m = \begin{cases} 2(k_p A_m + 1) \cdot \omega_m & \text{PM, } W_{PM} \sim \omega_m \\ 2(k_f A_m + \omega_m) & \text{FM, } W_{FM} \sim \omega_m \end{cases} \quad \beta \ll 1 \text{ (NB)} : W_B \approx 2\omega_m$$

Für Frequenzen in Hz: $B_{PM/FM} = 2(\beta + 1) \cdot f_m = 2(\Delta f + f_m) = \frac{W}{2\pi}$

4.4.4 Leistung einer Winkelmodulation Schaum S. 72-4.7B

$$P_{st} = \frac{1}{2} A_C^2 \approx P_{FM/AM}$$

4.5 Bandbreite für beliebige Modulation (Arbitrary Modulation) Schaum S. 72-4.7B

Anstelle von β verwenden wir für beliebige Nachrichtensignale D für die Phasenabweichung.

$$D = \frac{\Delta\omega}{W_m}$$

$$W_{PM/FM} \approx 2(D + 1)W_m = 2 \cdot (\Delta\omega + W_m)$$

$$\text{NB } D \ll 1 \text{ (bzw. } \Delta\omega \ll W_m) : W_{PM/FM} = 2W_m$$

$$\text{WB } D \gg 1 \text{ (bzw. } \Delta\omega \gg W_m) : W_{PM} = 2\Delta\omega \text{ (prop. } W_m)$$

$$: W_{FM} = 2\Delta\omega \text{ (const.)}$$

D Hubverhältnis (Deviationratio).

W_m Bandbreite des Nachrichtensignals (in rad/s)

$\Delta\omega$ maximaler Frequenzhub (in rad/s)

W_{FM}, W_{PM} Bandbreite des winkelmodulierten Signals

Bei Grosshub-FM bleibt die resultierende Bandbreite W_{FM} bei ändernder Nachrichtenbandbreite W_m gleich. Bei Grosshub-PM ändert sich diese Bandbreite W_{PM} jedoch proportional zur Nachrichtenbandbreite W_m .

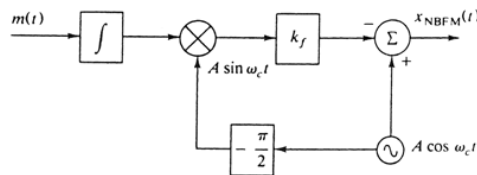
4.6 Modulationsarten

Auch bei der Modulation muss zwischen Klein- und Grosshub FM/PM unterschieden werden.

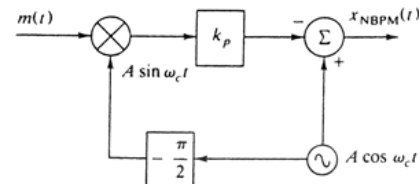
4.6.1 Kleinhub Modulation Schaum S. 72-4.8A

Aus der trigonometrische Gleichung ($\cos(\beta + \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ mit $\cos(\alpha) \approx 1, \sin(\alpha) \approx \alpha$) ergibt sich:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta) - \alpha \cdot \sin(\beta) \Rightarrow \cos(\omega_c t + k_p \cdot m(t)) = \cos(\omega_c t) - k_p \cdot m(t) \sin(\omega_c t)$$



Kleinhub-FM Modulator



Kleinhub-PM Modulator

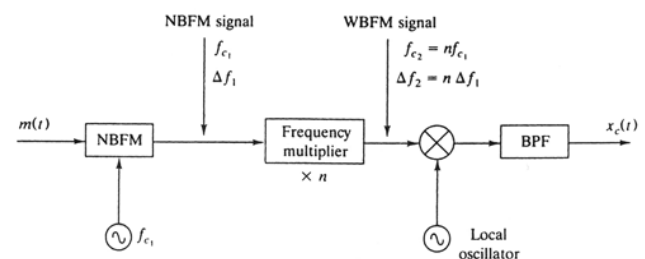
4.6.2 Indirekte Grosshub Modulation Schaum S. 73-4.8B1

Bei dieser Methode wird zuerst ein Kleinhub-Signal erzeugt und dann mittels einem **Frequenzmultiplikator** in ein Grosshub-Signal gewandelt.

$$x(t) = A \cos[\omega_c t + \underbrace{\varphi(t)}_{\ll 1}] \Rightarrow y(t) = A \cos[n\omega_c t + \underbrace{n\varphi(t)}_{\gg 1}]$$

Frequenzmultiplikation ist realisierbar mit nicht-linearen Bauteilen (Diode, Transistor, etc.).

Mit dem Mixer kann das Trägersignal zu beliebigem ω_c verschoben werden, ohne $n \cdot k_p \cdot m(t)$ zu verändern



4.6.3 Direkte Grosshub Modulation Schaum S. 74-4.8B2

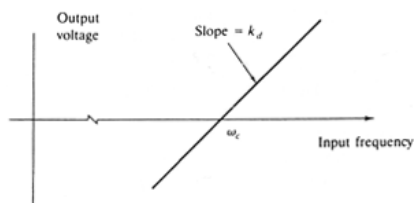
Dank der spannungsabhängigen Sperrschichtkapazität von Dioden (Varicap - Kapazitätsdiode, Dioden-Varaktor, MOS-Varaktor) ist es möglich spannungsabhängige Oszillatoren zu entwickeln. Diese **VCOs (Voltage Controlled Oscillator)** können dann direkt ein Grosshub PM/FM Signal erzeugen.

4.7 Demodulation

Die Demodulation von FM benötigt ein System, welches eine Ausgangsspannung proportional zur momentanen Frequenzabweichung erzeugt, solch ein System nennt man Frequenzdiskriminator.

Auch PM kann so einfach demoduliert werden, indem am Ausgang des FM-Demodulators noch ein Integrator nachgeschaltet wird.

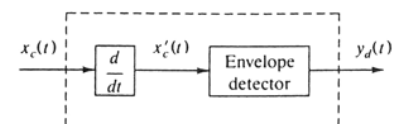
4.7.1 Frequenzdiskriminator



Idealer Frequenzdiskriminator

Ausgangsamplitude ist proportional zur Momentanfrequenz:
 $y_d(t) = k_d \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$

Praktisch wird der Frequenzdiskriminator durch ein Differentiator mit nachgeschaltetem Envelope-Detektor realisiert.



4.7.2 PLL - Phase-Locked Loop

Bei einem PLL handelt es sich um einen phasengekoppelten Regelkreis. Dieser vergleicht die aktuelle Frequenz eines internen Oszillators (VCO) mit einer Referenzfrequenz. Sollte die interne Frequenz von der Referenzfrequenz abweichen, wird diese nachgeregelt.

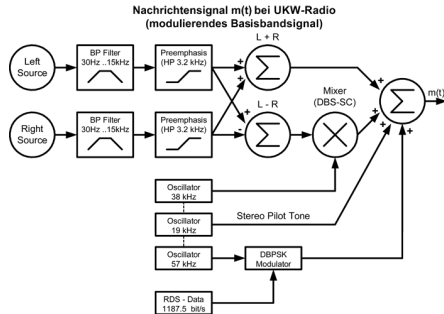
Aus der Steuerspannung für den internen Oszillator resultiert genau die Frequenzabweichung und somit auch das ursprünglich FM-modulierte Nachrichtensignal.

4.8 UKW Radio

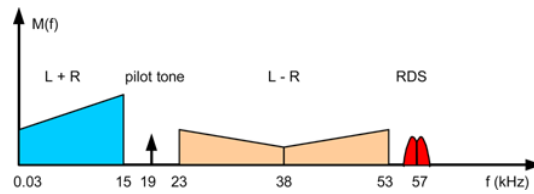
Das UKW Signal besteht primär aus zwei Audiosignalen: Dem Summen- ($L+R$) und dem Differenzsignal ($L-R$). Somit kann bei schlechtem Empfang nur Mono ($L+R$) und bei gutem Empfang Stereo (L/R) gehört werden.

Zur Synchronisation mit dem Demodulator dient der 19kHz Pilot Ton.

Mit RDS (Radio Data System) werden Digitale Daten wie z.B. Senderinformationen (Sendername, Uhrzeit, ...) mit einer Datenrate von 1187.5 bit/s übertragen.



Spektrum des UKW Nachrichtensignals

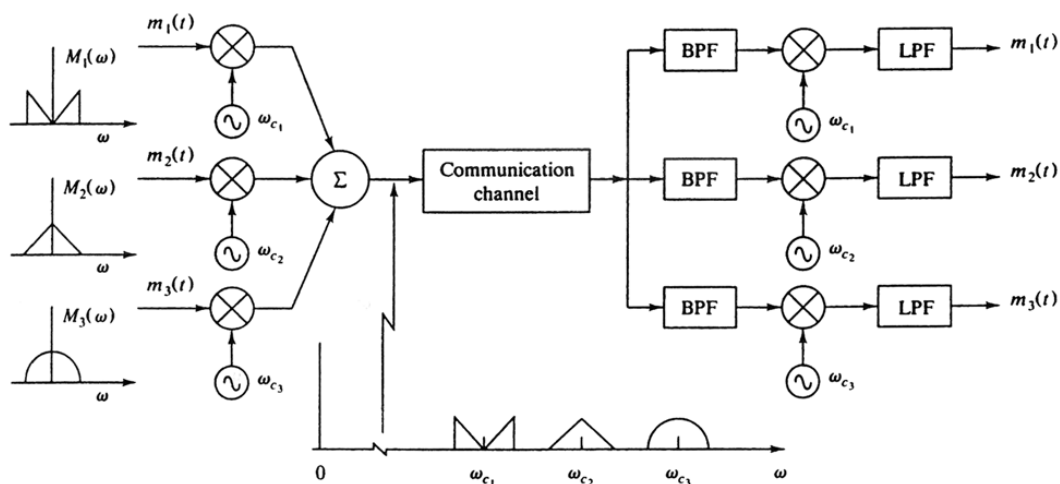


5 Multiplexingverfahren

deutsch	englisch	Abkürzung	Anwendung	Schaum
Zeitmultiplex	Time Division Multiple Access	TDMA	GSMA, DECT, ISDN	100
Frequenzmultiplex	Frequency Division Multiple Access	FDMA	UKW-Radio	52
Codemultiplex	Code Division Multiple Access	CDMA	UMTS, GPS	
Raummultiplex	Space Division Multiple Access	SDMA	Zellen GSM-Basisstationen	
	Orthogonal Frequency Division Multipl.	OFDM	DAB-T, DVB-T, VDSL	

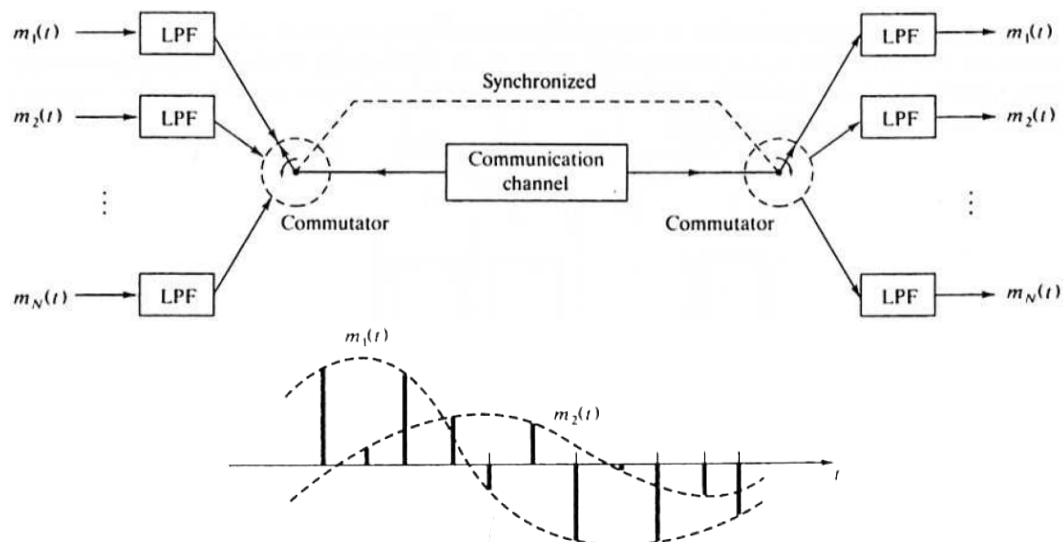
5.1 FDM - Frequenzmultiplex (Frequency-Division Multiplexing) Schaum S. 52

Mit dieser Technik werden mehrere Modulierte Signale über ein Kanal gesendet. Die einzelnen Trägerfrequenzen sind so ausgelegt, dass sich die Signale im gemeinsamen Kanal nicht überlagern und kein Übersprechen stattfindet. Somit können die Nachrichtensignale unabhängig von den anderen wieder demoduliert werden.

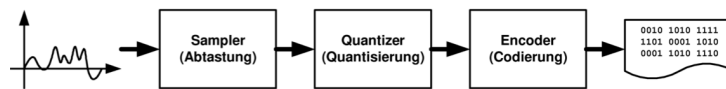


5.2 TDM - Zeitmultiplex (Time-Division Multiplexing) Schaum S. 100

Bei TDM werden mehrere Nachrichtensignale über einen Kommunikationskanal gesendet, indem jedes einzelne Signal jeweils nur zu bestimmten Zeitintervallen gesendet wird. Diese Umschaltung erfolgt durch einen sogenannten Commutator. Zeitmultiplex ist das wichtigste Multiplexingverfahren für Sprachübertragung im Telekommunikationsnetz.



6 Digitale Uebermittlung analoger Signale Schaum S. 90



1. Abtastung (Sampler): Zeitdiskretisierung
2. Quantisierung (Quantizer): Amplitudendiskretisierung
3. Encoder (Codierung)

Einige Vorteile der Digitalisierung: bis 100% Störungsfrei, Algorithmen einfach auf Signal anwendbar, Verschlüsselung leicht gemacht.

6.1 Bandbeschränkung

Damit das Signal mit einer endlichen Abtastrate erfasst werden kann, muss es bandbeschränkt sein. Für ideal band-beschränktes Basisbandsignal $m(t)$ gilt: $|M(\omega)| = 0$ für $|\omega| > 2\pi B_m$

6.1.1 Aliasing

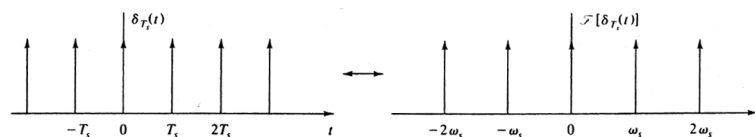
Bei nicht-bandbeschränkten Signalen treten bei der Abtastung *zwingend* Aliasing-("Falschsignal-") Effekte auf.

6.2 Abtastung (Sampling) Schaum S. 91

Ein ideale Abtastung besteht theoretisch aus einer periodischen Abfolge von Dirac-Pulsen δ_{T_s} mit dem Abstand $T_s = \frac{1}{f_s}$. Dieses Spektrum erhält man mittels der Fourier-Reihe.

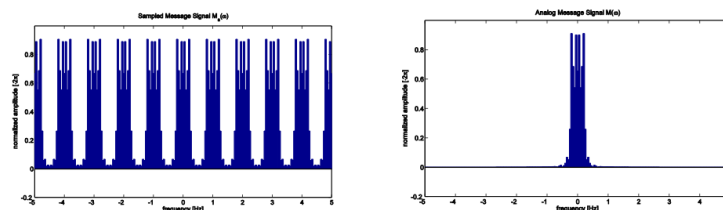
Idealer Sampler:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad \longleftrightarrow \quad \omega_s \cdot \delta_{\omega_s}(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad \text{mit } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$



Idealer Abtaster:

$$m_s(t) = m_s(t) \cdot \delta_{T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \quad \longleftrightarrow \quad M(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * (\omega_s \cdot \delta_{\omega_s}(\omega)) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M(\omega - n\omega_s)$$



6.3 Rekonstruktion von $m(t)$ aus $m_s(t)$

Falls das Abtasttheorem bei der Abtastung erfüllt war, kann das Basisbandsignal $m(t)$ durch ein Tiefpassfilter mit Eckfrequenz $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$ und Verstärkungsfaktor $K = T_s$ rekonstruiert werden.

$$m(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) * \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s) \cdot \frac{\sin(\omega_c(t - nT_s))}{\omega_c(t - nT_s)}$$

Dies entspricht einer Folge von gewichteten sinc-Funktionen an den Stellen nT_s .

6.3.1 Abtasttheorem - Nyquist Theorem

Ein Nachrichtensignal muss mind. mit dem Doppelten seiner Eigenfrequenz abgetastet werden. Ansonsten können sich die Signale im Spektralbereich überlappen.

Bei Basisbandabtastung:

$$\begin{aligned} f_s &\geq 2f_m = f_N \\ f_N &= 2 \cdot B_m \\ f_{Nyq} &= \frac{f_s}{2} \\ T_N &= \frac{1}{2 \cdot B_m} = \frac{1}{f_N} \end{aligned}$$

f_s Samplingfrequenz, $[f_s] = Hz$
 f_m Nachrichtenfrequenz, $[f_m] = Hz$
 B_m Nachrichtenbandbreite, $[B_m] = Hz$
 f_N Nyquistrate, $[f_N] = Hz$
 f_{Nyq} Nyquistfrequenz, $[f_{Nyq}] = Hz$
 T_N Nyquistintervall, $[T_N] = s$

6.3.2 Subsampling/Bandpassabtastung

Handelt es sich bei dem Nachrichtensignal um ein **Bandpasssignal**, so kann mit einer noch kleiner Samplingfrequenz abgetastet werden, dies nennt man **Subsampling**.

Vorgehen: 1. Alle möglichen n bestimmen (ganzzahlig). 2. Alle möglichen Frequenzintervalle für f_s bestimmen.

$$\begin{aligned} 1 \leq n &\leq \frac{f_u}{f_u - f_l} \\ \frac{2 \cdot f_u}{n} \leq f_s &\leq \frac{2 \cdot f_l}{n - 1} \end{aligned}$$

f_s Samplingfrequenz, $[f_s] = Hz$
 f_l Minimale (lower) Nachrichtenfrequenz, $[f_l] = Hz$
 f_u Maximale (upper) Nachrichtenfrequenz, $[f_u] = Hz$
 n Subsampling-Faktor, **ganzzahlig**
 $n \geq 2$ sonst kein Subsampling möglich

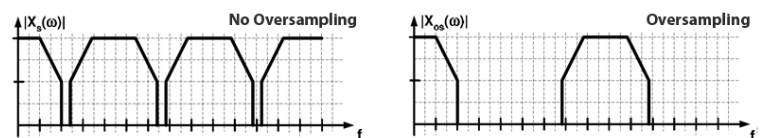
6.3.3 Oversampling

Ein weiterer Begriff bezüglich Sampling ist das **Oversampling**, welches bei **DACs** (Digital-Analog Converter) angewendet wird.

Hierbei **interpoliert** ein DSP zusätzliche Samples, um die Sample-Rate der D/A-Wandlung zu erhöhen.

Folgende Vorteile resultieren daraus:

- **Originalgetreueres** Nachrichtensignal
- Aperture Effekt wird kleiner
- kleinere **Filtersteilheit** notwendig.
- verbessert SNR



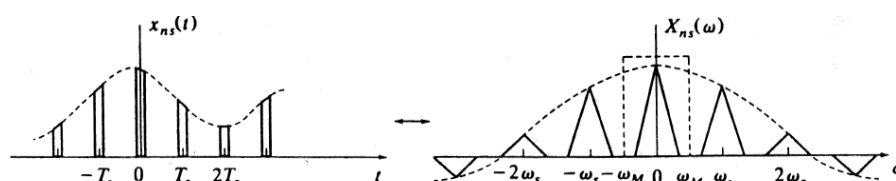
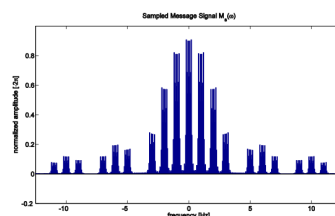
6.3.4 Natural Sampling Schaum S. 111-5.9

Signal mit Periodendauer T_s wird für die Zeit d geschlossen. Amplitude bleibt während Sample nicht konstant. Bei dieser Sampling-Art besteht **kein Aperture-Effekt**

$$m_{ns} = m(t) \cdot \frac{1}{d} \text{rect}_{T_s}(t/d) \quad \text{mit} \quad \text{rect}_{T_s}(t/d) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}((t - nT_s)/d) \quad \text{mit} \quad \text{rect}(t/d) = \begin{cases} 1 & |t| < d/2 \\ 0 & |t| > d/2 \end{cases}$$

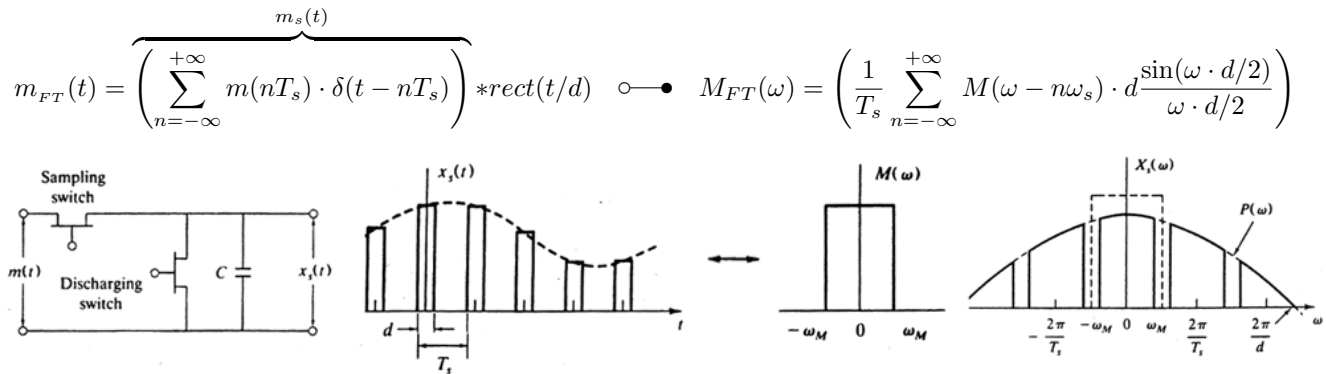
$$M_{ns} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot M(\omega - n\omega_s) \quad \text{mit } c_n \text{ von Rechteckimpuls}$$

$$c_n = \frac{d \cdot A \sin(n\omega_s d/2)}{T_s \cdot n\omega_s d/2}$$



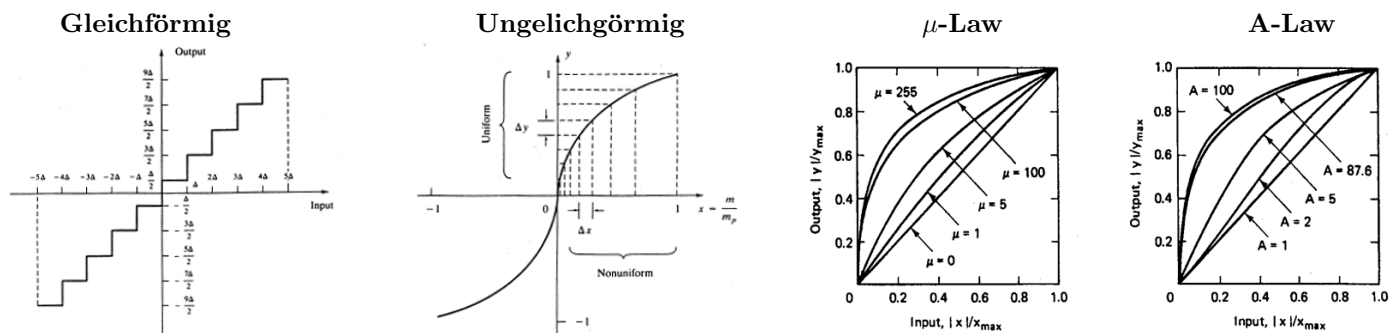
6.3.5 Flat-Top Sampling - Sample & Hold Schaum S. 112-5.10

Das Sample hat die Breite d und bleibt über diese Zeit konstant.
Anwendungsbeispiel: A/D-Wandler, Sample & Hold Schaltung.



Das Spektrum des gesampelten Signals wird bei **höheren Frequenzen** gedämpft, dieses Phänomen wird als **Aperture Effect** bezeichnet. Dies kann mit entsprechenden Filtern, oder Vorkompensation korrigiert werden.

6.4 Quantisierung (Quantizing) Schaum S. 93-5.6



μ -Law und A-Law sind vor allem bei Signalen mit hohem Crest-Faktor von Vorteil: $C = \frac{|x|_{pk}}{x_{RMS}} = \frac{|x|_{pk}}{\sqrt{x_{Leistung}}}$

6.4.1 Gleichförmige(Uniform) Quantisierung

$$\Delta = \frac{m_{pk}}{2^{n-1}} = \frac{2 \cdot m_{pk}}{L} \quad L = 2^n$$

$$q_e \leq \left| \frac{\Delta}{2} \right|$$

$$N_q = \langle q_e^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{m_{pk}^2}{L^2 \cdot 3}$$

$$S = \left(\frac{m_{pk}}{C} \right)^2$$

$$SNR_q = \frac{S}{N_q} = \frac{m_{pk}^2}{q_e^2 C^2} = \frac{12 \cdot m_{pk}^2}{\Delta^2 \cdot C^2}$$

$$SNR_q [dB] = 10 \log(SNR) \cdot dB \approx n \cdot 6.02 dB$$

S nach TP-Filter:

$$S_{TP} = \sum_{n=-k}^k |c_n|^2$$

Δ	Intervallbreite
L	Anzahl Intervalle
n	Wortlänge der Samples, [Anzahl Bit]
m_{pk}	Amplitude des Nachrichtensignals
C	Crestfaktor des Nachrichtensignals
q_e	Quantisierungsfehler
$< q_e^2 >$	Quantisierungsrauschen
S	Signalleistung
SNR_q	Signal-to-Noise Ratio, [SNR] = dB
k	Anzahl durchgelassene Harmonische

6.4.2 Ungleichförmige(Nonuniform) Quantisierung Schaum S. 95-9.5C

Bei tiefen Nutzsinalen hat die gleichförmige Quantisierung den Nachteil einer schlechten SNR (Signal - Geräusch Abstand). Beihilfe schafft die Ungleichförmige Quantisierung z.B. bei Telefonie A-Law-(Europa) oder μ -Law-Codierung (USA, Japan). Praktisch wird dies mit einem sogenannten **Kompressor** und einem nachgeschalteten gleichförmigen Quantisierer realisiert.

$$y_{\mu-Law}(x) = \text{sgn}(m) \frac{\ln(1 + \mu \cdot |x|)}{\ln(1 + \mu)} \quad \text{mit} \quad x = \frac{m}{m_{pk}}$$

$$y_{A-Law}(x) = \begin{cases} \frac{A}{1+\ln A} x & \text{wenn } |x| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1+\ln A}{1+\ln A} \text{sgn}(m) & \text{wenn } \frac{1}{A} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{SNR}_{\mu-Law} \approx 10 \log \frac{3L^2}{[\ln(1 + \mu)]^2} \approx -10.1 + 6.02 \cdot n \text{ dB} \quad \text{für } \mu = 255$$

$$\text{SNR}_{A-Law} \approx 10 \log \frac{3L^2}{(1 + \ln A)^2}$$

$$\Delta y_{\min \mu-Law} \text{ bei 8 bit} = \frac{1}{127}$$

$$\Delta y_{\min A-Law} \text{ bei 8 bit} = \frac{1}{128}$$

6.5 Codierung (Encoding) Schaum S. 96-5.8

6.5.1 PCM-Signale

$$f_s > 2 \cdot B_m \quad n = \log_2 L$$

$$R_B = f_s \cdot n > 2 \cdot n \cdot B_m$$

$$B_{eff} > B_{PCM} = \frac{1}{2} n \cdot f_s > n \cdot B_m$$

SNR für vollausgesteuerten Sinus ($C = \sqrt{2}$):

$$(SNR)_0 = \frac{3}{2} L^2$$

$$(SNR)_{0dB} = 1.76dB + n \cdot 6.02dB$$

f_s Samplingrate, $[f_s] = Hz$

n Bits pro Sample, **ganzzahlig**

R_B Bitrate des PCM-Signals, $[R_B] = \frac{\text{bit}}{s}$

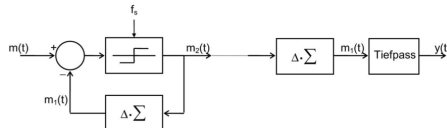
B_m Signalbandbreite, $[B_m] = Hz$

B_{PCM} Bandbreite PCM Signal, $[B_{PCM}] = Hz$

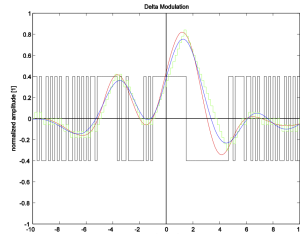
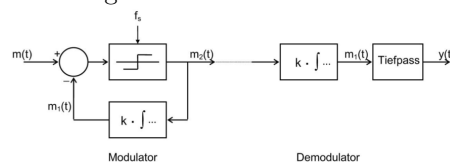
T_B Bitdauer = $\frac{1}{R_B}$

6.5.2 Delta Modulation Schaum S. 97-5.9

Mit Summierer



Mit Integrierer



$$\frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s > \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{max}$$

$$(SNR)_{0dB} = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{2} \frac{3f_s^3}{8\pi^2 f_m^2 f_M} \right) dB$$

$$N_q = \langle q_e^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{3} \left(\frac{f_M}{f_s/2} \right)$$

f_s Samplingrate, $[f_s] = Hz$

f_m Signalfrequenz, $[f_m] = Hz$

f_M Grenzfrequenz des TP-Filters, $[f_M] = Hz$

Dabei gilt: $f_M \geq f_m$ & $f_M \ll f_s$ B_m Signalbandbreite,

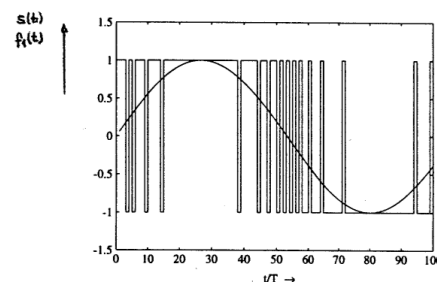
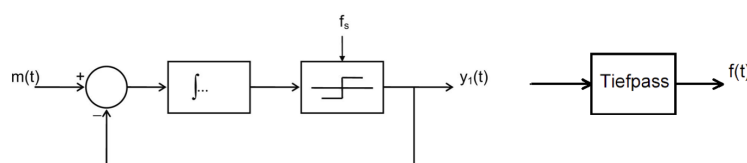
$[B_m] = Hz$

B_{PCM} Bandbreite PCM Signal, $[B_{PCM}] = Hz$

Δ Schritthöhe

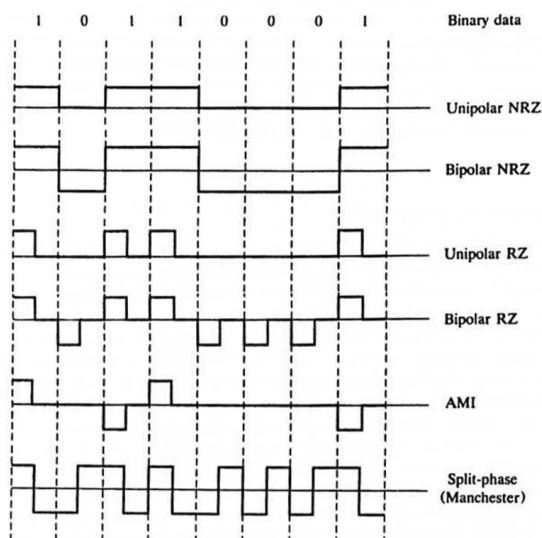
$\langle q_e^2 \rangle$ Quantisierungsrauschen

6.5.3 Delta-Sigma Modulation



6.5.4 Leitungscodierung Schaum S. 99-5.10

Je nach Anforderungen (DC-Freie Übertragung, Clock-Rückgewinnung, Störfestigkeit, Bandbreitenbedarf, Erkennung von Übertragungsfehlern) wird das zu übertragende Signal entsprechend codiert. **1 = Mark, 0 = Space**



Unipolar NRZ(Nonreturn-to-Zero)

1 = Puls, 0 = kein Puls

Bipolar NRZ(Nonreturn-to-Zero)

1 = positiver Puls, 0 = negativer Puls

Unipolar (RZ)Return-to-Zero

1 = Puls der auf Null zurückspringt, 0 = kein Puls

Bipolar RZ

1 = positiver Puls (kehrt wieder auf Null zurück), 0 = negativer Puls (kehrt wieder auf Null zurück)

AMI (Alternate Mark Inversion) RZ

1 = Abwechselungsweise positiver und negativer Puls, 0 = kein Puls. DC-frei

Split-Phase (Manchester)

1 = Positiver Puls mit anschliessend Negativem, 0 = Negativer Puls mit anschliessendem Positivem. DC-frei, einfache Synchronisation

NRZ Mark

1 = Zustandswechsel, 0 = kein Zustandswechsel.

NRZ Space

1 = kein Zustandswechsel, 0 = Zustandswechsel.

6.5.5 Pulse Shaping und ISI (Intersymbolic Interference) Schaum S. 101-5.13A

Da Übertragungskanäle in der Praxis keine idealen Eigenschaften (**limitierte Bandbreite**, Nichtlinearität, Verzerrungen) aufweisen, werden die - von uns als rechteckig angenommenen - Pulse verfälscht. Die Pulse werden **verbreitert** und **überlappen** benachbarte Pulse, sodass beim Empfänger eine Unterscheidung der verschiedenen Symbole schwer fällt. Das oben erwähnte Phänomen wird **intersymbolic interference** genannt. Abhilfe schafft ein passendes Filter, welches dem Übertragungskanal vorgeschaltet wird. Das Filter weist eine spezielle Impulsantwort auf, welche bei **gleichmässigen Zeitabständen** T_s (Abtastzeiten) Null ist, ausser zum Zeitpunkt Null. Dadurch kann die ISI umgangen werden, wenn dann genau zu diesen Zeiten abgetastet wird.

Raised-Cosine Filter Schaum S. 103

Dieses Filter schafft Abhilfe bei ISI. Obwohl dies auch mit einem Idealen Filter (Sinc-Frequenzgang) möglich wäre, wird ein Raised-Cosine mit folgenden Vorteilen eingesetzt:

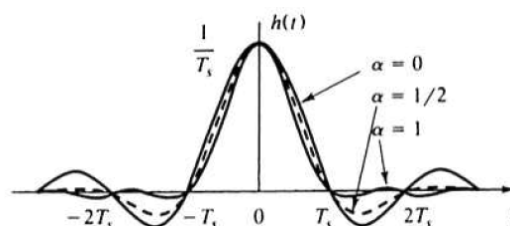
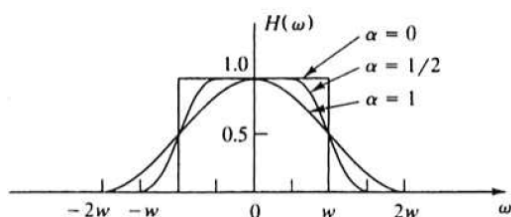
- Raised-Cosine-Puls fällt schneller ab als Sinc-Puls
- Raised-Cosine ist zwar auch akausal, aber in der Praxis einfacher realisierbar
- 1. Nyquist Kriterium wird von allen Raised-Cosine-Pulsen erfüllt
- 2. Nyquist Kriterium wird nur von Raised-Cosine-Puls mit $\alpha = 1$ erfüllt

$$f_B = \frac{1 + \alpha}{2T_s} Hz \quad \frac{1}{T_s} = \frac{2f_B}{1 + \alpha}$$

$$W = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$$

f_B benötigte Bandbreite, $[f_B] = Hz$
 $\frac{1}{T}$ Pulsrate, $[\frac{1}{T}] = \text{"Pulse pro Sekunde"}$
 α roll-off-Faktor, $[\alpha] = 1$

$$h(t) = \frac{1}{T_s} \cdot \left(\frac{\sin Wt}{Wt} \right) \left[\frac{\cos \alpha Wt}{1 - (2\alpha Wt/\pi)^2} \right] \quad \circ \bullet \quad H(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)W \\ \frac{1}{2} (1 - \sin [\frac{\pi}{2\alpha W} (|\omega| - W)]) & (1 - \alpha)W \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)W \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha)W \end{cases}$$



6.5.6 1. Nyquistkriterium

$$h(n \cdot T_s - t_0) = \begin{cases} h_0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}) = \underbrace{h_0}_{\text{Konstantes Spektrum}}$$

Aus dem 1. Nyquistkriterium folgt die minimal benötigte Bandbreite um ISI zu verhindern: $B_{min} = 1/2f_s$

⇒ Dadurch wird das Augendiagramm bzgl. der Amplitude maximal geöffnet.

⇒ Kein ISI beim Abtastzeitpunkt

6.5.7 2. Nyquistkriterium

Zusätzlich zu den Nullstellen bei $n \cdot T_s$ (1. Nyquistkriterium) muss $h(t)$ auch an den Stellen $\pm 3/2T_s, \pm 5/2T_s, \pm 7/2T_s$, etc. eine Nullstelle aufweisen.

⇒ So wird das Augendiagramm auch auf Zeitachse maximal geöffnet.

⇒ Kein ISI beim Nulldurchgang

6.5.8 Digitale Trägermodulation Schaum S. 104-5.14

Weil Binäre Nachrichtensignale selbst zu kleine Frequenzen aufweisen, sind sie nicht geeignet um z.B. über den Äther zu schicken. Abhilfe schafft die binäre Trägermodulation.

ASK - Amplitude-Shift Keying

$$x_c(t) = \begin{cases} A_1 \cos(\omega_c t) & \text{symbol 1} \\ A_2 \cos(\omega_c t) & \text{symbol 0} \end{cases}$$

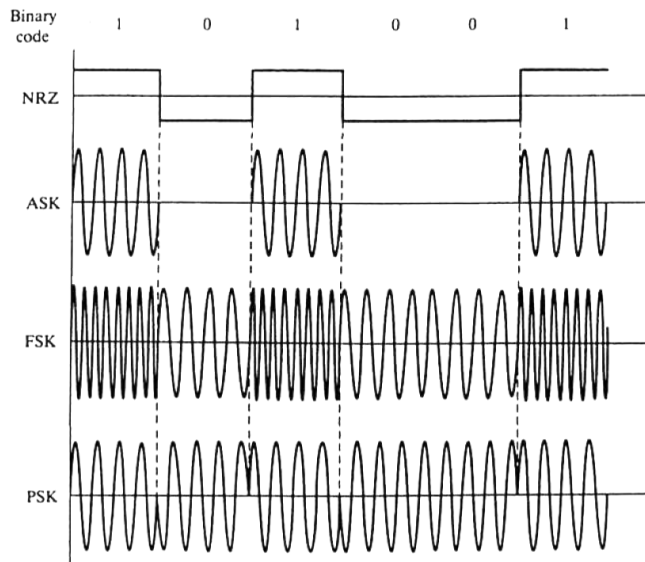
OOK - On Off Keying, wenn $A_2 = 0$

FSK - Frequency-Shift Keying

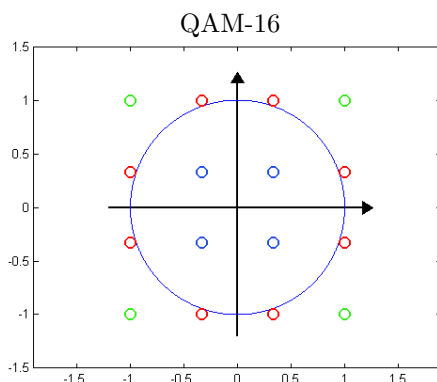
$$x_c(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_{c1} t) & \text{symbol 1} \\ A \cos(\omega_{c2} t) & \text{symbol 0} \end{cases}$$

PSK - Phase-Shift Keying

$$x_c(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t) & \text{symbol 1} \\ A \cos(\omega_c t + \pi) & \text{symbol 0} \end{cases}$$



6.5.9 mehrwertige Signale

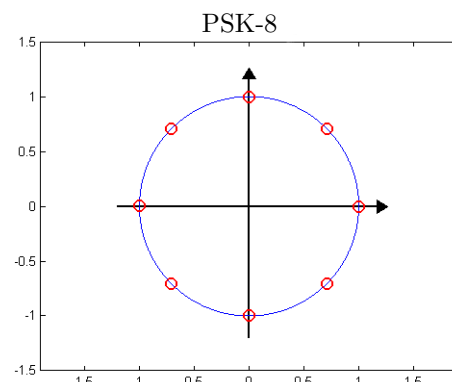


Amplituden und Winkel ändern sich. Die Amplituden sind mit trigo zu berechnen: $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Anzahl bits pro Symbol: $\log_2(n)$

z.B. 8-PSK oder 8-QAM = $\log_2(8) = 3 \frac{\text{Bit}}{\text{Symbol}}$

Frequenzverhalten wie analoge Gegenstücke.



Amplituden sind konstant nur Winkel ändern sich.

Es gilt: $B_{PSK} = 2 \cdot B_m$

7 Idiotenseite

7.2 Dreiecksformeln

Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

Pythagoras beim Sinus

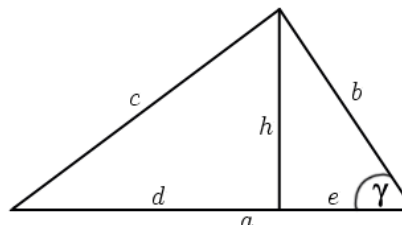
$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \quad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot \beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



7.3 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0°	0	0	1	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180°	π	0	-1	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

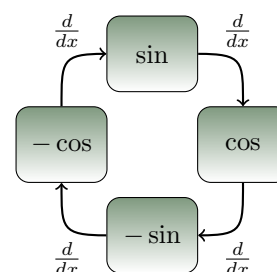
7.4 Periodizität

$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

7.5 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a) \end{aligned}$$

7.6 Ableitungen



7.7 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

7.9 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{aligned}$$

7.10 Euler-Formeln

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) & \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\ e^{x+jy} &= e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y)) \\ e^{j\pi} &= e^{-j\pi} = -1 \end{aligned}$$

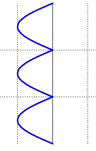
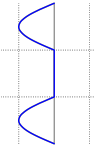
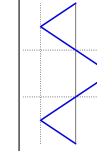
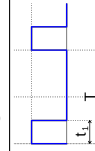
7.8 Doppel- und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(a)}{2} & \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(a)}{2} \end{aligned}$$

7.11 Summe und Differenz

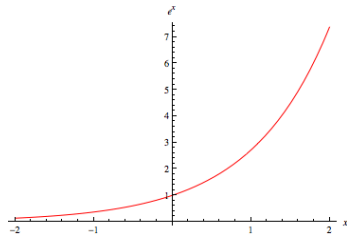
$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)} \end{aligned}$$

7.1 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen

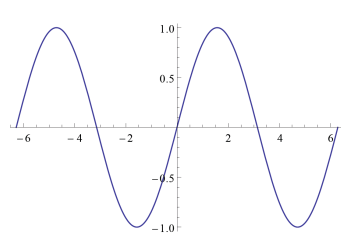
Schwingungsform	Funktion	Gleichrichtwert	Formfaktor	Effektivwert	Scheitelfaktor	X_0	X^2	var(X)
Formel		$\overline{ x } = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	$\frac{X}{ x }$	$X = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$	$k_s = \frac{X_{\max}}{X_{\text{eff}}}$			
	$A \cdot \sin(t)$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	0	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$
	$A \cdot \sin(t) $	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.571$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$
	$A \cdot \Lambda(t)$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.557$	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0	$\frac{A^2}{3}$	$\frac{A^2}{3}$
	$\begin{cases} A & 0 < x < t \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	1	1	1	1	0	A^2	A^2
DC	1	1	1	1	1	-	-	-
		$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$A \frac{t}{T}$	$A^2 \frac{t}{T}$	$\frac{A^2 t}{T} - \frac{A^2 t^2}{T^2}$

7.12 Kurven

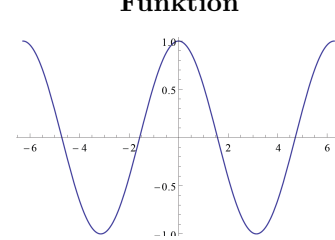
7.12.1 e-Funktion



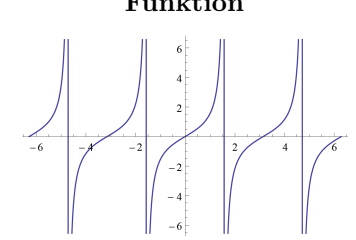
7.12.2 Sinus-Funktion



7.12.3 Cosinus-Funktion



7.12.4 Tangens-Funktion



7.13 Allgemein zeitabhängige Grössen

Arithmetischer Mittelwert, Gleichwert, Linearer MW	$X_0 = \bar{X} = X_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$
Quadratischer MW, Leistung $X^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt$	MW n. Ordnung $X^n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^n(t) dt$
Effektivwert (RMS) $X = \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$	Gleichrichtwert $X_{ m } = \bar{X} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$

8 Übungsverzeichnis

8.1 Einführung

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Dezibel	1.2, 1.3		
Fouriertransformierte	1.4, 2.1, 2.3	1.10, 1.14, 1.15, 1.28	
Komplexe Fourierreihe	1.5, 1.6		
Modulationssatz	2.2		
Crest-Faktor	1.1		

8.2 LTI-Systeme

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
LTI: Linearität und Zeitinvarianz	2.5, 2.6	2.1, 2.2	
LTI: RL-Filter	2.7	2.11	

8.3 Amplitudenmodulation

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
DSB-SC		3.1 - 3.3	3-6.2
OAM: Kohärente Demodulation	3.1	3.5	4
OAM: Spitzenwertdetektor	3.2	3.6	4
Ordinary AM		3.4	3
QAM	4.3	3.15	4
SSB-AM: Demodulation mit kohärentem Demodulator	4.2	3.9	4
SSB-AM: Modulation mit Eintonsignal	4.1	3.7, 3.8	4-7.2
Superheterodyne Empfänger	4.4	3.13	

8.4 Winkelmodulation - FM/PM

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
FM/PM: Bandbreite	6.1, 6.2	4.9, 4.10	5-7.3
FM/PM: Bandbreitenänderung	6.4	4.13	5-7.3
FM/PM: Frequenz- & Phasenabweichung	5.2	4.2	5-7.1
FM/PM: Leistung des modulierten Signals	5.4	4.6	
FM/PM: Modulationsindex	6.2, 6.3	4.10, 4.11, 4.12	
FM/PM: Momentanfrequenz	5.1	4.1	5-7.1
PM: Nichtlinearität	5.3	4.4	
FM Demodulation	6.5		

8.5 Digitale Übermittlung analoger Signale

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Delta-Modulation	9	5.21, 5.22, 5.23, 5.24	7
ISI, Pulse-Shaping (Raised Cosine)		5.36	
PCM: Quantisierungsrauschen, SNR	8.6	5.15, 5.16	
PCM: Samplerate, Quantisierung, Bitrate	8.3	5.12	
PCM: Samplerate, Wortbreite, Bitdauer	8.5	5.14	
PCM: SNR und Bitrate einer CD	8.8	5.17	
PCM: Wortbreite	8.4, 8.7	5.13, 5.16	
Quantisierung: Ungleichförmig: A-Law, μ -Law; SNR	8.9, 8.10	5.18, 5.19	6
Sampling: Basisbandsignale		5.8	
Sampling: Flat-top Sampling	8.2	5.1	6
Sampling: Natural Sampling	8.1	5.9	6
Sampling: Nyquist-Frequenz/-Rate/-Intervall	7.3	5.6	
Sampling: Subsampling	7.4, 7.5	5.7, 5.8	
Sampling: Unterabtastung		5.3	
Leistungscodierung	10.1		
Abtasttheorem	7.1		

8.6 Multiplexverfahren

Thema	Hausübung	Schaum	Praktikum
Multiplexing: Zeitmultiplex (TDM)	13	5.31	

9 Prüfungsverzeichnis

Thema	Prüfung (Aufgabe)
A/D Wandlung	28.08.09 (3)
Amplitudenmodulation	27.01.09 (1)
Basisbandübertragung von digitalen Signalen	27.01.09 (4)
D/A Wandlung	27.01.09 (3)
Digitale Basisbandübertragung	02.02.10 (3)
Digitale Datenübertragung	01.02.11 (4)
Digitale Signalübertragung mit moduliertem Träger	02.02.10 (4)
Digitalisierung	01.02.11 (3)
Digitalisierung	02.02.10 (2)
DSB-SC, SSB und QAM	02.02.10 (1)
Modulation	01.02.11 (1)
OOK und PSK	28.08.09 (4)
Phasenmodulation	28.08.09 (1)
Übertragung zweier modulierter Trägersignale	28.08.09 (2)
Winkelmodulation	01.02.11 (2)
Winkelmodulation	27.01.09 (2)

10 Tabellen

Table A-2 Some Fourier Transform Pairs

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \text{sgn}(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$te^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$e^{-r/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$a \left[\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \right]^2$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$	$-j \text{sgn}(\omega) X(\omega)$

Table B-1 Selected Values of $J_n(\beta)$

$n \backslash \beta$	0.1	0.2	0.5	1	2	5	8	10
0	0.997	0.990	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246
1	0.050	0.100	0.242	0.440	0.577	-0.328	0.235	0.043
2	0.001	0.005	0.031	0.115	0.353	0.047	-0.113	0.255
3			0.003	0.020	0.129	0.365	-0.291	0.058
4				0.002	0.034	0.391	-0.105	-0.220
5					0.007	0.261	0.286	-0.234
6					0.001	0.131	0.338	-0.014
7						0.053	0.321	0.217
8						0.018	0.224	0.318
9						0.006	0.126	0.292
10						0.001	0.061	0.208
11							0.026	0.123
12							0.010	0.063
13							0.003	0.029
14							0.001	0.012
15								0.005
16								0.002