

Nachrichtentechnik HS2012/FS2013

Tabea Méndez

HSR Hochschule für Technik Rapperswil
Elektrotechnik

Rapperswil, 7. August 2013

Dieses Dokument wurde mit $\text{\LaTeX}$ gesetzt.

© by Tabea Méndez.

Der Inhalt dieses Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernimmt der Autor für die Richtigkeit von Angaben und Hinweisen keine Haftung. Dieses Dokument wurde komplett auf Freeware geschrieben. Die Bilder wurden mit GIMP, Inkscape und Tikz erstellt/editiert. Für geometrische Darstellungen oder Visualisierungen von Lösungen, wurde Geogebra, Gnuplot und Tikz verwendet.

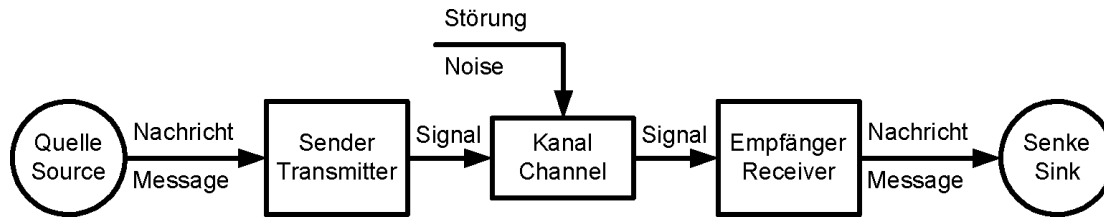
Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	5
1.1	Einfaches Kommunikationsmodell	5
1.2	Klassifizierung von Signalen	5
1.3	Amplituden und Leistungen	5
1.4	Fourierreihe und Fouriertransformation	7
1.5	LTI-Systeme S.24	8
1.6	Multiplexingverfahren	9
2	Amplitudenmodulation (AM) S.43	10
2.1	DSB: Doppelseitenband-AM (DSB-SC: Double-Sideband Suppressed-Carrier Modulation) S.44	10
2.2	AM: Gewöhnliche-AM (Ordinary Amplitude Modulation) S.45	11
2.3	SSB: Einseitenband-AM (Single-Sideband Modulation) S.47	12
2.4	VSB: Restseitenband-AM Vestigial-Sideband Modulation S.49	13
2.5	QAM: Quadratur-AM Quadrature Amplitude Modulation S.64-3.15	13
3	Winkelmodulation (FM/PM) S.68	14
3.1	Äquivalenz von PM und FM	14
3.2	Spektrum der Winkelmodulation S.70	14
3.3	Kleinhub Winkelmodulation NarrowBand Angle Modulation S.70	14
3.4	Grosshub Winkelmodulation WideBand Angle Modulation S.71	15
3.5	Bandbreite S.71	15
3.6	Realisierung S.72	16
3.7	Demodulation S.74	17
3.8	FM-Empfänger	17
4	Digitale Signale S.90	18
4.1	Abtastung S.91	18
4.2	Quantisierung S.93	20
4.3	Delta-Modulation S.97	21
4.4	Delta-Sigma Modulation	21
4.5	Leitungscodierung S.99	22
4.6	Bandbreitenbedarf von Pulse-Code-Modulation-Signalen (PCM) bei Basisbandübertragung S.101	23
4.7	Intersymbol Interferenz (ISI) S.101	23
4.8	Binäre Übertragung mit Trägersignal S.104	25
4.9	Äquivalente Basisband-Darstellung von Bandpasssignalen	26
4.10	Quadrature Amplitude Modulation (QAM)	26
5	Wahrscheinlichkeitsrechnung S.128	28
5.1	Zufallsexperiment	28
5.2	Laplace Experiment	28

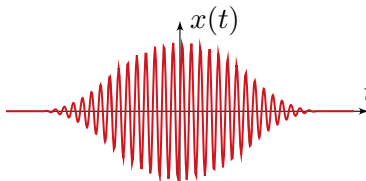
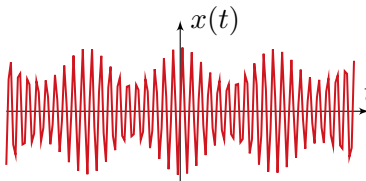
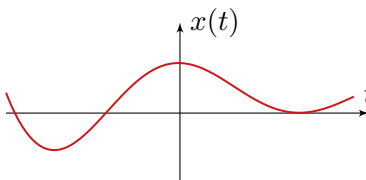
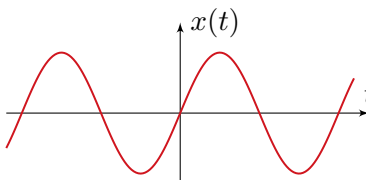
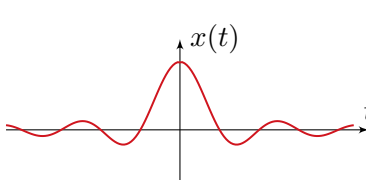
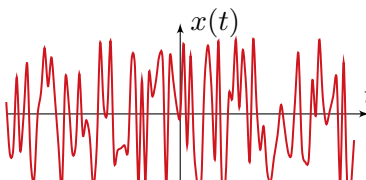
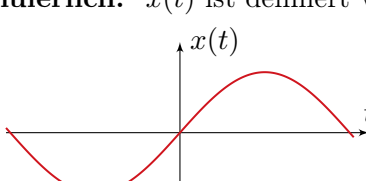
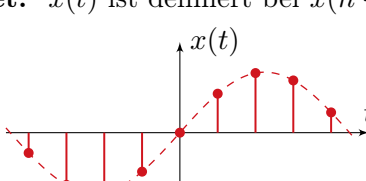
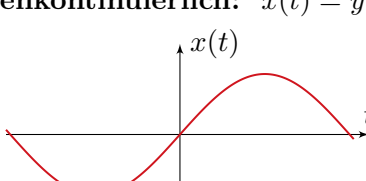
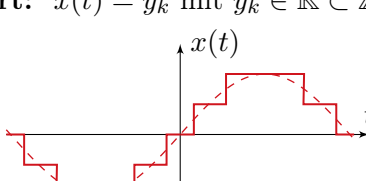
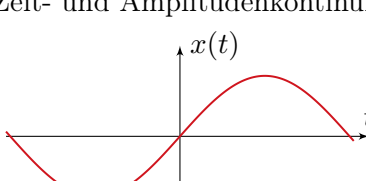
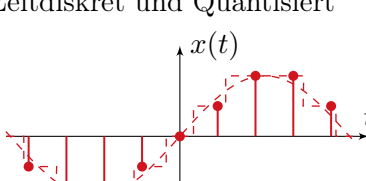
5.3	Verknüpfung von Ereignissen	28
5.4	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses	28
5.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	28
5.6	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	29
5.7	Satz von Bayes	29
5.8	Zufallsvariablen	29
5.9	Statistische Kennwerte	30
5.10	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	31
5.11	Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	32
5.12	Kombinatorik	33
6	Zufallsprozesse S.165	34
6.1	Definition Zufallsprozess	34
6.2	Statistische Kennwerte (Scharmittel)	34
6.3	Zeitliche Mittelwerte	34
6.4	Stationarität	35
6.5	Ergodizität	36
6.6	Korrelation und Leistungsdichtespektrum von stationären Prozessen	36
6.7	Übertragung von Zufallsprozessen über LTI-Systeme	37
6.8	Spezielle Zufallsprozesse	38
7	Rauschen in analogen Kommunikationssystemen S.202	39
7.1	Gauss'scher Kanal	39
7.2	Basisband-System (Referenzmodell)	39
7.3	Amplitudenmodulations-Systeme	39
7.4	Winkelmodulations-Systeme	41
7.5	Zusammenfassende Tabelle	43
8	Optimaler Detektor S.226	44
8.1	Modell des digitalen Empfängers	44
8.2	Fehlerwahrscheinlichkeit	44
8.3	Maximum Likelihood Detector	44
8.4	Lineares Filter	46
8.5	Root-Raised-Coisine Filter	47
9	Informationstheorie und Quellencodierung S.245	48
9.1	Redundanz und Irrelevanz	48
9.2	Modelle für Quelle und Kanal	48
9.3	Informationsgehalt, Entropie und Informationsrate	48
9.4	Diskreter gedächtnisfreier Kanal (DMC)	50
9.5	Quellencodierung	52
10	Kanalcodierung S.282	54
10.1	Rechnen mit Codes (Galois Körper)	54
10.2	Kanalcodierungstheorem von Shannon	54
10.3	Klassifizierung von Kanalcodes	54
10.4	Hamming-Gewicht und Hamming-Distanz	55
10.5	Fehlererkennung und Fehlerkorrektur	55
10.6	Generatormatrix G	55
10.7	Paritätsprüfmatrix H	56
10.8	Hamming-Schranke	56
10.9	Zyklischer Blockcode	57
10.10	Polynomschreibweise	57
10.11	Fundamentales Theorem für zyklische Codes	58
10.12	Polynom des Fehlersyndroms $s(x)$	58
10.13	Generatormatrix G von zyklischen Codes	59
10.14	Hardware-Realisierung eines systematischen Codes	59

1 Grundbegriffe

1.1 Einfaches Kommunikationsmodell



1.2 Klassifizierung von Signalen

Energiesignal: $E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt < \infty$ 	Leistungssignal: $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt < \infty$ 
Aperiodisch: $x(t) \neq x(t + n \cdot T)$ 	Periodisch: $x(t) = x(t + n \cdot T)$ 
Deterministisch: $x(t) = f(t)$ Verlauf vorbestimmt 	Stochastisch: $x(t) = ???$ Verlauf zufällig 
Zeitkontinuierlich: $x(t)$ ist definiert $\forall t \in \mathbb{R}$ 	Zeitdiskret: $x(t)$ ist definiert bei $x(n \cdot T)$ 
Amplitudenkontinuierlich: $x(t) = y$ mit $y \in \mathbb{R}$ 	Quantisiert: $x(t) = y_k$ mit $y_k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{Z}$ 
Analog: Zeit- und Amplitudenkontinuierlich 	Digital: Zeitdiskret und Quantisiert 
Reellwertig: $x(t) = y$ mit $y \in \mathbb{R}$	Komplexwertig: $x(t) = y$ mit $y \in \mathbb{C}$

1.3 Amplituden und Leistungen

- Signale in der Nachrichtentechnik sind oft **dimensionslos** und **normiert** ($|x(t)| \leq 1$).
- Von grosser Bedeutung sind in der Nachrichtentechnik:
 - Zeitliche Veränderung des Signals
 - statische Eigenschaften des Signals
 - der Vergleich mit anderen Nutz- oder Störsignalen

1.3.1 Leistung und Effektivwert

Effektivwert (Root Mean Square RMS):

$$x_{RMS} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt}$$

Leistung:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \stackrel{\text{periodisch}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

- Der Effektivwert ist ein Amplitudenwert aber ein **Mass für die Leistung** des Signals.
- Der Effektivwert ist in der Nachrichtentechnik oft wichtiger als der lineare Mittelwert oder die Spitzenwerte eines Signals.

Crest-Faktor: Verhältnis zwischen Spitzenwert und Effektivwert (Scheitelfaktor)
 hohes $C \rightarrow$ grosser Amplitudenbereich mit wenig Signalleistung $\rightarrow$ schlecht

$$C = \frac{|x|_{pk}}{x_{RMS}}$$

1.3.2 Logarithmisches Mass für Leistungsverhältnisse

Oft werden die Leistungen zweier Signale miteinander verglichen. Dabei wird üblicherweise eine logarithmische Skala verwendet, um grosse Messbereiche abdecken zu können.

Leistungsverstärkungsfaktor: $k_p = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_r} \right)$ $[k_p] = dB$ mit P_r als Referenzleistung

Leistungsverstärkungsfaktor mit Effektivwerten:

$$k_p = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{x_{RMS}^2}{r_{RMS}^2} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{x_{RMS}}{r_{RMS}} \right)$$

Wichtig:

Mit Dezibel vergleicht man **Leistungen**, nicht Amplituden!!!

Dezibel-Verhältnisse:

	Leistungsverhältnis	Amplitudenverhältnis
20dB	100	10
10dB	10	$\sqrt{10}$
6dB	4	2
3dB	2	$\sqrt{2}$
0dB	1	1
-3dB	1/2	$1/\sqrt{2}$
-6dB	1/4	1/2
-10dB	1/10	$1/\sqrt{10}$
-20dB	1/100	1/10

Referenzpegel aus der Praxis:

dBW	$0 dBW = 1W$
dBm	$0 dBm = 1mW$
dBV	$0 dBV = (1V)^2 / R_{ref}$
$DB\mu V$	$0 DB\mu V = (1\mu V)^2 / R_{ref}$

Bei Spannungspegeln muss der Referenzwiderstand berücksichtigt werden.

HF-Technik: $R_{ref} = 50\Omega$

Telefonie: $R_{ref} = 600\Omega$

1.4 Fourierreihe und Fouriertransformation

1.4.1 Fourierreihe S.1

Die Fourierreihe spaltet ein beliebiges **periodisches** Signal in seine Harmonischen auf.

Trigonometrische Form	Harmonische Form	Komplexe Form
$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$	$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt$	$c_0 = \frac{a_0}{2}$	$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$
$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$	$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$
$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt$	$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$	$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

1.4.2 Fouriertransformation S.2

Die Fouriertransformation ist die Erweiterung der Fourierreihe für **Energiesignale**.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

1.4.2.1 Eigenschaften der Fouriertransformation S.3

Satz von Parseval:	$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$
Linearität:	$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \bullet \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
Ähnlichkeit:	$f(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Verschiebung im Zeitbereich:	$f(t \pm t_0) \circ \bullet F(\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich:	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \circ \bullet F(\omega \mp \omega_0)$
Zeitumkehrung:	$f(-t) \circ \bullet F(-\omega)$
Modulationssatz	$f(t) \cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$ $f(t) \sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$
Vertauschungssatz(Dualität):	$f(t) \circ \bullet F(\omega)$ $F(t) \circ \bullet 2\pi f(-\omega)$
Ableitung im Zeitbereich:	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet (j\omega)^n F(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich:	$t^n f(t) \circ \bullet j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
Integration im Zeitbereich:	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \circ \bullet F(\omega) \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right)$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \circ \bullet F(\omega) \cdot G(\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) G(\omega - \tau) d\tau$

1.4.3 Wichtige Fouriertransformierten-Paare

Impulsfunktion:

Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longleftrightarrow 1(\omega) \\ 1(t) &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \\ \sin(\omega_0 t) &\longleftrightarrow -j\pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

Periodische Signale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

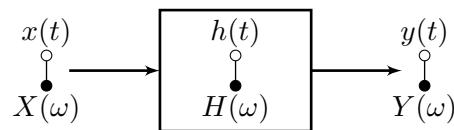
Spektrum Einton-Winkelmodulation:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \cos((\omega_c + n\omega_m) \cdot t) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \pi [\delta(\omega - (\omega_c + n\omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_c + n\omega_m))]$$

1.5 LTI-Systeme S.24

Begriff	Beschreibung	Zusätzliche Bemerkungen
System	Eindeutige Zuordnung von Ausgang (Wirkung) und Eingang (Ursache) 	Übertragungswege (Leistungen), Filter, Verstärker SISO-, MIMO-, SIMO- und MISO-Systeme
Linear	Linearkombination am Eingang ruft entsprechende Linearkombination am Ausgang hervor	Superposition: $\alpha x_a(t) + \beta x_b(t) \rightarrow \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$ $x(t) = 0 \rightarrow y(t) = 0$ RLC-Netzwerke (lin. DGL mit konst. Koeff.)
Zeitinvariant	Zeitliche Verschiebung des Eingangs ruft identische zeitliche Verschiebung am Ausgang hervor.	$x(t - t_v) \rightarrow y(t - t_v)$ RLC-Netzwerke
Kausal	Wert am Ausgang hängt von gegenwärtigen und/oder vergangenen Werten am Eingang ab.	$y(t) = f\{x(t - t_0)\}$ alle realen Systeme

$$\begin{aligned} \text{Zeitbereich} \quad y(t) &= h(t) * x(t) \\ \text{Frequenzbereich} \quad Y(\omega) &= H(\omega) \cdot X(\omega) \end{aligned}$$



LTI-System kausal $\Rightarrow h(t) = 0$ für $t < 0$

1.5.1 Verzerrungen von Systemen S.26

Gilt für den Amplituden- und Phasengang:

$$|H(\omega)| = \alpha \quad \text{und} \quad \theta(\omega) = -t_0 \cdot \omega$$

ist das System **verzerrungsfrei**.

Ansonsten werden Signale, die durch das Übertragungssystem geschickt werden verzerrt (Amplituden- und Phasenverzerrungen).

1.5.2 Filter S.27

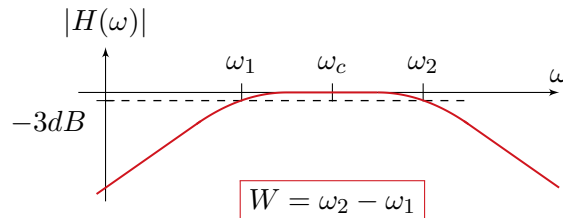
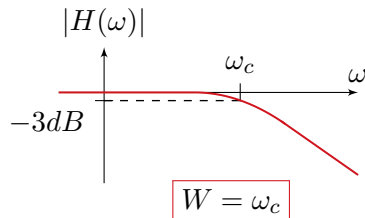
Filter		Abk.
Tiefpassfilter	lowpass filter	LPF
Hochpassfilter	Highpass filter	HPF
Bandpassfilter	bandpass filter	BPF
Bandsperrfilter	bandstop filter	BSF

Ideale Filter sind **akausal** und daher **nicht realisierbar!**

In der Praxis entsteht immer ein Kompromiss zwischen:

- Filterflankensteilheit
- Dämpfung im Sperrbereich
- Flachem Frequenzgang im Durchlassbereich
- Linearität des Phasenganges

Bandbreite von Tiefpass- und Bandpassfilter



1.5.3 Quadraturfilter, Hilberttransformation S.29

Das Quadraturfilter ist ein Allpassfilter, d.h. die Amplituden sämtlicher Frequenzen bleiben unverändert und nur die Phase wird modifiziert.

Das Quadraturfilter ist ein -90° Phasenschieber: $H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$

Definition Hilberttransformation:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ \hat{X}(\omega) &= X(\omega) \cdot H(\omega) = -j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot X(\omega)\end{aligned}$$

1.6 Multiplexingverfahren

Deutsch	Englisch	Abkürzung	Anwendung	Schaum
Zeitmultiplex	Time Division Multiple Access	TDMA	GSM, DECT, ISDN	S.100
Frequenzmultiplex	Frequency Division Multiple Access	FDMA	UKW-Radio	S.52
Codemultiplex	Code Division Multiple Access	CDMA	UMTS, GPS	
Raummultiplex	Space Division Multiple Access	SDMA	parallel-Leitungen	

2 Amplitudenmodulation (AM) S.43

Bei der Amplitudenmodulation formt (moduliert) das Nachrichtensignal die Amplitude des Trägersignals (carrier). Dies ist im einfachsten Fall eine Multiplikation:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Trägersignal (carrier): } A_c \cdot \cos(\omega_c t) \\ \bullet \text{ Nachrichtensignal (message signal): } m(t) \\ \text{oder normiert } |m_n(t)| < 1 \\ \bullet \text{ Moduliertes Signal: } A_c(t) \sim m(t) \end{array} \right\} x_c(t) = m(t) \cdot A_c \cdot \cos(\omega_c t) = A_c(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

2.0.1 Frequenzmischer, Frequenzmultiplex

Durch Multiplikation eines Signals $x(t)$ mit $\cos(\omega_0 t)$ verschiebt sich dessen Spektrum $X(\omega)$ nach $\pm\omega_0$:

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

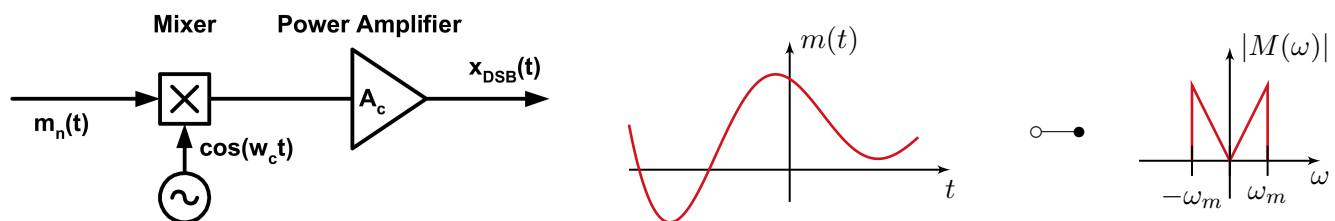
Frequenzmultiplex: Mit Frequenzmischern verschiedener Frequenzen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ können mehrere **bandbeschränkte** Basisbandsignale parallel und störungsfrei über denselben Übertragungskanal gesendet werden.

Idealer wäre eine zusätzliche Marge von ca. 10%, d.h. Abstände von ca. 10kHz bei minimalem Abstand von 9kHz, um Empfangsstörungen zu minimieren.

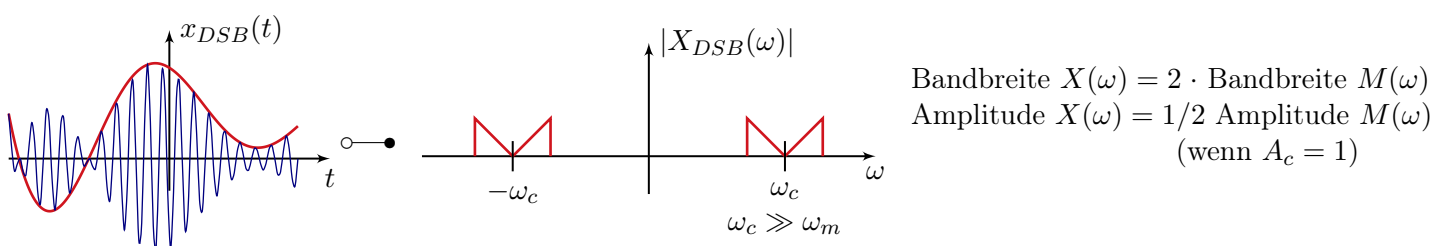
2.1 DSB: Doppelseitenband-AM (DSB-SC: Double-Sideband Suppressed-Carrier Modulation)

S.44

2.1.1 Modulation

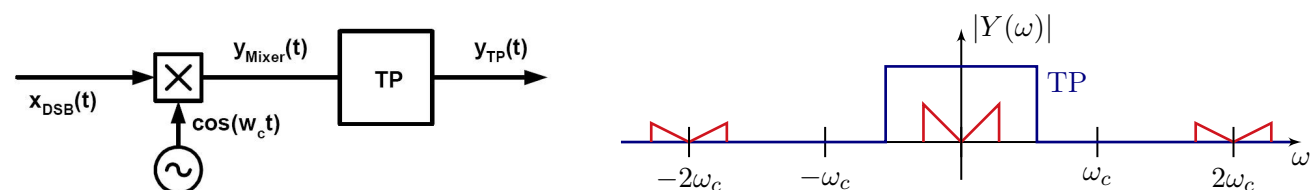


$$x_{DSB}(t) = \underbrace{m(t) \cdot A_c}_{A(t)} \cdot \cos(\omega_c t) \quad \circ \bullet \quad X_{DSB}(\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2} \cdot M(\omega + \omega_c)$$



DSB-SC ist linear, aber nicht zeitinvariant! Trotzdem wird AM oft als lineare Modulation bezeichnet Grund: DSB-SC und ordinary-AM wird Spektrum nur verschoben).

2.1.2 Demodulation



$$\begin{array}{lcl} y_{Mixer}(t) & = & x_{DSB}(t) \cdot \cos(\omega_c t) \quad \circ \bullet \quad Y_{Mixer}(\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(\omega) + \frac{A_c}{4} \cdot [M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c)] \\ y_{TP}(t) & = & T_{TP}[y_{Mixer}(t)] \quad \circ \bullet \quad Y_{TP}(\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(\omega) \end{array}$$

Das DSB-Signal wird mit einem sogenannten **synchronen Demodulator** oder **kohärenten Demodulator** zurückgewonnen. Weicht die Frequenz oder die Phase des demodulierenden, lokalen Trägers von denen, des ursprünglichen Trägers ab, so ergeben sich **Abschwächungen im demodulierten Nachrichtensignal**.

Auswirkungen einer Phasenabweichung um φ :

$$y_{TP}(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(-\varphi) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(\varphi)$$

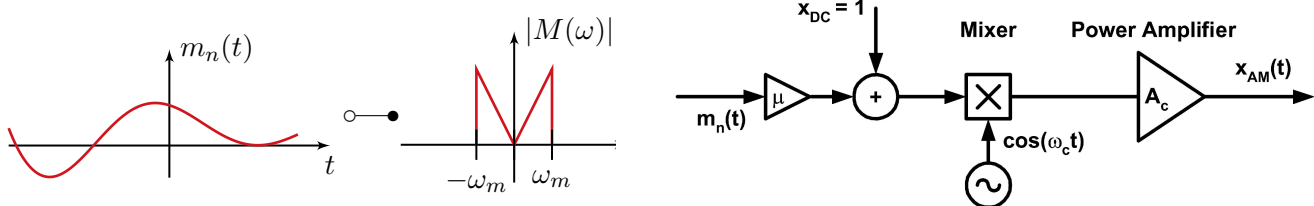
Auswirkungen einer Frequenzabweichung um $\Delta\omega$:

$$y_{TP}(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(\Delta\omega t)$$

2.2 AM: Gewöhnliche-AM (Ordinary Amplitude Modulation) S.45

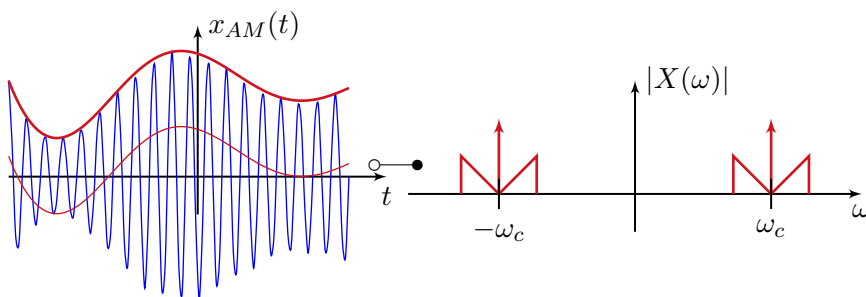
Die der gewöhnlichen AM wird dem Nachrichtensignal $m(t)$ vor der Multiplikation mit dem Trägersignal noch ein DC-Anteil dazugegeben: $x_{AM}(t) = A_c \cdot [A_m + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t)$ mit $|m(t)| \leq A_m$

2.2.1 Modulation



$$x_{AM}(t) = \underbrace{A_c (1 + \mu \cdot m_n(t))}_{A(t)} \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$X_{AM}(\omega) = \frac{A_c \mu}{2} [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] + \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$



DC-Anteil: Carrier verschwindet im Frequenzbereich nicht.

Modulationsindex μ : $0 < \mu < 1$
 $\mu > 1$: Übermodulation!

Bandbreite $X(\omega) = 2 \cdot$ Bandbreite $M(\omega)$
 Amplitude $X(\omega) = 1/2$ Amplitude $M(\omega)$
 (wenn $A_c = 1$)

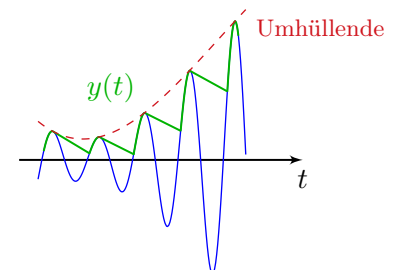
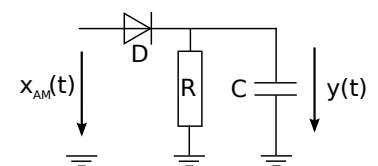
Gewöhnliche AM ist nicht linear (wegen beigefügtem DC-Anteil) und nicht zeitinvariant!

2.2.2 Demodulation

- Kohärente Produktdemodulation wie bei DSB.
- Enveloppendemodulation mit Hüllkurvendetektor (einfachste Technik)

Bedingungen für Enveloppen-Demodulation

- Enveloppe (Umhüllende) darf **nicht unter Null** fallen!
 $A_c(1 + \mu m_n(t)) > 0$
- Modulationsindex: $0 < \mu < 1$
 $\Rightarrow \mu > 1$ Übermodulation!
- Optimale Zeitkonstante RC des Enveloppen-Detektors:
 $B_m < \frac{1}{RC} \ll f_c$ B_m : Bandbreite von $m(t)$



2.2.3 Effizienz / Wirkungsgrad

Unter der Effizienz η der gewöhnlichen AM versteht man das Verhältnis von der Signalleistung P_s der beiden Seitenbänder zur Gesamtleistung P_t des AM-Signals.

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} \quad \text{und} \quad P_t = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 \mu^2 P_m}{2} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{P_s}{P_t} = \frac{P_t - P_c}{P_t} = \frac{\mu^2 P_m}{1 + \mu^2 P_m}$$

Maximale Effizienz ($\mu = 100\%$) beträgt nur $\eta = 33\%$. Bei $\mu = 50\%$ sind es noch bescheidene $\eta = 11.1\%$.

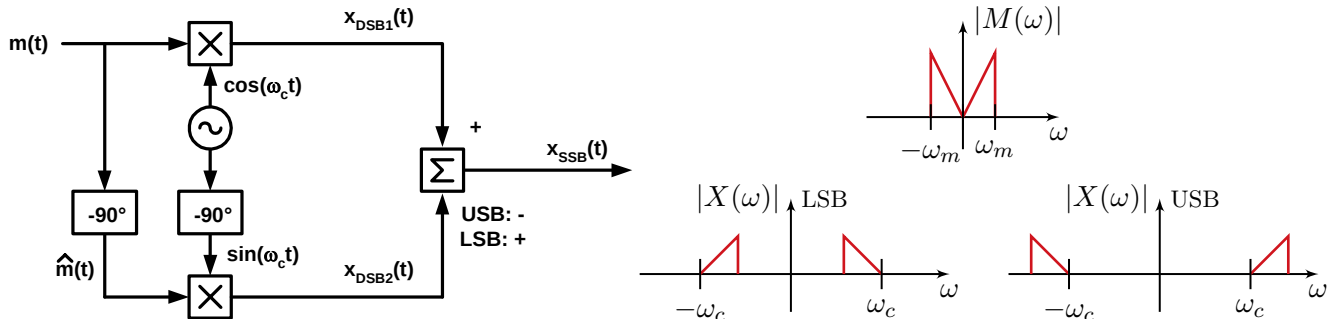
2.3 SSB: Einseitenband-AM (Single-Sideband Modulation) S.47

DSB-AM und Gewöhnliche-AM haben redundante Information im oberen und unteren Seitenband. Bei Single-Sideband Modulation (SSB) wird **nur ein Seitenband übertragen**.

⇒ Komplexere technische Implementierung

2.3.1 Modulation

Phasenmethode:



$$x_{SSB}(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp \hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t) \quad \circ \bullet \quad M_{\pm}(\omega - \omega_c) + M_{\mp}(\omega + \omega_c)$$

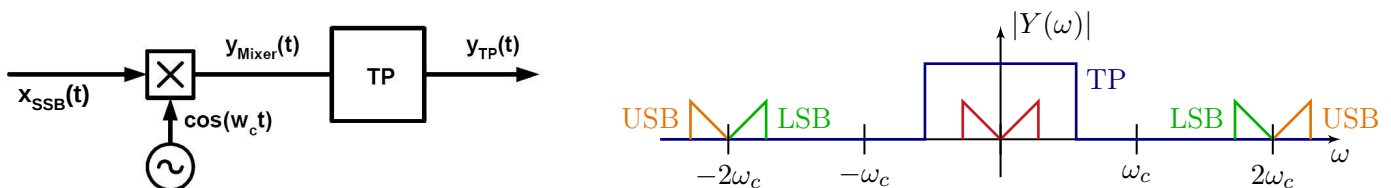
$m(t)$	$\circ \bullet$	$M(\omega)$
$\hat{m}(t)$	$\circ \bullet$	$-j \operatorname{sgn}(\omega) \cdot M(\omega) = -j M_+(\omega) + j M_-(\omega)$
$m(t) \cdot \cos(\omega_c t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2} [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)]$
$\hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{2j} (-j) [M_+(\omega - \omega_c) - M_+(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2j} (j) [M_-(\omega - \omega_c) - M_-(\omega + \omega_c)]$ $= \frac{1}{2} [-M_+(\omega - \omega_c) + M_-(\omega - \omega_c) + M_+(\omega + \omega_c) - M_-(\omega + \omega_c)]$
$x_{USB}(t)$	$\circ \bullet$	$M_+(\omega - \omega_c) + M_-(\omega + \omega_c)$
$x_{LSB}(t)$	$\circ \bullet$	$M_-(\omega - \omega_c) + M_+(\omega + \omega_c)$

Filtermethode:

- Filter unterdrückt das unerwünschte Seitenband eines DSB-Signals.
- ⇒ Sehr hohe Anforderungen an Filtersteilheit!

2.3.2 Demodulation

Kohärente Demodulation ist erforderlich!



$$y_{Mixer}(t) = x_{SSB}(t) \cdot \cos(\omega_c t) \quad \circ \bullet \quad Y_{Mixer}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot M(\omega) + \frac{1}{2} \cdot [M_{\pm}(\omega - 2\omega_c) + M_{\mp}(\omega + 2\omega_c)]$$

$$y_{TP}(t) = T_{TP}[y_{Mixer}(t)] \quad \circ \bullet \quad Y_{TP}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot M(\omega)$$

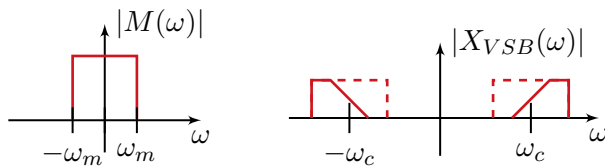
2.4 VSB: Restseitenband-AM Vestigial-Sideband Modulation S.49

Restseitenband-AM ist eine Kompromisslösung zwischen:

- Bandbreiteneffizienz von SSB (1.25 x Bandbreite von SSB)
- Einfacher technischer Realisierung von DSB (keine extremen Anforderungen an Filtersteilheit)

2.4.1 Modulation

- Entweder Upper (USB) oder Lower (LSB) wird auf Restseitenband reduziert.
- $X_{VSB}(\omega)$ hat 1.25 x Bandbreite und die halbe Amplitude des Basisbandsignales $M(\omega)$



Filtermethode

- Filter dämpft eines der Seitenbänder zum Restseitenband.
- Filterkurve mit folgende Bedingung erfüllen:

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = \text{konstant} \quad \text{für } |\omega| < \omega_m$$

2.4.2 Demodulation

Kohärente Demodulation ist erforderlich!

Demodulation Erfolgt gleich, wie bei SSB-AM.

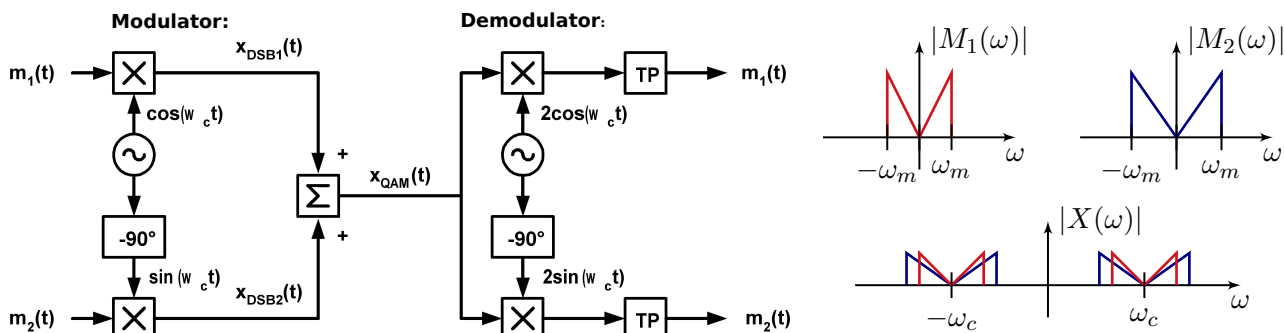
2.5 QAM: Quadratur-AM Quadrature Amplitude Modulation S.64-3.15

Gleichzeitige Übertragung von zwei Basisbandsignalen im gleichen Frequenzband aber mit zwei orthogonalen Trägersignalen ($\cos(\omega_c t)$ und $\sin(\omega_c t)$)

Nachteil: technisch aufwändiger als DSB-AM

Vorteil: ebenso hohe Bandbreiteneffizienz wie SSB-AM

2.5.1 Modulation / Demodulation



3 Winkelmodulation (FM/PM) S.68

Bei der Winkelmodulation formt (moduliert) das Nachrichtensignal die Phase des Trägersignals (carrier).

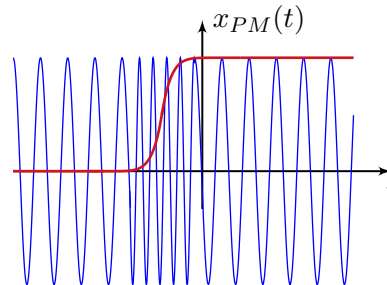
$$x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \varphi(t)) = A \cdot \cos(\theta(t))$$

Vergleich mit AM: + Bessere Störfestigkeit
- Höherer Bandbreitenbedarf

Phasenmodulation (PM):

$m(t) \sim$ Phasenabweichung zum Referenzträgersignal.

$$\begin{aligned} x_{PM}(t) &= A_c \cdot \cos(\omega_c t + \varphi(t)) \\ \varphi(t) &= k_P \cdot m(t) \\ k_P &= \text{Phasenhubkonstante [rad]} \end{aligned}$$



Momentane Phasenabweichung

$$\varphi(t) = k_P \cdot m(t)$$

Momentane Frequenzabweichung

$$\varphi'(t) = k_P \cdot m'(t)$$

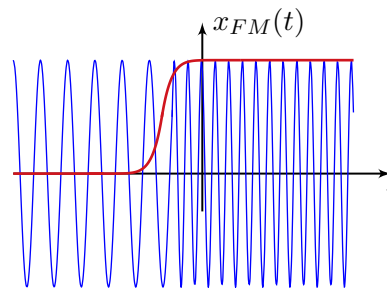
Momentane Frequenz

$$\omega_c + \varphi'(t) = \omega_c + k_P \cdot m'(t)$$

Frequenzmodulation (FM):

$m(t) \sim$ Frequenzabweichung zum Referenzträgersignal.

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= A_c \cdot \cos(\omega_c t + \varphi(t)) \\ \varphi(t) &= k_F \cdot \int m(\tau) d\tau \\ \varphi'(t) &= k_F \cdot m(t) \\ k_F &= \text{Frequenzhubkonstante [rad/s]} \end{aligned}$$



Momentane Phasenabweichung

$$\varphi(t) = k_F \cdot \int m(\tau) d\tau$$

Momentane Frequenzabweichung

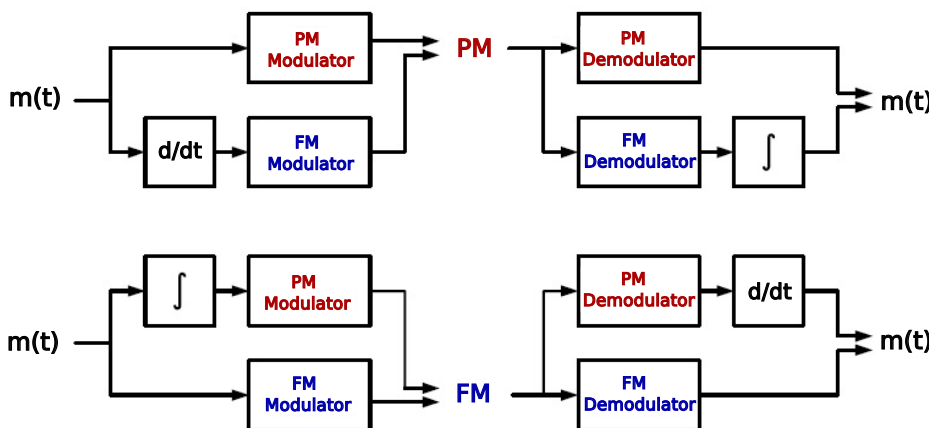
$$\varphi'(t) = k_F \cdot m(t)$$

Momentane Frequenz

$$\omega_c + \varphi'(t) = \omega_c + k_F \cdot m(t)$$

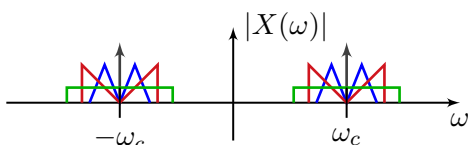
3.1 Äquivalenz von PM und FM

PM und FM können äquivalent realisiert werden (mit zusätzlichem Integrator oder Differenziator)



3.2 Spektrum der Winkelmodulation S.70

$$\begin{aligned} x_{PM/FM}(t) &= A_c \cdot \text{Re} [e^{j(\omega_c t + \varphi(t))}] = A_c \cdot \text{Re} [e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\varphi(t)}] \\ &= A_c \cdot \text{Re} \left[e^{j\omega_c t} \cdot \left(1 + j\varphi(t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} - j\frac{\varphi^3(t)}{3!} + \dots + j^n \frac{\varphi^n(t)}{n!} \right) \right] \\ &= A_c \cdot \left[\cos(\omega_c t) - \varphi(t) \sin(\omega_c t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} \cos(\omega_c t) + \frac{\varphi^3(t)}{3!} \sin(\omega_c t) + \dots \right] \end{aligned}$$



- Trägeranteil von $A_c \cdot \cos(\omega_c t)$ bei ω_c
- Weitere Spektralanteile von $\varphi^n(t)$ um ω_c herum gruppiert
- PM/FM sind nicht-lineare, d.h. exponentielle Modulation

3.3 Kleinhub Winkelmodulation NarrowBand Angle Modulation S.70

Kleinhub Winkelmodulation wenn:

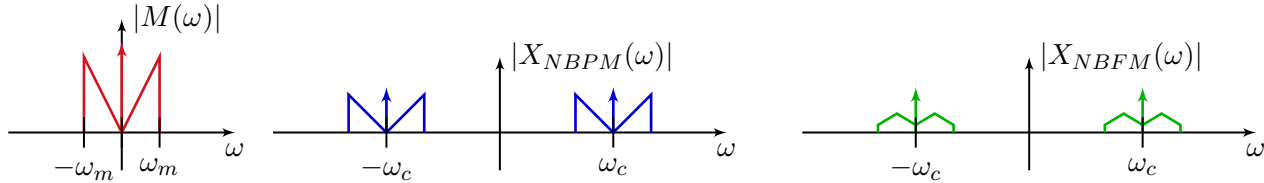
$$|\varphi(t)| \ll 1 \rightarrow \text{Praxis: } |\varphi(t)| \leq 0.2$$

Dann gilt:

$$x_{NB-PM/FM}(t) \approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \varphi(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

Demodulation: mit kohärentem Produktedemodulator $\rightarrow x_{NB-PM/FM}(t) \cdot (-\sin(\omega_c t))$

3.3.1 Spektrum



$$X_{NBPM}(\omega) = A_c \pi \cdot [(\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c))] + j \frac{A_c k_P}{2} \cdot [M(\omega - \omega_c) - M(\omega + \omega_c)]$$

$$X_{NBFM}(\omega) = A_c \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A_c k_F}{2 \cdot (\omega - \omega_c)} \cdot [M(\omega - \omega_c) - M(\omega + \omega_c)]$$

Vergleich AM und NP-PM: Qualitativ gilt für die Amplitudenspektren $|X_{AM}(\omega)| = |X_{NBPM}(\omega)|$

3.4 Grosshub Winkelmodulation WideBand Angle Modulation S.71

Grosshub Winkelmodulation wenn:

$$|\varphi(t)| > 1$$

- $|\varphi^2(t)| \dots |\varphi^n(t)|$ nicht mehr vernachlässigbar!
- Im Frequenzspektrum treten Anteile $\sim m^n(t)$ auf
- $x_{PM/FM}(t)$ ist zu $m(t)$ ausgeprägt **nicht linear**.
- Formale Berechnung des Spektrums geht nur für Spezialfälle.

3.4.1 Einton Grosshub-Winkelmodulation

	Phasenmodulation (PM)	Winkelmodulation (FM)
Eintonsignal:	$m_{PM}(t) = A_m \cdot \sin(\omega_m t)$ $\varphi(t) = \underbrace{k_P \cdot A_m}_{\beta_P} \cdot \sin(\omega_m t)$	$m_{FM}(t) = A_m \cdot \cos(\omega_m t)$ $\varphi(t) = \underbrace{\frac{k_F \cdot A_m}{\omega_m}}_{\beta_F} \cdot \sin(\omega_m t)$

Modulationsindex:

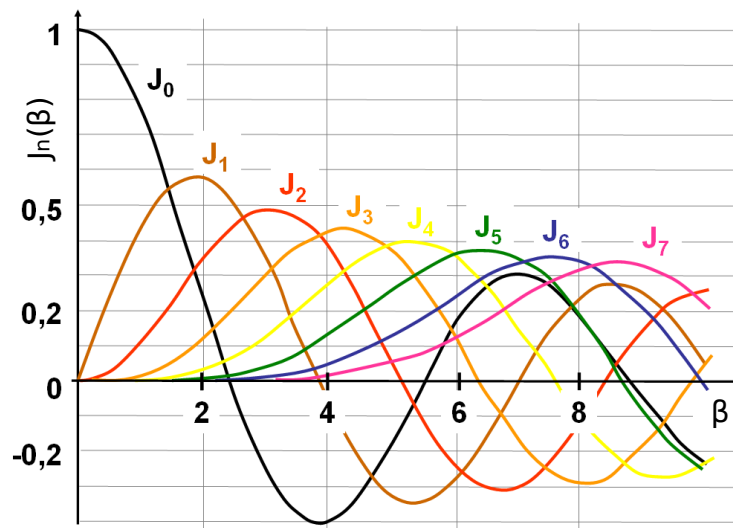
$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

Ist nur für Einton-Signale definiert!

3.4.2 Spektrum Einton-Winkelmodulation Tabelle S.324

$$x_{ST}(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) = A_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \cos((\omega_c + n\omega_m) \cdot t)$$

$J_n(\beta)$: Bessel-Funktion erster Art n-ter Ordnung



Eigenschaften:

- $J_{-n}(\beta) = (-1)^n \cdot J_n(\beta)$
- $J_{n-1}(\beta) + J_{n+1}(\beta) = \frac{2n}{\beta} \cdot J_n(\beta)$
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$

3.5 Bandbreite S.71

3.5.1 Bandbreite Einton-Winkelmodulation

Theoretisch: ∞ - Bandbreite

Praktisch: $J_n(\beta) \approx 0$ für $n > \beta + 1 \Rightarrow W_{PM/FM} = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot \omega_m$ (enthält 98% der Signalenergie)

Bandbreite B	Eintonphasenmodulation	Eintonwinkelmodulation
$W = 2\pi \cdot B$ $= 2 \cdot (\beta + 1) \cdot \omega_m$ $[W] = [rad/s]; \quad [B] = Hz$	$W_{PM} = 2 \cdot (k_P \cdot A_m + 1) \cdot \omega_m$	$W_{FM} = 2 \cdot (k_F \cdot A_m + \omega_m)$
	$B_{PM} \sim k_P$ $B_{PM} \sim A_m$ $B_{PM} \sim \omega_m$	$B_{FM} \sim k_F$ $B_{FM} \sim A_m$ Kleinhub-FM ($\Delta\omega = k_F \cdot A_m \ll \omega_m$): $W \sim \omega_m$ Grosshub-FM ($\Delta\omega = k_F \cdot A_m \gg \omega_m$): $W \sim \omega_m$

3.5.2 Bandbreite für beliebige $m(t)$

$$W_{PM/FM} = 2 \cdot (D + 1) \cdot W_m = 2 \cdot (\Delta\omega + W_m)$$

Hubverhältnis: $D = \frac{\Delta\omega}{W_m}$

Maximaler Frequenzhub: $\Delta\omega$ [rad/s]

Bandbreite von $m(t)$: $W_m = 2\pi B_m$ [rad/s]

Kleinhub ($D \ll 1$ bzw. $\Delta\omega \ll W_m$)

$$W_{PM/FM} = 2 \cdot W_m$$

Grosshub ($D \gg 1$ bzw. $\Delta\omega \gg W_m$)

$$W_{PM} = 2 \cdot \Delta\omega \sim W_m$$

$$W_{FM} = 2 \cdot \Delta\omega (= \text{konst.})$$

3.6 Realisierung S.72

3.6.1 Realisierung Kleinhub Winkelmodulation

$$x_{NBPM}(t) \approx A_c \cdot (\cos(\omega_c t) - k_p m(t) \cdot \sin(\omega_c t)) \quad | \quad A_c = 1$$

$$= \cos(\omega_c t) - k_p m(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

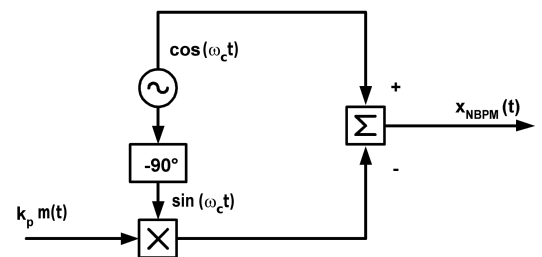
3.6.2 Realisierung Grosshub Winkelmodulation

Indirekte Grosshub Winkelmodulation:

- Kleinhub Modulator:
 $x_{NBPM} = \cos(\omega_c t + k_p \cdot m(t))$ wobei $k_p \cdot m(t) \ll 1$
- Frequenzmultiplikation um Faktor n :
 $x_{WBPM} = \cos(n \cdot \omega_c t + n \cdot k_p \cdot m(t))$ wobei $n \cdot k_p \cdot m(t) \gg 1$
- Mixer:
Trägersignal zu ω_c schreiben (Multiplikation mit n kompensieren) ohne das Multiplikation mit der Phase $n \cdot k_p \cdot m(t)$ verändert wird.
- Loop:
Eventuell Punkt 2 und 3 mehrmals wiederholen, wenn Verstärkung n (bzw. $n^2, n^3, \dots$) noch zu klein ist.

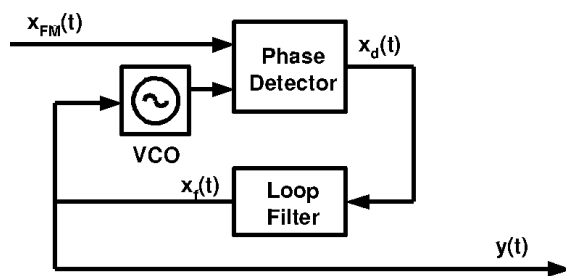
Direkte Grosshub Winkelmodulation:

- Veränderung der Oszillatorfrequenz mit Hilfe einer Steuerspannung (Voltage Controlled Oszillator, VCO)
 $\rightarrow$ Steuerspannung $\sim m(t)$



3.7 Demodulation S.74

3.7.1 Demodulation mit Phase Locked Loop (PLL)



Der Phase-Detector ermittelt die Phasendifferenz zwischen dem Oszillator und dem FM-Signal und regelt die Frequenz des Oszillator so, dass die beiden Phasen übereinstimmen. Damit entspricht die Regelspannung gerade dem gesendeten Nachrichtensignal.

PM: $x_f(t) \sim m'(t)$

FM: $x_f(t) \sim m(t)$

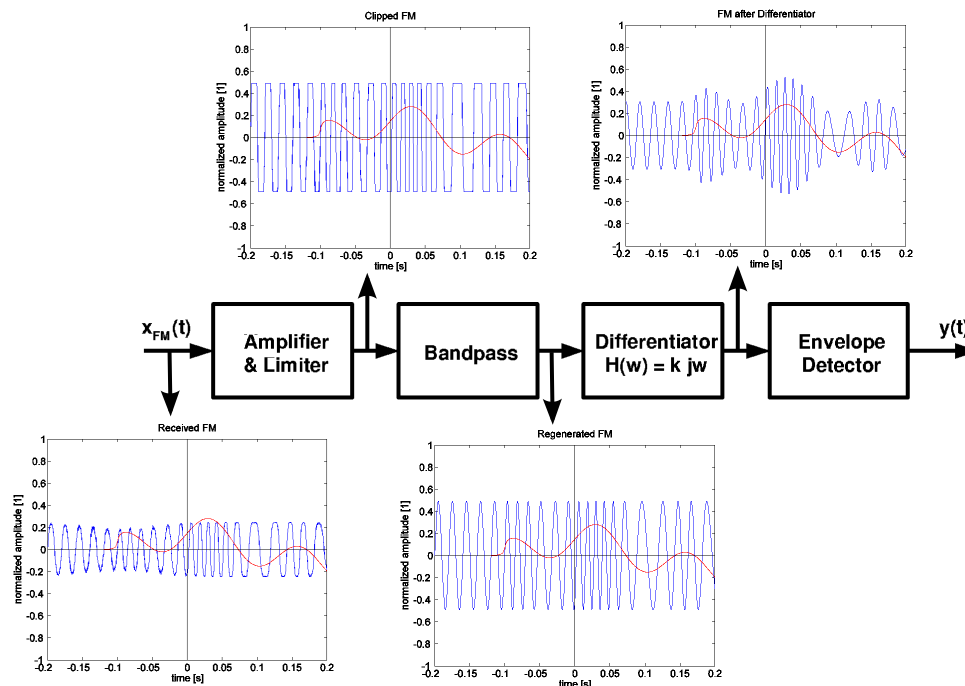
3.7.2 Demodulation mit Frequenz-Diskriminator

Die Amplitude des Ausgangssignals eines Frequenz-Diskriminator ist proportional zur Momentanfrequenz des Eingangssignals. $\rightarrow y_d(t) = k_d \cdot \varphi'(t)$

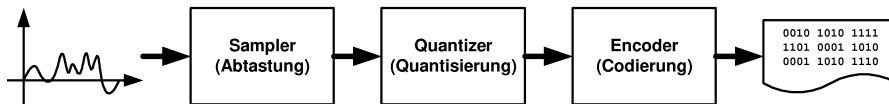
PM: $y_d(t) = k_d \cdot k_p \cdot m'(t)$

FM: $y_d(t) = k_d \cdot k_f \cdot m(t)$

3.8 FM-Empfänger



4 Digitale Signale S.90



- Abtastung = Zeitdiskretisierung (endliche Anzahl Werte pro Zeit)
- Quantisierung = Amplitudendiskretisierung (mit endlich vielen Bits darstellen)
- Codierung = Bit-Codes (Definition, welches Bit welchem Amplitudenintervall entspricht)
- Digitalisierung = Abtastung und Quantisierung

Vorteile der Digitalisierung

Übertragung: - störungsfreie Übertragung (bis zu 100%).

- Einsparung von Bandbreite (geeignete Datenreduktion).

Speicherung: - Einheitliche, kostengünstige Speichermedien.

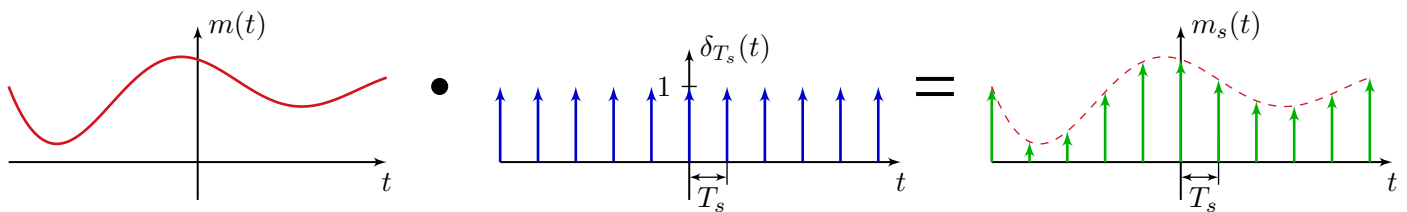
Verarbeitung: - Signalverarbeitung, die für Analogtechnik unrealisierbar war, wird ermöglicht.

Datenschutz: - Kryptologische Methoden für Geheimhaltung, Urheberrechtsschutz, Integrität etc.

4.1 Abtastung S.91

4.1.1 Ideale Abtastung S.91

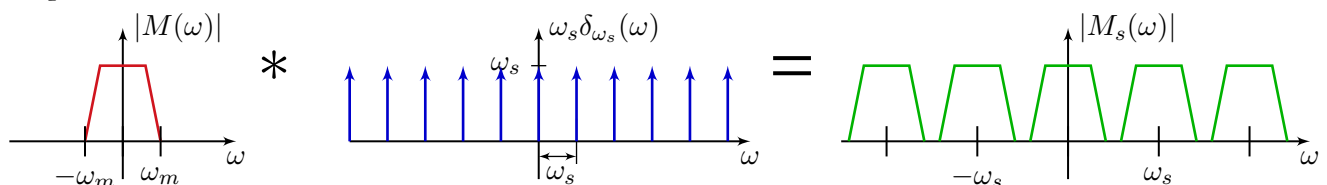
Im Zeitbereich:



$$\begin{aligned}
 m_s(t) &= m(t) \cdot \delta_{T_s}(t) \\
 &= m(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

Im Frequenzbereich:



$$\begin{aligned}
 M_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * (\omega_s \cdot \delta_{\omega_s}(\omega)) \\
 &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \left(\omega_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right) \\
 &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_s)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega_s \cdot \delta_{\omega_s}(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

4.1.2 Rekonstruktion von $m(t)$ aus $m_s(t)$

Rekonstruktion mit Tiefpassfilter:

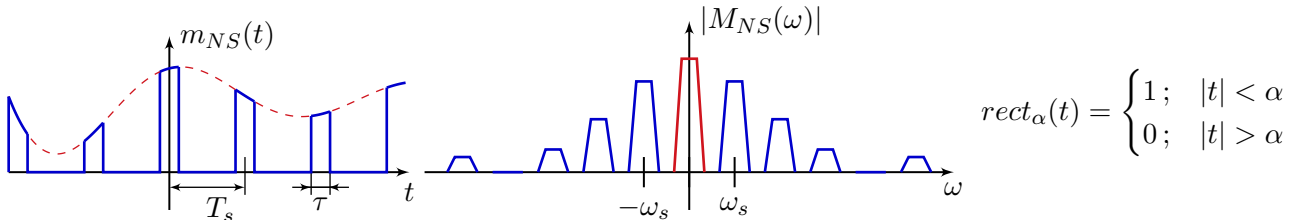
$$\begin{aligned} H_{TP}(\omega) &\bullet\text{---}\circ h_{TP}(t) \\ T_s \text{rect}_{\omega_c}(\omega) &\bullet\text{---}\circ \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \end{aligned}$$

$$\text{Eckfrequenz: } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2T_s}$$

$$\text{Verstärkungsfaktor: } k = T_s$$

$$\begin{aligned} m(t) &= m_s(t) * h_{TP}(t) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \right) * \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \cdot \frac{\sin(\omega_c(t - nT_s))}{\omega_c(t - nT_s)} \end{aligned}$$

4.1.3 Natural Sampling S.92

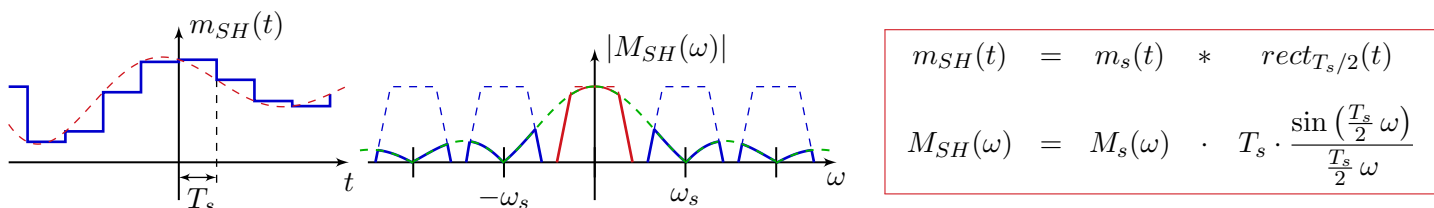


$$\begin{aligned} m_{NS}(t) &= m(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\tau/2}(t - nT_s) \\ M_{NS}(\omega) &= M(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

mit $c_n = \frac{\tau}{T_s} \cdot \frac{\sin(n\omega_s(\tau/2))}{n\omega_s(\tau/2)}$

Rekonstruktion: Bei der Rekonstruktion muss das Signal nach dem Tiefpassfilter noch mit dem Faktor $\frac{T_s}{\tau}$ multipliziert werden, um die Dämpfung wieder aufzuheben.

4.1.4 Flat-Top Sampling (Sample & Hold) S.93



$$\begin{aligned} m_{SH}(t) &= m_s(t) * \text{rect}_{T_s/2}(t) \\ M_{SH}(\omega) &= M_s(\omega) \cdot T_s \cdot \frac{\sin\left(\frac{T_s}{2}\omega\right)}{\frac{T_s}{2}\omega} \end{aligned}$$

4.1.5 Abtasttheorem S.91

- Das Eingangssignal muss bandbeschränkt sein, damit es Aliasingfrei abgetastet werden kann
 $|M(\omega)| \approx 0$ für $\omega > 2\pi B_m$
- Wenn keine Überlappung herrscht, kann das Nachrichtensignal $m(t)$ mit einem idealen Tiefpassfilter (Eckfrequenz $2\pi f_c = \omega_s/2$) wieder herausgefiltert werden.

Nyquist-Shannonsche Abtasttheorem (für Basisbandsignale): $f_s > 2 \cdot B_m$ $2\pi B_m < \omega_s/2$

$$\text{Nyquistrate: } f_N = 2 B_m [Hz]$$

$$\text{Samplingfrequenz: } f_s [Hz]$$

$$\text{Nyquistfrequenz: } f_N = \frac{f_s}{2} [Hz]$$

$$\text{Nachrichtenfrequenz: } f_m [Hz]$$

$$\text{Nyquistintervall: } T_N = \frac{1}{2B_m} [Hz]$$

$$\text{Nachrichtenbandbreite: } B_m [Hz]$$

4.1.5.1 Subsampling

Für **Bandpasssignale** kann die Samplingrate teilweise tiefer gewählt werden (als das Abtasttheorem vorschreibt), ohne dass dies zu Überlappungen in wiederholten Spektrum führt.

Rekonstruktion mit geeignetem Filter und evtl. noch einem Mixer, der es zur Mittenfrequenz f_c zurückschiebt.

Bandpass Sampling Theorem:

$$\frac{2f_u}{n} \leq f_s \leq \frac{2f_l}{n-1} \quad 1 \leq n \leq \frac{f_u}{f_u - f_l}$$

- f_u : Höchster Frequenzanteil des Bandpasssignals
 f_l : Tiefster Frequenzanteil des Bandpasssignals
 f_s : Samplingfrequenz
 $n \in \mathbb{N}_0$: Subsampling-Faktor

4.1.5.2 Oversampling

Bei Oversampling interpoliert ein digitaler Signalprozessor (DSP) Zwischenwerte und berechnet so zusätzliche Samples, um die Samplingrate vor der D/A-Wandlung zu erhöhen.

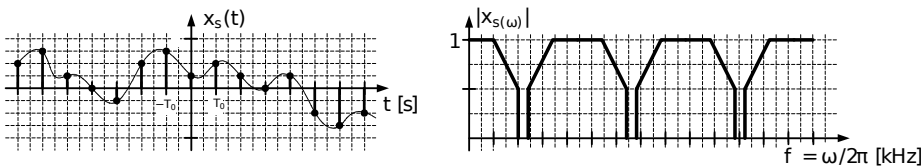
Berechnung der Zwischenwerte:

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_0) \frac{\sin(\omega_c(t - nT_0))}{\omega_c(t - nT_0)} \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{2}$$

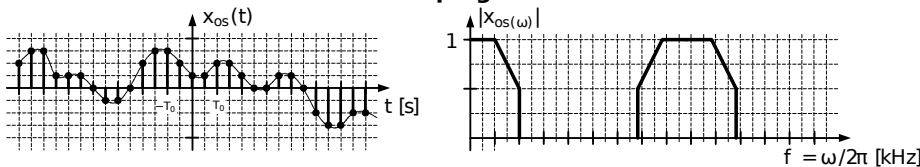
Vorteile:

- TP-Filter kann einfacher realisiert werden → viel kleinere Anforderungen an Filtersteilheit
- Signal wird originaltreuer rekonstruiert

Ohne Oversampling



Mit Oversampling



4.2 Quantisierung S.93

4.2.1 Gleichförmige Quantisierung S.93

- Skalierung von $m(t)$: $|m_n(t)| < 1$
- Wortlänge der Samples: n Bits
- Quantisierungsintervalle: $L = 2^n$
- Intervallbreite: $\Delta = 2/L = 2^{-(n-1)}$

Quantisierungsrauschen:

- Fehlersignal $q_e(nT_s)$: Abweichung vom effektiven zum quantisierten Wert
- charakteristik von weissem Rauschen ⇒ gleichverteilt im Intervall $[-\Delta/2 \dots \Delta/2]$
- Maximaler Fehler: $-\Delta/2 < q_e(nT_s) < \Delta/2$

$$P_{qe} = N = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q_e^2 dq_e = \frac{\Delta^2}{12}$$

Signal-Rausch-Verhältnis:

- Signal wird maximal angesteuert mit $|m(t)|_{max} = 1$
- $|m(t)|$ ist über Intervall $[-1..1]$ gleichverteilt

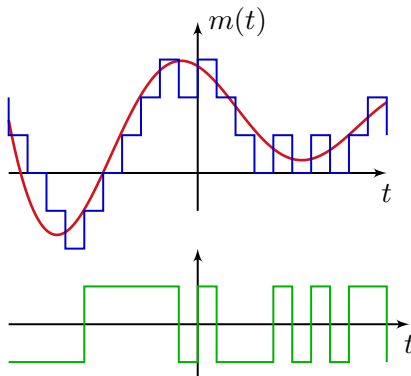
$$\frac{S}{N} = \frac{P_m}{P_{qe}} = \frac{1/3}{\Delta^2/12} = 2^{2n} = n \cdot 6dB$$

4.2.2 Ungleichförmige Quantisierung S.95

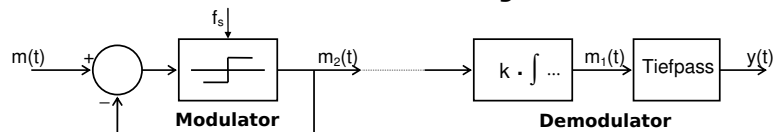
- Bei gleichförmiger Quantisierung ist N konstant → Verschlechterung der SNR bei tiefen Signalpegeln
- bei Sprachsignalen herrschen kleine Pegel vor (nicht gleichverteilt im Intervall $[-1..1]$)
- Quantisierungsintervalle Δ sind für kleine Signalpegel klein und für grosse Signalpegel grösser → SNR wird verbessert

4.3 Delta-Modulation S.97

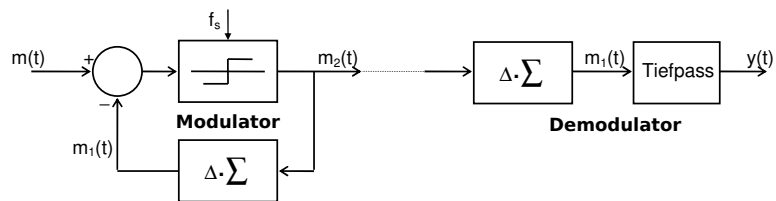
- Analoges Signal durch Folge von kleinen Treppenstufen (Höhe Δ) abbilden.
- Bei jedem Sample geht es hinaus $+\Delta$ oder hinunter $-\Delta$ (bleibt nie flach)
- Diese Information $\pm\Delta$ kann als binäre Zahlenfolge abgespeichert, übertragen oder weiterverarbeitet werden.



Delta-Modulation mit Integrierer



Delta-Modulation mit Summierer



Schrittweite Δ

Zu grosses Δ : Hohes Quantisierungsrauschen

Zu kleines Δ : Integrierter Wert kann Eingangssignal nicht mehr folgen

$$\Delta_{\min}: \frac{\Delta}{T_s} \geq |\text{max. Steigung des Eingangssignals}|$$

Durch höhere Sample rate (kleineres T_s) kann $\Delta_{\min}$ verkleinert werden

Quantisierungsrauschen

$$P_{qe} = N = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} q_e^2 dq_e = \frac{\Delta^2}{3}$$

Adaptive Delta-Modulation:

- Durch raffinierte Codierung kann der Empfänger die Änderungsrate des analogen Signals aus dem binären Δ -Signal ermitteln.
- hohe Änderungsrate des analogen Signals $\rightarrow$ Schrittweite Δ erhöhen
kleine Änderungsrate des analogen Signals $\rightarrow$ Schrittweite Δ verkleinern.
- "Hybride" Verfahren: Anstatt nur 1 Bit wird die Schrittweite Δ mit 2...4 Bit/Sample codiert

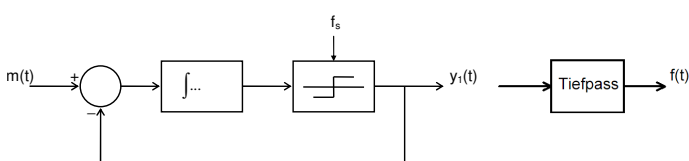
4.4 Delta-Sigma Modulation

Bei der Delta-Sigma Modulation toggelt das Signal immer zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert hin und her. Es wird versucht mit der Maximal-Aussteuerung die mittlere Amplitude zu korrigieren.

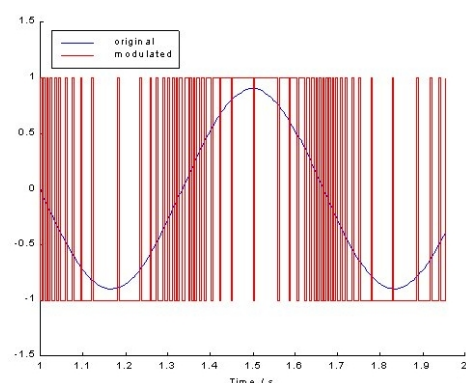
Tiefpassfilter: Mit dem Tiefpassfilter wird der Mittelwert zwischen diesen extremen Aussteuerungen rekonstruiert.

Quantisierungsrauschen: Spektrum des Fehlersignals befindet sich zum grössten Teil im Frequenzbereich, der durch das Tiefpassfilter bei der Rekonstruktion unterdrückt wird.

Delt-Sigma Modulator:

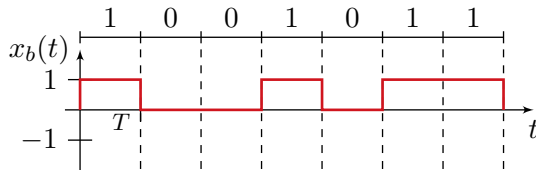


Delta-Sigma Modulation im Zeitbereich:



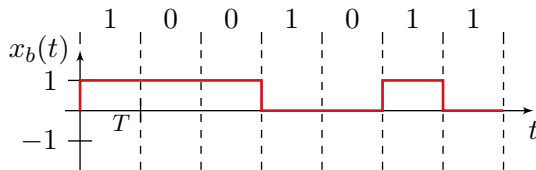
4.5 Leitungscodierung S.99

Unipolar NRZ (Noreturn-to-Zero):



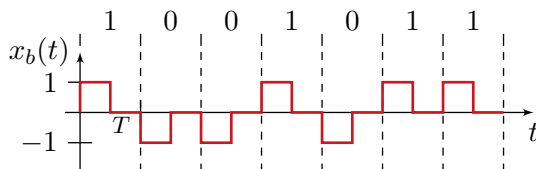
- Mark = 1; Space = 0
- (De)Codieraufwand sehr klein
- Taktrückgewinnung ohne zusätzliche Codierung unsicher
- DC-Freiheit sehr schlecht, viel DC-Anteil
- Bandbreitenbedarf mittel

NRZ-Inverted (NRZI):



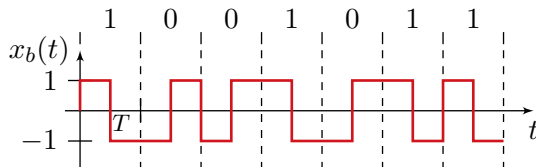
- Mark = Amplitudenwechsel; Space = kein Amplitudenwechsel
- (De)Codieraufwand gering
- Taktrückgewinnung ohne zusätzliche Codierung unsicher
- DC-Freiheit sehr schlecht, viel DC-Anteil
- Bandbreitenbedarf mittel

Bipolar RZ (Return-to-Zero):



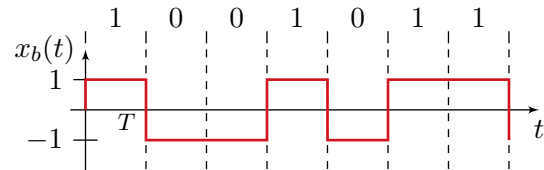
- Mark = 1 (nach halber Bitzeit 0); Space = -1 (nach halber Bitzeit 0)
- (De)Codieraufwand mittel
- Taktrückgewinnung sehr gut
- DC-Freiheit vom Verhältnis Mark/Space abhängig
- Bandbreitenbedarf grösser als NRZ

Manchester Code



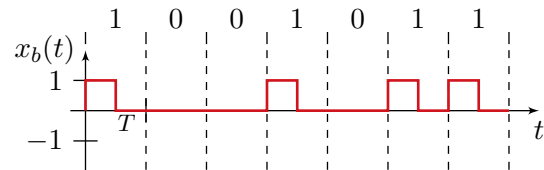
- Mark = 1 → -1; Space = -1 → 1
- (De)Codieraufwand mittel
- Taktrückgewinnung sehr gut
- DC-Freiheit sehr gut
- Bandbreitenbedarf höher als NRZ

Bipolar NRZ (Noreturn-to-Zero):



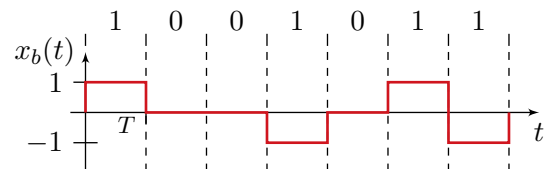
- Mark = 1; Space = -1
- (De)Codieraufwand sehr klein
- Taktrückgewinnung ohne zusätzliche Codierung unsicher
- DC-Freiheit vom Verhältnis Mark/Space abhängig
- Bandbreitenbedarf mittel

Unipolar RZ (Return-to-Zero):



- Mark = 1 (nach halber Bitzeit 0); Space = 0
- (De)Codieraufwand gering
- Taktrückgewinnung besser als NRZ (Space-Folgen heikel)
- DC-Freiheit sehr schlecht, viel DC-Anteil
- Bandbreitenbedarf grösser als NRZ

Alternate Mark Inversion (AMI):



- Mark = ± 1 ; Space = 0
- (De)Codieraufwand mittel
- Taktrückgewinnung besser als NRZ (Space-Folgen heikel)
- DC-Freiheit sehr gut
- Bandbreitenbedarf mittel

Unipolar: +1 oder 0

Bipolar: +1, -1 oder 0

Level-Codierung: Amplitude $\hat{=}$ Bitwert

Invertierte Codierung: Amplitudenwechsel $\hat{=}$ Bitwert

Binär: 2 Signalformen für 2-wertiges Symbol

Pseudoternär: 3 Signalformen für 2-wertiges Symbol

Ternär: 3 Signalformen für 3-wertiges Symbol

4.6 Bandbreitenbedarf von Pulse-Code-Modulation-Signalen (PCM) bei Basisbandübertragung S.101

Der Bandbreitenbedarf ist nicht als explizite Zahl berechenbar. Er ist abhängig von:

- Wertigkeit der Symbole (Anzahl Bits pro Symbol)
- Leitungscodierungsart

4.6.1 minimaler Bandbreitenbedarf im Binären Fall

binärer Datenstrom als Folge von Samples übertragen (Abtastung von $m(t)$).

Samplingrate: $f_s > 2 \cdot B_m$

Bitrate: $n \cdot f_s > 2n \cdot B_m$

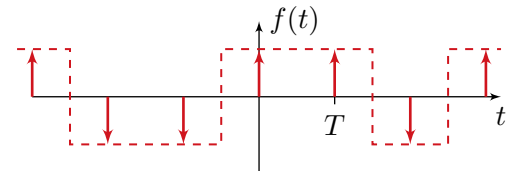
minimale Bandbreite:

$$B_{PCM} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot f_s > n \cdot B_m$$

effektiver Bandbreitenbedarf:

$$B_{eff} > B_{PCM} > n \cdot B_m$$

(weil es keine idealen Filter gibt)



4.7 Intersymbol Interferenz (ISI) S.101

- Wenn digitale Signale mit Rechteckimpulsen dargestellt werden, müssen die Pulse verbreitert werden, um Bandbreite zu sparen.
- Verarbeitung führt zu Überlappung benachbarter Pulse → Intersymbol Interferenz
- Interferenz + weitere Störungen = Bitfehler beim Empfänger
- Bereich für korrekte Entscheidungsschwelle wird verkleinert (vertikale Augenöffnung)

Massnahmen gegen Intersymbol Interferenz

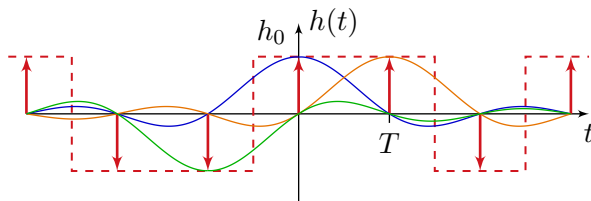
- Abtastzeitpunkt muss vom Empfänger optimal gewählt werden (horizontale Augenöffnung)
- Sendepulse so wählen, das sich das Auge maximal öffnet:
 - Zum Abtastzeitpunkt soll keine Interferenz der Nachbarsymbole vorhanden sein.
 - Synchronisation mit Empfänger → Vergrößerung des Störabstandes → Verringerung der Bitfehler.

4.7.1 Erstes Nyquist-Kriterium

Wenn erstes Nyquist-Kriterium erfüllt ist, kann Intersymbol-Interferenz eliminiert werden.

Im Zeitbereich

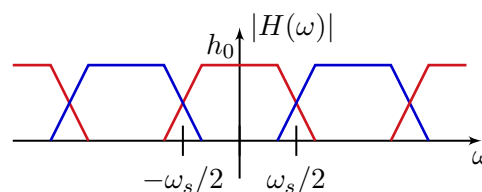
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n \cdot T) \cdot \delta(t - n \cdot T) = h_0 \cdot \delta(t)$$



- Signal muss mit $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_s}$ abgetastet werden.

Im Frequenzbereich

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) = h_0$$



- Das Spektrum muss summiert konstant sein.
- Minimale Bandbreite: $B_{min} = \frac{1}{2T} = \frac{f_s}{2}$

4.7.2 Zweites Nyquist-Kriterium

- Das Augendiagramm soll nicht nur bezüglich der Amplitude, sondern auch bezüglich der Zeitachse maximal geöffnet sein.
- Zusätzlich zu den Nullstellen bei nT muss die Impulsform $h(t)$ auch Nullstellen haben bei:
 $\pm \frac{3}{2}T; \pm \frac{5}{2}T; \pm \frac{7}{2}T; \dots$
- Von der Gruppe der Raised-Cosine Pulsen erfüllt nur derjenige mit Roll-off Faktor $\alpha = 1$ das zweite Nyquist-Kriterium

4.7.3 Raised Cosine Pulse S.103

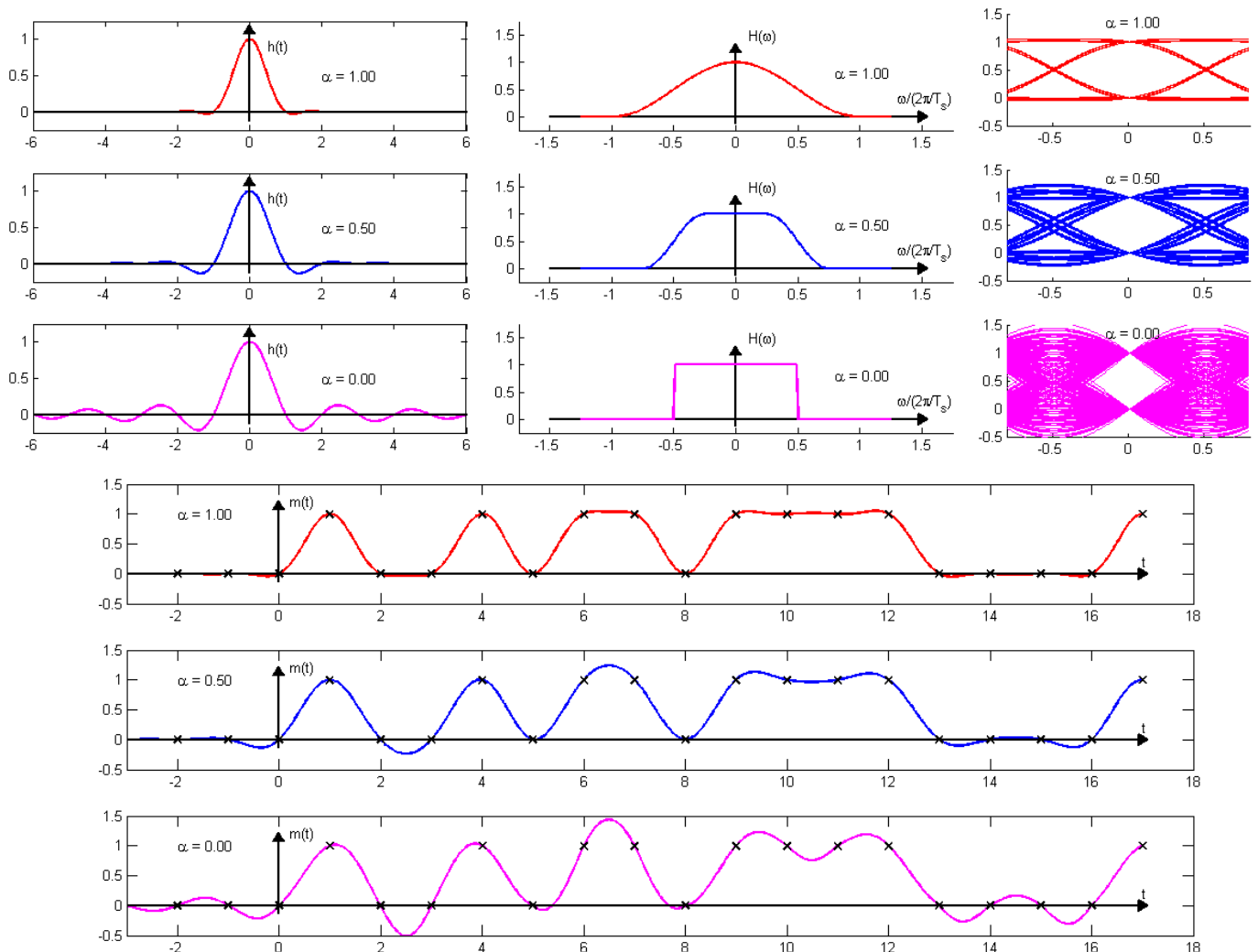
$$h(t) = \frac{1}{T_s} \left(\frac{\sin(Wt)}{Wt} \right) \left(\frac{\cos(\alpha Wt)}{1 - (2\alpha Wt/\pi)^2} \right)$$

Roll-off-Faktor α : $0 \leq \alpha \leq 1$

$W \hat{=}$ halber Symbolrate: $W = \frac{\pi}{T_s}$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)W \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{2\alpha W} (|\omega| - W) \right) \right] & (1 - \alpha)W \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)W \\ 0 & (1 + \alpha)W < |\omega| \end{cases}$$

Bandbreite: $B = \frac{f_s}{2} \cdot (1 + \alpha)$



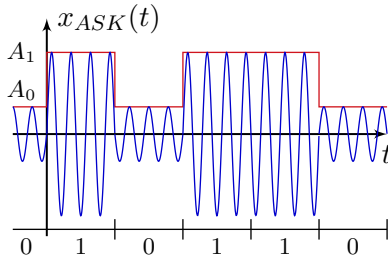
4.8 Binäre Übertragung mit Trägersignal S.104

Übertragung des Signals in einem Hochfrequenten Übertragungsband:

Vorteile: Physikalische Anpassung an Kanal, Frequenzmultiplexing möglich, Erhöhte Störfestigkeit

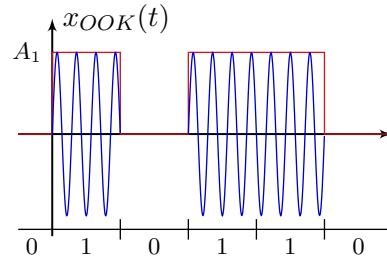
Binäres Nachrichtensignal schaltet Trägerparameter zwischen zwei definierten Zuständen um. Es ändert die Amplitude (ASK), die Phase (PSK) oder die Momentanfrequenz (FSK).

Amplitude Shift Keying (ASK):



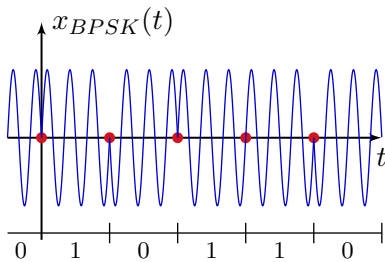
- Symbolwert $\hat{=}$ Amplitude des Trägers
- Binär: Mark = A_1 ; Space = A_0

On-Off Keying (OOK):



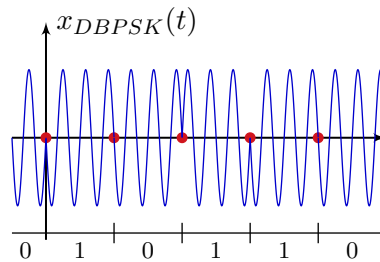
- Symbolwert $\hat{=}$ Amplitude des Trägers
- Binär: Mark = A_1 ; Space = 0
- Amplitudenmodulation mit unipolarem NRZ-Signal.

Binary Phase Shift Keying (BPSK):



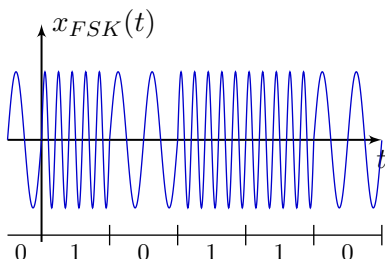
- Symbolwert $\hat{=}$ Phasenlage des Trägers
- Binär: Phasen um π verschoben:
Mark = 0; Space = π
- DSB-SC Modulation mit bipolarem NRZ-Signal

Differential BPSK (DBPSK):



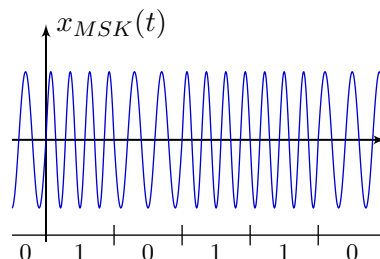
- Symbolwert $\hat{=}$ Phasenwechsel des Trägers
- Binär: Mark = Phasenwechsel;
Space = kein Phasenwechsel
- Mark und Space können nur mit zusätzlicher Synchronisation unterschieden werden
- Höhere Fehlerrate: Doppel- statt Einzelfehler
- DSB-SC Modulation mit bipolarem NRZI-Signal

Frequency Shift Keying (FSK):



- Symbolwert $\hat{=}$ Frequenz des Trägers
- Binär: Mark = f_1 ; Space = f_0
- Phasensprünge erlaubt: Bildung durch Kombination von OOK-Signalen
- keine Phasensprünge: Frequenzmodulation mit NRZ-Signal $\rightarrow$ kleinere Bandbreite

Minimum Shift Keying (MSK):



- Symbolwert $\hat{=}$ integrierter Phasenabweichung
zum Träger: $\int_{n \cdot T}^{(n+1) \cdot T} \Delta\varphi(t) dt$
- Binär: Mark = $\frac{\pi}{2}$; Space = $-\frac{\pi}{2}$
- Mark- und Spacesignal sind zueinander orthogonal $\rightarrow$ Bitfehlerrate kleiner

Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK)

- Siehe "Übertragung von digitalen Signalen auf Trägersignal" Folie 9.

4.9 Äquivalente Basisband-Darstellung von Bandpasssignalen

Ein Bandpasssignal kann als Basisbandsignal aufgefasst werden, welches zur (positiven) Trägerfrequenz $+f_c$ hin verschoben wird.

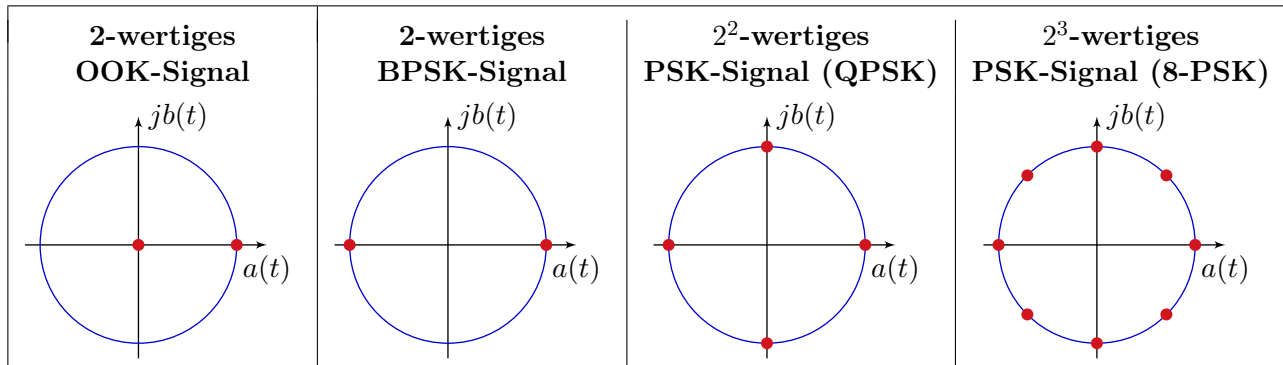
$$\begin{aligned} x_{BP}(t) &= \operatorname{Re} [x_{BB}(t) \cdot e^{j\omega_c t}] & | & \quad x_{BB}(t) = a(t) + jb(t) \\ &= a(t) \cdot \cos(\omega_c t) - b(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

$X_{BP}(\omega)$ symmetrisch zu $\omega_c \Rightarrow x_{BB}(t)$ Reell

$X_{BP}(\omega)$ asymmetrisch zu $\omega_c \Rightarrow x_{BB}(t)$ Complex

4.9.1 Basisband-Darstellung

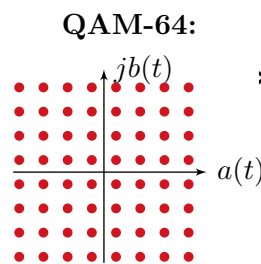
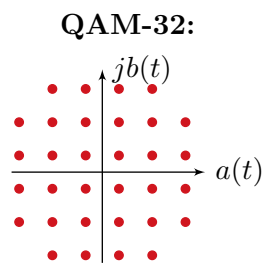
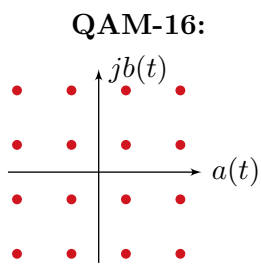
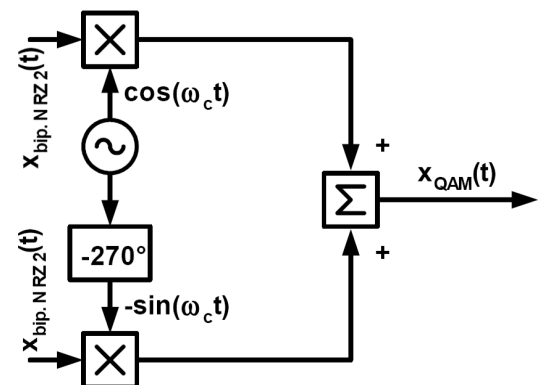
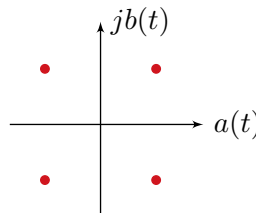
Wenn das Nachrichtensignal ein rechteckiges Signal ist, beschränkt sich die Basisband-Darstellung auf einzelne Werte in der komplexen Ebene.



4.10 Quadrature Amplitude Modulation (QAM)

QAM-4 kann mit zwei bipolaren NRZ-Signalen realisiert werden, welche den cos-Träger und den (negativen) sin-Träger modulieren.

QAM-4: einfachste Konstellation (identisch mit QPSK)

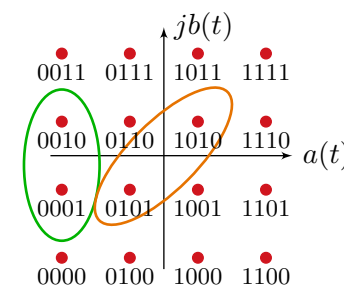


4.10.1 Gray-Codierung von QAM

Bitfehler entstehen, wenn bei beeinträchtigtem Empfang falsche Amplitudenwerte decodiert werden. Dabei ist es am Wahrscheinlichsten, dass ein benachbartes Feld detektiert wird.

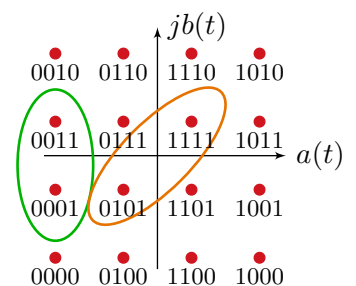
Durch den **Gray-Code** können **mehrfache Bitfehler vermieden** werden (zwischen Nachbarn ändert nur 1 Bit).

Linear Codierung



2 Bitfehler bei Fehldetektion
4 Bitfehler bei Fehldetektion

Gray-Codierung



1 Bitfehler bei Fehldetektion
2 Bitfehler bei Fehldetektion

4.10.2 Pulsformfilter zur QAM-Modulation

Rechteckige Signale im Basisband $\rightarrow$ hoher Bandbreitenbedarf im Basisband $\rightarrow$ doppelt hoher Bandbreitenbedarf im Übertragungsband!

Um im **Übertragungsband** **weniger Bandbreite zu belegen**, Bandbreite im Basisband mittels **Pulsformfilter** reduzieren.

- Bandbreite gezielt minimieren
 - Intersymbol Interferenz (ISI) zum Abtastzeitpunkt verhindern
 - geeignete Pulsformfilter: Raised-Cosine Filter
- } wie im Basisband (Kapitel 4.7.1-4.7.3)

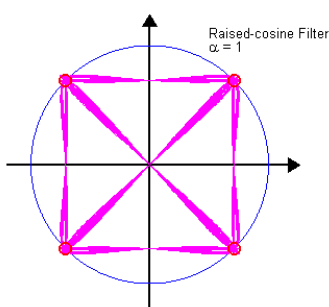
4.10.2.1 Gefilterte Übergänge:

Wird QPSK mit einem bandbeschränkten QAM-Modulator realisiert, führt ein Übergang zu einem gegenüberliegenden Punkt zu einer Durchquerung des Ursprungs. Dadurch verschwindet der Träger kurzzeitig.

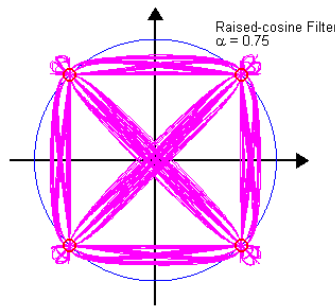
$\rightarrow$ Abrupte Leistungswechsel für Sender

$\rightarrow$ schwierigere Synchronisation für Empfänger

QPSK mit $\alpha = 1$



QPSK mit $\alpha = 0.75$



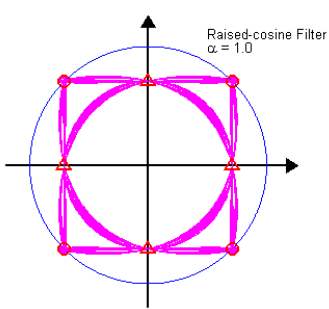
4.10.2.2 Filterung mit Offset

Das Durchlaufen des Ursprungs wird vermieden, indem die Bitwerte auf den orthogonalen Trägern nicht gleichzeitig, sondern um die halbe Bitzeit $T/2$ versetzt wechseln (Offset QPSK).

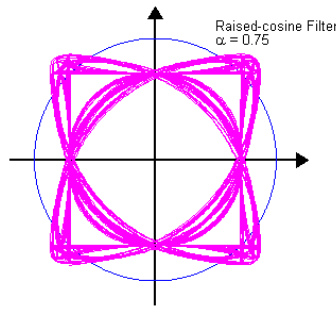
$\rightarrow$ Übertragene Bits werden doppelt so oft ausgewertet (allerdings jeweils nur ein Signalteil).

$\rightarrow$ Ändert nichts an der Bandbreite (Modulation des cos- und sin-Träger bleibt gleich)

Offset QPSK mit $\alpha = 1$



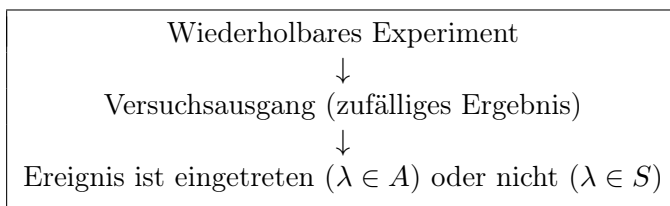
Offset QPSK mit $\alpha = 0.75$



5 Wahrscheinlichkeitsrechnung S.128

5.1 Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist ein wiederholbares Experiment mit einem zufälligen Ergebnis.



Begriffsdefinitionen:

Begriff	Modell	Bemerkungen	Beispiel Würfel
Elementarereignis	λ	einzelne Versuchsergebnisse	$\lambda = \{5\}$
Ergebnisraum	S	alle möglichen Versuchsausgänge	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis	$A \subset S$	bestimmte Gruppe von Versuchsausgängen	gerade Zahl: $A = \{2, 4, 6\}$
sicheres Ereignis	S	tritt immer ein	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
unmögliches Ereignis	$\emptyset$	tritt nie ein	$\emptyset = \{ \}$

5.2 Laplace Experiment

Ein Experiment mit endlich vielen Elementarereignissen, welche alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \quad \text{mit} \quad P(\lambda_i) = \frac{1}{n}$$

5.3 Verknüpfung von Ereignissen

Begriff	Modell	Grafik	Begriff	Modell	Grafik
Komplementäres Ereignis	$\bar{A} = S \setminus A$		Disjunkte Ereignisse A, B	$A \cap B = \emptyset$	
Vereinigung von A und B	$A \cup B$		Sicheres Ereignis	S	
Durchschnitt von A und B	$A \cap B$		Unmögliches Ereignis	$\emptyset = \{ \}$	

5.4 Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Funktion $P(A)$, welche jedem Ereignis $A \subset S$ eine reelle Zahl zuweist.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad n_A : \text{Anzahl Ereignisse } A \text{ bei } n \text{ Experimenten}$$

Axiome der Wahrscheinlichkeit $P(A)$:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls A und B disjunkt sind

weitere Eigenschaften von $P(A)$:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) \leq P(B)$ falls $A \subset B$

5.4.1 A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

A-priori-Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit aufgrund eines **physikalischen Gesetzes** oder eines **Modells** zuweisen.

Bsp: Münzwurf, Würfelwurf, Zahlenlotto

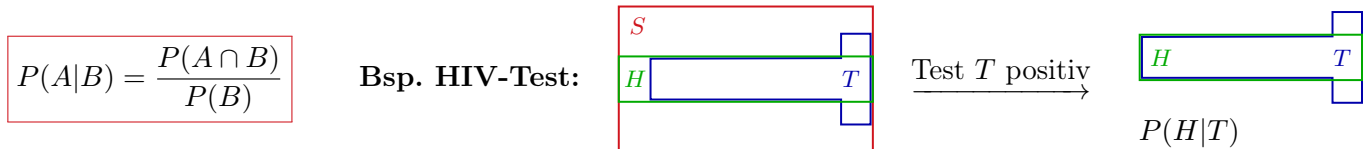
A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit **empirisch** (experimentell) ermitteln.

Bsp: Umfälle, Gewinnchancen, bedingte W'keiten

5.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt unter der Annahme, dass Ereignis B eingetroffen ist.



5.5.1 Abhängige und Unabhängige Ereignisse

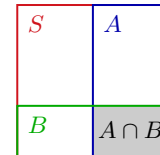
Unabhängige Ereignisse:

Zwei Ereignisse A und B sind statisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B|A) = P(B)$$

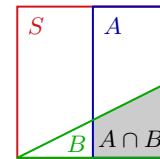
$\Rightarrow$ Es kann nicht vom einen Ereignis auf das Andere geschlossen werden.



Abhängige Ereignisse:

$P(A|B)$ bzw. $P(B|A)$ ändert sich je nach Bedingung B bzw. A

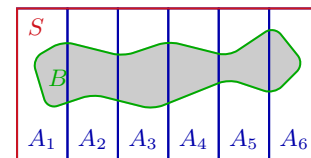
$\Rightarrow$ Es kann vom einen Ereignis auf das Andere geschlossen werden.



5.6 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Wenn $A_1, \dots, A_n$ disjunkte Ereignisse sind und $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$ dann gilt:

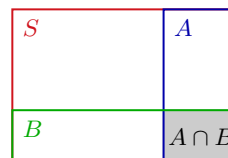
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$



5.7 Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

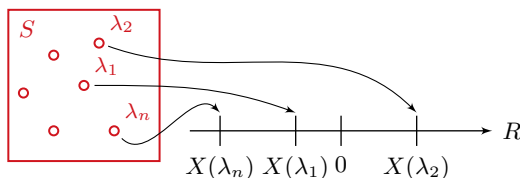
$$P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$



$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

5.8 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable $X(\lambda)$ ist eine Funktion, die jedem Ergebnis λ_i eine reelle Zahl zuweist.



Bsp. Münze:
$$X(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda \in \{\text{Kopf}\} \\ -1 & , \lambda \in \{\text{Zahl}\} \end{cases}$$

5.8.1 Zweidimensionale Zufallsvariablen

Die **zwei Zufallsvariablen** $X(\lambda)$ und $Y(\lambda)$ weisen jedem Ergebnis λ_i des Ergebnisraums S **zwei reelle Zahlen** zu. Diese zwei Zufallsvariablen können voneinander **abhängig oder unabhängig** sein.

Bsp: Prüfungsnote und Erfolgserlebnis der Studenten.

5.8.2 Funktionen von Zufallsvariablen

Durch anwenden einer Funktion auf eine Zufallsvariable entsteht wiederum eine Zufallsvariable.

Zufallsvariable Y : $Y = g(X)$ $\Leftrightarrow$ Zufallsvariable X : $X = h(Y) = g^{-1}(Y)$

Bsp: Prüfungsnote als Funktion der Punktzahl, Bitwerte als Funktion der Amplitude

5.9 Statistische Kennwerte

5.9.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert entspricht dem linearen Mittelwert μ .

$E[\dots]$	Diskrete ZV	Kontinuierliche ZV
X	$E[X] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i)$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$
$Y = g(X)$	$E[Y] = \sum_i g(x_i) \cdot p_X(x_i)$	$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$
$Z = g(X, Y)$	$E[Z] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) \cdot p_{XY}(x_i, y_j)$	$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= E[X] + E[Y] \\ E[c \cdot X] &= c \cdot E[X] \\ E[X \cdot Y] &= E[X] \cdot E[Y] \quad \text{wenn } X, Y \text{ unabhängig} \end{aligned}$$

5.9.2 n.-Moment, (k,n).-Moment und Korrelation

	Diskrete ZV	Kontinuierliche ZV
m_n	$E[X^n] = \sum_i x_i^n \cdot p_X(x_i)$	$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) dx$
m_{kn}	$E[X^k Y^n] = \sum_j \sum_i x_i^k y_j^n \cdot p_{XY}(x_i, y_j)$	$E[X^k Y^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n \cdot f_{XY}(x, y) dx dy$

Korrelation:

$$m_{11} = E[XY]$$

$m_{11} = E[XY] = 0 \Rightarrow X$ und Y sind **orthogonal zueinander**!

5.9.3 Varianz und Standardabweichung und Kovarianz

Die **Varianz** $Var(X) = \sigma_X^2$ und die **Standardabweichung** σ_X sind Masse für die Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert (Mittelwert).

	allgemein	Diskrete ZV	Kontinuierliche ZV
$Var(X)$	$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$	$\sigma_X^2 = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot p_X(x_i)$	$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f_X(x) dx$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) && \text{wenn } X, Y \text{ unabhängig} \\ Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) && \text{wenn } X, Y \text{ abhängig} \\ Var(c \cdot X) &= c^2 \cdot Var(X) \\ Var(X \cdot Y) &= Var(X) \cdot Var(Y) + Var(X) \cdot E[Y]^2 + Var(Y) \cdot E[X]^2 \end{aligned}$$

Kovarianz:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = m_{11} - \mu_X \cdot \mu_Y$$

$\sigma_{XY} = 0 \Rightarrow X$ und Y sind **unkorreliert** (unabhängig)!

Korrelations-Koeffizient:

$$\rho(X, Y) = \rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad |\rho_{XY}| \leq 1$$

5.10 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.10.1 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion ist definiert als:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Sie hat folgende **Eigenschaften**:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $F_X(a) \leq F_X(b)$ für $a < b$
- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(\infty) = 1$
- $F_X(x)$ ist monoton wachsend

5.10.2 Wahrscheinlichkeitsmassefunktion und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlichkeitsmassefunktion:

Die Höhe der Treppenstufen der Verteilungsfunktion ist ein Mass für die Auftretenswahrscheinlichkeit der Werte x_i und entspricht gerade dem Wert der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion an der Stelle x_i .

Es gilt:
$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

- $0 \leq p_X(x_i) \leq 1 \quad \forall i$
- $p_X(x) = 0$ für $x \neq x_i$
- $\sum_i p_X(x_i) = 1$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

Die Steigung der Verteilungsfunktion an der Stelle x ist ein Mass für die Auftretenswahrscheinlichkeit von Werten im Bereich von x und entspricht gerade dem Wert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion an der Stelle x

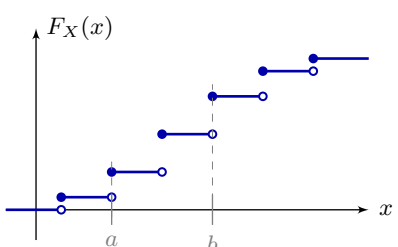
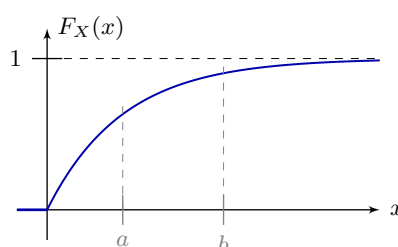
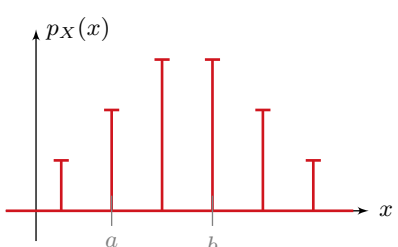
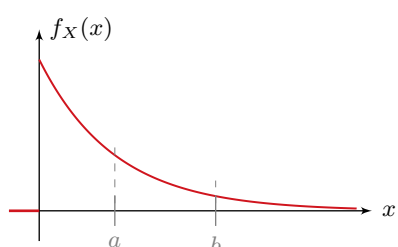
Es gilt:

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tau) d\tau$$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

5.10.3 Übersicht

	Diskrete Zufallsvariable X	Kontinuierliche Zufallsvariable X
	Verteilungsfunktion  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$	
	 $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$	
	Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $P(a < X \leq b) = \sum_a^b p_X(x_i)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x_i) dx$
Erwartungswert	$E(X) = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$
stat. Leistung:	$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p_X(x_i)$	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx$

5.10.4 Verbundfunktionen von zweidimensionalen Zufallsvariablen

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen können auch Funktionen zweier Zufallsvariablen/Variablen sein.

- | | | |
|--------------------|---------------|---|
| • $F_X(x), F_Y(y)$ | $\Rightarrow$ | • Verbundverteilungsfunktion $F_{XY}(x, y)$ |
| • $p_X(x), p_Y(y)$ | | • Verbundwahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{XY}(x, y)$ |
| • $f_X(x), f_Y(y)$ | | • Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{XY}(x, y)$ |

Die Verbundfunktionen beschreiben die Abhängigkeiten zwischen den beiden Zufallsvariablen X und Y .

Für **statisch unabhängige** Zufallsvariablen gilt:

$$\begin{array}{lcl}
 F_{XY}(x, y) & = & F_X(x) \cdot F_Y(y) \\
 p_{XY}(x, y) & = & p_X(x) \cdot p_Y(y) \\
 f_{XY}(x, y) & = & f_X(x) \cdot f_Y(y)
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{lcl}
 F_X(x) & = & F_{XY}(x, \infty) \\
 p_X(x_i) & = & \sum_{y_j} p_{XY}(x_i, y_j) \\
 f_X(x) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy
 \end{array}$$

5.11 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.11.1 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung wird für Bernoulli-Experimente gebraucht.

Bernoulli-Experiment: Experiment mit 2 möglichen Ergebnissen (0 oder 1)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{mit W'keit } p \\ 0, & \text{mit W'keit } 1 - p \end{cases}$$

Experiment wird n -mal durchgeführt $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, dass $X = 1$ k -mal eingetreten ist:

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Erwartungswert:

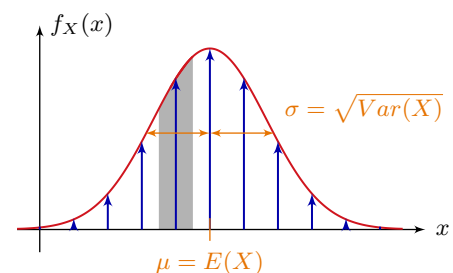
$$E(X) = n \cdot p$$

Varianz:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Approximationen der Binomialverteilung mit

- Poissonverteilung mit $\alpha = n \cdot p$
Falls $p < 0.05$ und $n > 10$
- Normalverteilung mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
Falls $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$



5.11.2 Poissonverteilung

Wahrscheinlichkeitsmassefunktion:

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^k}{k!}$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = e^{-\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{k \leq x} \frac{\alpha^k}{k!}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = Var(X) = \alpha$$

k : bspw. Anzahl Fehler einer sehr langen Bitfolge.

$\alpha = n \cdot p$: bspw. mittlere Fehlerrate

5.11.3 Normalverteilung (Gaussverteilung)

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu$$

Varianz:

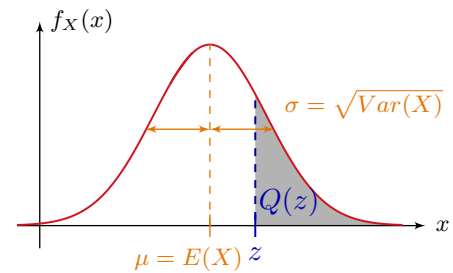
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\xi^2/2} d\xi = Q\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

für $z < 0$: $Q(-z) = 1 - Q(z)$

Werte der Q -Funktion siehe Schaum S.326



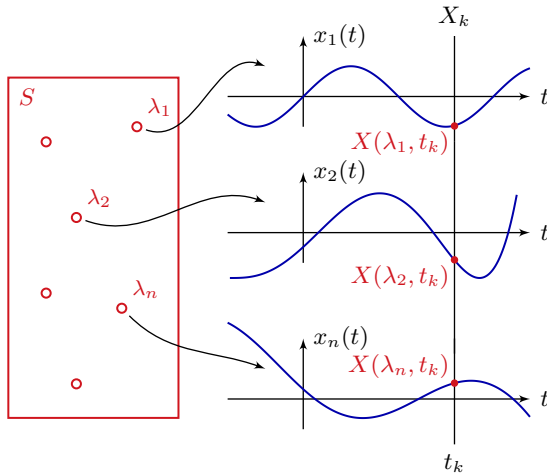
5.12 Kombinatorik

Produktregel	Permutatuon: Reihenfolge	Kombinationen: Auswahl
Für jede der n_1 Möglichkeiten an Position 1 gibt es n_2 Möglichkeiten für Position n_2 , ...	Auf wie viele Arten lassen sich n verschiedene Objekte anordnen?	Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n auswählen?
$\prod_{i=1}^k n_i$	$P_n = n!$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

6 Zufallsprozesse S.165

6.1 Definition Zufallsprozess

Ein Zufallsprozess $X(t, \lambda)$ bzw. $X(t)$ ist eine Funktion, die jedem **zufälligen Ergebnis** λ_i eine **deterministische Funktion** $x_i(t)$ zuweist. $\rightarrow X(t, \lambda_i) = x_i(t)$



- Die Funktion $x_i(t)$ ist im Normalfall **deterministisch** und reellwertig
- Alle $x_i(t)$ bilden eine Schar von Probefunktionen.
- Für einen **ausgewählten Zeitpunkt** t_k definiert $X(t_k, \lambda)$ eine Zufallsvariable $X_k(\lambda)$ bzw. X_k
 $\rightarrow X(t_k, \lambda_i) = x_i(t_k)$

Bsp. $x_\lambda(t) = \cos(\omega_c t + \varphi_\lambda)$

Dies ist ein deterministisches Signal mit einer zeitlich konstanten, von λ abhängigen zufälligen Phasenlage φ_λ

6.1.0.1 Statistische Beschreibung von Zufallsprozessen

Für jedes t_k kann die Zufallsvariable $X_k(\lambda)$ bzw. X_k statisch beschrieben werden:

	1-Dimensionale ZV	2-Dimensionale ZV
Verteilungsfunktion	$F_{X_k}(x_k; t_k) = P(X_k(t_k) \leq x_k)$	$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	$f_{X_k}(x_k; t_k) = \frac{\partial F_{X_k}(x_k; t_k)}{\partial x_k}$	$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$

6.2 Statistische Kennwerte (Scharmittel)

Bei den statischen Kennwerten handelt es sich um Mittelwerte über die ganze Schar von Probefunktionen. D.h. die Funktionswerte der Probefunktionen $x_i(t)$ werden zu jedem Zeitpunkt t gemittelt. Dies ergibt Kennwertfunktionen, die von der Zeit t abhängig sind.

Erwartungswert	$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x; t) dx$
Autokorrelation	$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$
Autokovarianz	$C_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (X(t_2) - \mu_X(t_2))] = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2)$

6.3 Zeitliche Mittelwerte

6.3.1 Zeitmittelwerte einer Musterfunktion $x_i(t)$

Der **zeitliche Mittelwert** einer Probefunktion $x_i(t)$, des Zufallsprozesses $X(t)$, ist wie folgt definiert:

Mittelwert der Funktion $x_i(t)$	$\bar{x}_i = \langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)_i dt$
Mittelwert der Autokorrelation $R_{X_i X_i}(\tau)$	$\bar{R}_{X_i X_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) dt$

6.3.2 Zeitmittelwerte einer Schar von Funktionen

Werden die zeitlichen Mittelwerte für den gesamten Zufallsprozess $X(t)$ (über die ganze Schar von Probefunktionen) bestimmt, so sind $\bar{x}$ und $\bar{R}_{XX}(\tau)$ **Zufallsvariablen**, deren Wert davon abhängt, welche Probefunktion $x_i(t)$ verwendet wurde.

Stationäre Prozesse (WSS):

Bei stationären Prozessen stimmen die Erwartungswerte der zeitlich gemittelten Funktionen mit den zeitunabhängigen Scharmittelwerten überein.

$$\begin{aligned} E[\bar{x}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu_X dt = \mu_X \\ E[\bar{R}_{XX}(\tau)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t) \cdot x(t+\tau)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(\tau) dt = R_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

6.4 Stationarität

Ein stationärer Prozess verändert seine statistischen Eigenschaften aufgrund einer zeitlichen Verschiebung nicht.

6.4.1 Schwach stationärer Zufallsprozess (Wide-Sense Stationary (WSS))

Ein Zufallsprozess ist schwach stationär, wenn seine statischen Eigenschaften im 2-dimensionalen unabhängig von einer beliebigen zeitlichen Verschiebung c sind.

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c) \rightarrow \text{Stationarität 2-ter Ordnung!}$$

Wichtige Eigenschaften:

- Mittelwert: $E[X(t)] = \mu_X$ konstant
- Statistische Leistung: $E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ konstant
- Autokorrelation: $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau)$ $\tau = t_2 - t_1$ nur Zeitdifferenzabhängig
- Autokovarianz: $C_{XX}(t_1, t_2) = C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$ $\tau = t_2 - t_1$ nur Zeitdifferenzabhängig

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert } E[X(t)] &= \text{konst.} \quad \cap \quad \text{Autokorrelationsfunktion } R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) \\ &\Rightarrow \text{Zufallsprozess } X(t) \text{ ist schwach stationär} \end{aligned}$$

Verbund schwach stationär

Die Zufallsprozesse $X(t)$, $Y(t)$ sind Verbund schwach stationär, wenn:

- $X(t)$ und $Y(t)$ schwach stationär sind
- $R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau)$
- $C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \cdot \mu_Y$

6.4.2 Streng stationärer Zufallsprozess (Strict-Sense Stationary (SSS))

Ein Zufallsprozess ist streng stationär, wenn seine statischen Eigenschaften unabhängig von einer beliebigen zeitlichen Verschiebung c sind.

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c) \rightarrow \text{Stationarität } n\text{-ter Ordnung!}$$

Wichtige Eigenschaften:

Jeder streng stationäre Zufallsprozess ist auch ein schwach stationär Zufallsprozess

⇒ Der Zusammenhang zwischen $X(t)$ und $X(t+\tau)$ ist nur von der **Zeitdifferenz τ abhängig!**

6.5 Ergodizität

Ergodizität ist eine noch viel Stärkere Eigenschaft als die Stationarität. Wenn bei einem stationären Prozess die zeitlichen Mittelwerte $\bar{x}_i$, $\bar{R}_{X_i X_i}(\tau)$ **jeder Musterfunktion** $x_i(t)$ gerade den Scharmittelwerten μ_X , $R_{XX}(\tau)$ entspricht, handelt es sich um einen ergodischen Prozess.

$$\bar{x}_i = \langle x_i(t) \rangle \stackrel{\text{ergodisch}}{=} E[X(t)] = \mu_X$$

$$\bar{R}_{X_i X_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle \stackrel{\text{ergodisch}}{=} E[X(t) \cdot X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Dies erlaubt, aus einer Musterfunktion $x_i(t)$ auf die statistischen Eigenschaften des Ensembles zu schliessen.

Eigenschaften

- $E[X(t)] = \bar{x} = \langle x(t) \rangle$ DC-Level
- $E[X(t)]^2 = \bar{x}^2 = \langle x(t) \rangle^2$ DC-Leistung
- $E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \bar{x}^2 = \langle x^2(t) \rangle$ Gesamtleistung
- $\sigma_X^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ AC-Leistung
- $\sigma_X(t) = \bar{\sigma}_X$ RMS-Level des AC-Signals (Effektivwert)

Beispiel: Bei dem jährlichen Schützenfest sind die durchschnittliche Punktzahl und deren statistische Verteilung jedes Jahr gleich $\rightarrow$ stationärer Prozess.

Ein schlechter Schütze erreicht nie die durchschnittliche Punktzahl $\rightarrow$ kein ergodischer Prozess.

6.6 Korrelation und Leistungsdichtespektrum von stationären Prozessen

6.6.1 Autokorrelation

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t) X(t + \tau)]$$

Eigenschaften:

- $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$
- $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$
- $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$

6.6.2 Kreuzkorrelation

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t) Y(t + \tau)]$$

Eigenschaften:

- $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$ (Indizesreihenfolge!)
- $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$
- $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0) \cdot R_{YY}(0)}$
- $R_{XY}(\tau) = 0 \rightarrow$ Zufallsprozesse sind **orthogonal** zueinander

6.6.3 Autokovarianz

$$C_{XX}(\tau) = E\left[\left(X(t) - E[X(t)]\right) \cdot \left(X(t + \tau) - E[X(t + \tau)]\right)\right] = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$$

6.6.4 Kreuzkovarianz

$$C_{XY}(\tau) = E\left[\left(X(t) - E[X(t)]\right) \cdot \left(Y(t + \tau) - E[Y(t + \tau)]\right)\right] = R_{XY}(\tau) - \mu_X \cdot \mu_Y$$

Eigenschaften:

- $C_{XY}(\tau) = 0 \rightarrow$ Zufallsprozesse sind **unkorreliert** zueinander

6.6.5 Spektrale Leistung

Die Leistungsspektraldichte ist die mittlere Leistung pro Frequenzband

$$S_{XX}(\omega) = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |X(\omega)|^2\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E\left[|X(\omega)|^2\right]$$

Eigenschaften:

- $S_{XX}(\omega)$ ist reellwertig
- $S_{XX}(\omega) \geq 0$
- $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$
- Mittlere Leistung des Zufallsprozess $X(t)$: $E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = R_{XX}(0)$

Es gilt das **Wiener-Kinchin-Theorem**:

$R_{XX}(\tau) \circ \bullet S_{XX}(\omega)$	Fouriertransformationspaar
$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$	Fouriertransformierte der Autokorrelation
$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$	Fourierrücktransformierte des Leistungsdichtespektrum

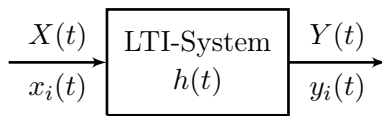
Kreuzspektraldichte:

Die Kreuzspektraldichte zeigt Abhängigkeiten von zwei Zufallsprozessen $X(t)$, $Y(t)$ im Frequenzbereich auf.

- $S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$
- $S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$
- $R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$
- $R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$
- $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$
- $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$

6.7 Übertragung von Zufallsprozessen über LTI-Systeme

Der Ausgangszufallsprozess $Y(t)$ berechnet sich aus dem Eingangszufallsprozess $X(t)$ folgendermassen:



$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot X(t - \alpha) d\alpha$$

Wenn $X(t)$ stationär (WSS) $\rightarrow Y(t)$ ist auch stationär (WSS)

Erwartungswert

Allgemein: $\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t)$

stationär Prozess (WSS): $\mu_Y = H(0) \cdot \mu_X$

Mittlere Leistung:

stationär Prozess (WSS): $E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) d\omega$

Autokorrelation

Allgemein: $R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_{XX}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) d\alpha d\beta$

stationär Prozess (WSS): $R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_{XX}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta$

$$R_{YY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

Leistungsspektraldichte:

stationär Prozess (WSS): $S_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega)$$

6.8 Spezielle Zufallsprozesse

6.8.1 Gauss'scher Zufallsprozess

Bei einem Gauss'schen Zufallsprozess ist die **Zufallsvariable** $X(t_i)$ zu jedem Zeitpunkt t_i **gaussverteilt**.

Eigenschaften:

- Vollständig charakterisiert durch $\mu_X(t)$ und $R_{XX}(t_1, t_2)$
- Ist er schwach stationär (WSS) so ist er zugleich auch stark stationär (SSS)
- Ist $X(t)$ ein gauss'scher Zufallsprozess am Eingang eines LTI-System, so ist auch der Ausgangszufallsprozess $Y(t)$ gaussisch.
- Ist $X(t_1)$ und $X(t_2)$ unkorreliert ($C_{XX}(t_1, t_2) = 0$) so gilt: $f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) \cdot f_X(x_2; t_2)$
- gauss'sche Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion (2D)

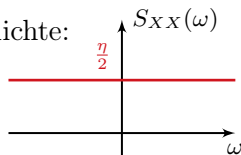
$$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \cdot e^{-\frac{(x_1 - \mu_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2}} \cdot e^{-\frac{(x_2 - \mu_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$$

6.8.2 Weisses Rauschen

Weisses Rauschen

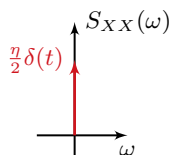
Leistungsspektraldichte:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$$



Autokorrelation:

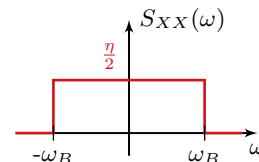
$$R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau)$$



Bandbeschränktes Weisses Rauschen

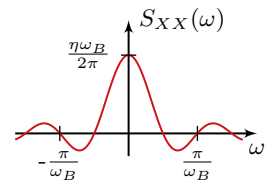
Leistungsspektraldichte:

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |\omega| \leq \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \end{cases}$$



Autokorrelation:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{\eta}{2} \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\eta\omega_B}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_B\tau)}{\omega_B\tau}$$



6.8.3 Schmalbandiger Zufallsprozess

Bandbeschränktes weisses Rauschen mit sehr kleiner Bandbreite $2B$ bzw. $2W$, **verteilt um** $\pm\omega_c$ kann als Zufallsprozess folgendermassen dargestellt werden:

$$X(t) = V(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$V(t)$ Zufallsprozess der Enveloppen-Funktion
 $\phi(t)$ Zufallsprozess der Phasenfunktion

$X(t)$ kann umgeformt werden zu (Additionstheorem):

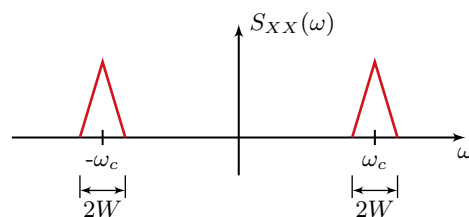
$$X(t) = X_c(t) \cdot \cos(\omega_c t) - X_s(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

$$X_c(t) = V(t) \cdot \cos(\phi(t)) \quad \text{Gleichphasiger-Anteil}$$

$$X_s(t) = V(t) \cdot \sin(\phi(t)) \quad \text{Quadratur-Anteil}$$

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$$

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{X_s(t)}{X_c(t)}\right)$$



Eigenschaften von $X_c(t)$ und $X_s(t)$

- $S_{X_c X_c}(\omega) = S_{X_s X_s}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega - \omega_c) + S_{XX}(\omega + \omega_c) & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$
- Bei $X_c(t)$ und $X_s(t)$ handelt es sich um bandbeschränktes Rauschen im Basisband
- Sie haben gleicher Erwartungswert und Varianz wie $X(t)$: $\mu_{X_c} = \mu_{X_s} = \mu_X = 0 \quad \sigma_{X_c}^2 = \sigma_{X_s}^2 = \sigma_X^2$
- Sie sind unkorreliert und orthogonal zueinander: $E[X_c(t) X_s(t)] = 0$
- Wenn $X(t)$ ein gauss'scher Prozess ist, dann
 - $X_c(t)$ und $X_s(t)$ auch gaussisch
 - $V(t)$ Rayleigh-verteilt zu jedem Zeitpunkt t
 - $\phi(t)$ gleichverteilt $(0 \dots 2\pi)$ zu jedem Zeitpunkt t

7 Rauschen in analogen Kommunikationssystemen S.202

Rauschen verschlechtert die Performance. Dies macht sich in analogen Kommunikationssystemen durch einen **verkleinertes Signal-to-Noise Ratio (SNR)** bemerkbar.

7.1 Gauss'scher Kanal

Ein gauss'scher Kanal fügt dem übertragenen Signal additives, weisses, gauss'sches Rauschen (AWGN) $n(t)$ bei.

Das Rauschen $n(t)$ besitzt folgende Eigenschaften:

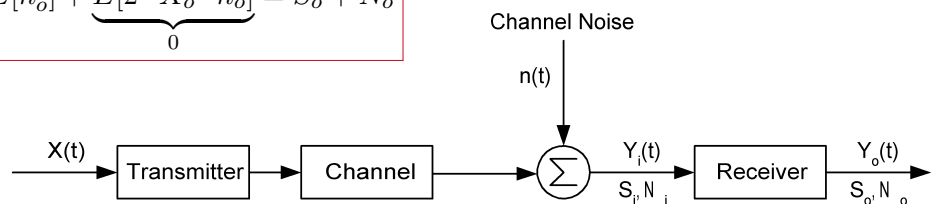
- Leistungsdichtespektrum von $n(t)$: $S_{nn}(\omega) = \frac{\eta}{2}$
- $n(t)$ ist mittelwertfrei: $E[n(t)] = 0$
- $n(t)$ und $X(t)$ sind unkorreliert: $Cov(X(t), n(t)) = E[X(t) \cdot n(t)] - E[X(t)] \cdot E[n(t)] = 0$
- $n(t)$ und $X(t)$ sind orthogonal: $E[X(t) \cdot n(t)] = 0$

Bei linearen Empfänger gilt weiter:

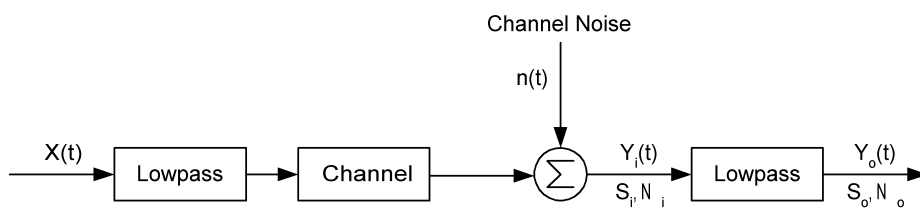
$$E[Y_o^2] = E[(X_o + n_o)^2] = E[X_o^2] + E[n_o^2] + \underbrace{E[2 \cdot X_o \cdot n_o]}_0 = S_o + N_o$$

Störabstand:

$$SNR_o \left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{E[X_o^2(t)]}{E[n_o^2(t)]}$$



7.2 Basisband-System (Referenzmodell)



Annahmen für das Nachrichtensignal $X(t)$:

- $X(t)$ ist mittelwertfrei: $E[X(t)] = 0$
- $X(t)$ ist stationär und ergodisch: $\bar{x}_i = \langle x_i(t) \rangle = E[X(t)] = 0$
- $X(t)$ ist Bandbeschränkt: $S_{XX}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega) & \omega \leq W \\ 0 & \omega > W \end{cases}$
- Lowpass-Filter ist ideal mit Bandbreite B : $2\pi B = W$
- Kanal ist verzerrungsfrei: $X(t) = X(t - t_d)$

$$\text{Signalleistung am Ausgang: } \underline{S_o} = E[X_o^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{XX}(\omega) d\omega = S_X = \underline{S_i}$$

$$\text{Rauschleistung am Ausgang: } \underline{N_o} = E[n_o^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{nn}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\eta}{2} d\omega = \frac{\eta W}{2\pi} = \underline{\eta B}$$

Störabstand am Ausgang:

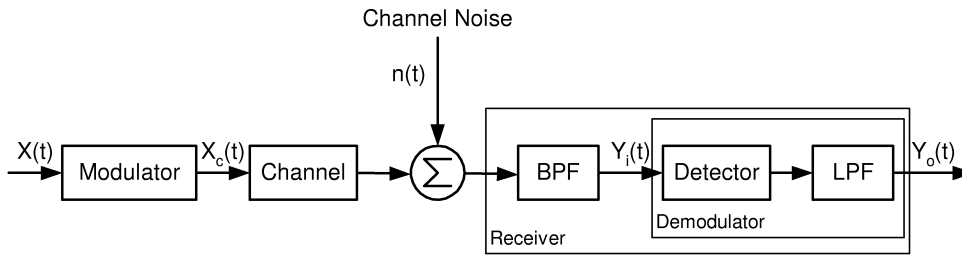
$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{S_i}{\eta B} = \gamma$$

Dies ist die Referenzgrösse, um andere Modulationsarten mit der Basisbandübertragung zu vergleichen. Für einen fairen Vergleich, soll die Signalleistung am Eingang des Empfängers S_i überall gleich sein.

Referenzgrösse:

$$\gamma = \frac{S_i}{\eta B} = \frac{\text{Signalleistung am Eingang des Empfängers}}{\text{Rauschleistung bei einer Bandbreite der Basisbandübertragung}}$$

7.3 Amplitudenmodulations-Systeme



Rauschsignal am Eingang des Demodulators: $n_i(t) = n_c(t) \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t)$ (Kapitel 6.8.3)

Rauschleistung am Eingang des Demodulators: $N_i = E[n_i^2(t)] = E[n_c^2(t)] = E[n_s^2(t)] = 2\eta B$

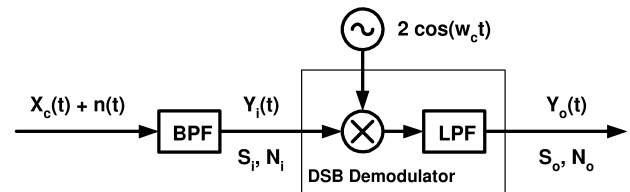
7.3.1 Doppelseitenband-AM (DSB)

Signal am Eingang des Demodulators:

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \overbrace{A_c X(t) \cos(\omega_c t)}^{X_c(t)} + n_i(t) \\ &= [A_c X(t) + n_c(t)] \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Signal am Ausgang des Demodulators:

$$Y_o(t) = \underbrace{A_c X(t)}_{X_o(t)} + \underbrace{n_c(t)}_{n_o(t)}$$



SNR am Eingang des Demodulators:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 S_X}{2\eta B}$$

SNR am Ausgang des Demodulators:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 S_X}{2\eta B} \stackrel{\text{Vergl.}}{=} \frac{S_i}{\eta B} = \gamma \rightarrow \text{Gleich gut geeignet wie Basisbandübertragung.}$$

Detektorgewinn:

$$\alpha_d = \frac{(S/N)_o}{(S/N)_i} = 2$$

Faktor, um den der Detector die SNR verbessert.

7.3.2 Einseitenband-AM (SSB)

Bei Einseitenband-AM ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie die Doppelseitenband-AM (Kapitel 7.3.1).

7.3.3 Gewöhnliche-AM

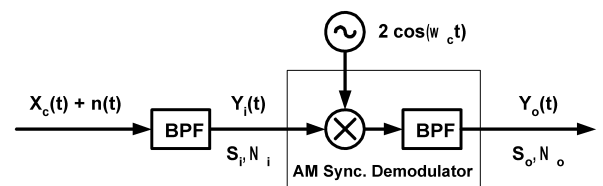
7.3.3.1 Synchroner Detektor

Signal am Eingang des Demodulators:

$$Y_i(t) = \overbrace{A_c(1 + \mu X(t)) \cos(\omega_c t)}^{X_c(t)} + n_i(t) \quad \begin{aligned} \mu &\leq 1 \\ X(t) &\leq 1 \end{aligned}$$

Signal am Ausgang des Demodulators:

$$Y_o(t) = \underbrace{A_c \mu X(t)}_{X_o(t)} + \underbrace{n_c(t)}_{n_o(t)}$$



SNR am Eingang des Demodulators:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_X)}{2\eta B}$$

SNR am Ausgang des Demodulators:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 \mu^2 S_X}{2\eta B} \stackrel{\text{Vergl.}}{=} \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \frac{S_i}{\eta B} = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{\gamma}{2}$$

$\rightarrow$ um mindestens 3dB (meistens > 20dB) weniger geeignet als Basisbandübertragung.

Detektorgewinn:

$$\alpha_d = \frac{(S/N)_o}{(S/N)_i} \leq 1$$

Faktor, um den der Detector die SNR verbessert.

7.3.3.2 Hüllkurvendetektor

Signal am Eingang des Demodulators:

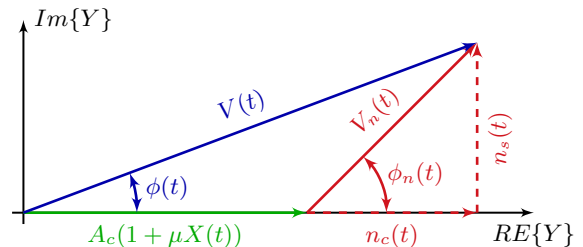
$$\begin{aligned}
 Y_i(t) &= \overbrace{A_c(1 + \mu X(t)) \cos(\omega_c t)}^{X_c(t)} + n_i(t) \\
 &= [A_c(1 + \mu X(t)) + n_c(t)] \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t) \\
 &= V(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))
 \end{aligned}$$

Signal am Ausgang des Demodulators:

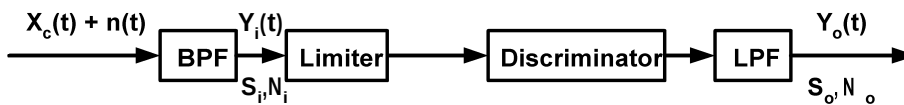
Large-SNR: $(S/N)_i >> 1$	Small-SNR: $(S/N)_i << 1$
Es gilt näherungsweise: $V(t) \approx A_c(1 + \mu X(t)) + n_c(t)$ $Y_o(t) \approx A_c \mu X(t) + n_c(t)$	Es gilt näherungsweise $V(t) \approx V_n(t) + A_c(1 + \mu X(t)) \cdot \cos(\phi_n(t))$
Es gelten die selben Formeln wie beim Synchronen Detector (Kapitel 7.3.3.1)	Das Rauschen dominiert ($V_n(t)$ und $\phi_n(t)$), wodurch $X(t)$ nur in stark deformierter Form vorhanden ist. Die Übertragung wird dadurch unbrauchbar und es hat keinen Sinn Berechnungen aufzustellen.

Schwellwerteffekt

Der Übergang zwischen ausreichender Übertragungsqualität und der unbrauchbaren Übertragung beginnt ab einer SNR_i von ca. $(S/N)_i \approx 10\text{dB}$ und erfolgt sehr schnell.



7.4 Winkelmodulations-Systeme



7.4.1 Signale und Leistungen am Eingang des Limiters

Rauschsignal am Eingang des Limiters:

$$n_i(t) = v_n(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_n(t)) = n_c(t) \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t) \quad (\text{Kapitel 6.8.3})$$

Rauschleistung am Eingang des Limiters:

$$N_i = 2(D+1) B_m \eta \quad \text{mit Hubverhältnis } D = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{\Delta \omega}{W_m} \quad (\text{Kapitel 3.5})$$

Signal am Eingang des Limiters:

$$Y_i(t) = \underbrace{A_c \cos(\omega_c t + \phi_X(t))}_{X_c(t)} + n_i(t) \quad \text{mit} \quad \phi_X(t) = \begin{cases} k_p X(t) & \text{für PM} \\ k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau & \text{für FM} \end{cases}$$

$$Y_i(t) = V(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$$

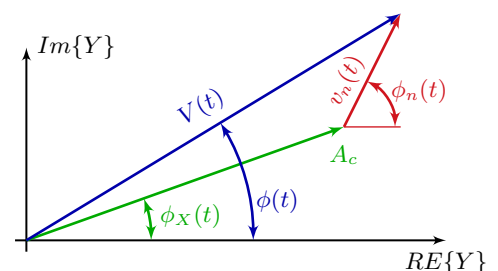
$$\begin{aligned}
 V(t) &= \sqrt{[A_c \cos(\phi_X(t)) + v_n(t) \cos(\phi_n(t))]^2 + [A_c \sin(\phi_X(t)) + v_n(t) \sin(\phi_n(t))]^2} \\
 \text{mit} \quad \theta(t) &= \arctan \left(\frac{A_c \cos(\phi_X(t)) + v_n(t) \cos(\phi_n(t))}{A_c \sin(\phi_X(t)) + v_n(t) \sin(\phi_n(t))} \right)
 \end{aligned}$$

Signalleistung am Eingang des Limiters:

$$S_i = \frac{1}{2} A_c^2$$

SNR am Eingang des Limiters:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2}{2(D+1) B_m \eta}$$



7.4.2 Signale und Leistungen am Ausgang des Diskriminators

Signal am Ausgang des Diskriminators:

$$Y_o(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{für PM} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} & \text{für FM} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Der Limiter unterdrückt sämtliche Amplitudenschwankungen von } Y_i(t), \\ \text{also auch die des Rauschens.} \\ \rightarrow \text{Signalanteile und Rauschen sind nur in der Phase enthalten!} \end{array}$$

Large-CNR: Carrier-to-Noise $(C/N) \gg 1$

Ist das Signal dominant, ergibt sich für $Y_o(t)$ näherungsweise:

$$Y_o(t) = \begin{cases} \theta(t) \approx \underbrace{k_p X(t)}_{X_o(t)} + \frac{\underbrace{n_s(t)}_{n_o(t)}}{A_c} & \text{für PM} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \approx \underbrace{k_f X(t)}_{X_o(t)} + \frac{\underbrace{n'_s(t)}_{n_o(t)}}{A_c} & \text{für FM} \end{cases}$$

SNR am Ausgang des Diskriminators für Phasenmodulation (PM):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{k_p^2 S_X}{\frac{1}{A_c^2} 2\eta B} \stackrel{\text{Vergl.}}{=} k_p^2 S_X \frac{S_i}{\eta B} = k_p^2 S_X \gamma$$

SNR am Ausgang des Diskriminators für Frequenzmodulation (FM):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{k_f^2 S_X}{\frac{1}{3} \frac{(2\pi B)^2}{A_c^2} \eta B} = \frac{3 A_c^2 k_f^2 S_X}{(2\pi B)^2 2\eta B} \stackrel{\text{Vergl.}}{=} \frac{3 k_f^2 S_X}{(2\pi B)^2} \cdot \frac{\frac{1}{2} A_c^2}{\eta B} = 3 \frac{k_f^2}{W^2} S_X \cdot \gamma = 3 D^2 S_X \cdot \gamma$$

Small-CNR: Carrier-to-Noise $(C/N) \ll 1$

Ist das Rauschen dominant, ergibt sich für $Y_o(t)$ näherungsweise:

$$Y_o(t) \approx \phi_n(t) + \frac{A_c}{v_n(t)} \cdot \sin(\phi_X(t) - \phi_n(t))$$

Das Rauschen dominiert ($v_n(t)$ und $\phi_n(t)$), wodurch $\phi_X(t)$ nur in stark deformierter Form vorhanden ist. Die Übertragung wird dadurch unbrauchbar und es hat keinen Sinn Berechnungen aufzustellen.

Schwellwerteffekt

- Der Übergang zwischen ausreichender Übertragungsqualität und der unbrauchbaren Übertragung beginnt bei kleiner Deviation $D \approx 2$ ab einer SNR_i von ca. $(C/N)_i \approx 10\text{dB}$ und erfolgt sehr schnell.
- Bei größerer Deviation D setzt der Schwellwerteffekt schon bei höherer SNR_i ein und verschlechtert dabei die SNR_o mehr, als durch den Detektorgewinn gewonnen wird. D.h. unterhalb dieser Schwelle wäre eine kleinere Deviation vorteilhafter.

7.5 Zusammenfassende Tabelle

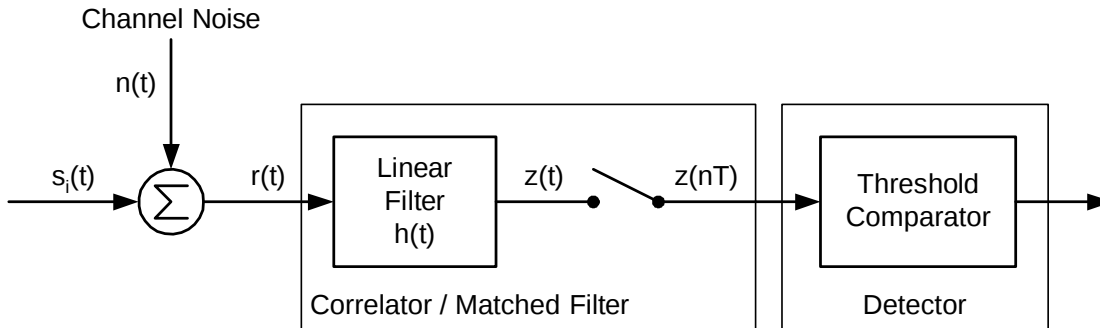
	Baseband	DSB-SC	AM Coherent	AM Envelope	PM	FM
Nachrichtensignal	Zufallsprozess $X(t)$ mit $ X(t) \leq 1$ bzw. $ x_\lambda(t) \leq 1$ für alle λ des Ergebnisraums S					
Leistung S_X von $X(t)$	$S_X = S_X(t) = E \left[X^2(t) \right] \leq 1$, (weil $ X(t) \leq 1$)					
Bandbreite von $X(t)$	B					
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$X(t)$	$X(t)A_c \cos(\omega_c t)$	$A_c(1 + \mu X(t)) \cos(\omega_c t)$	$A_c \cos(\omega_c t + k_p X(t))$	$A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) \, d\tau)$	
Leistung S_i von $X_i(t)$	S_X	$\frac{1}{2}A_c^2 S_X$	$\frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 S_X)$	$\frac{1}{2}A_c^2$	$\frac{1}{2}A_c^2$	
Bandbreite von $X_i(t)$	B	$2B$	$2B$	$2(D + 1)B$	$2(D + 1)B$	
Rauschleistung am Eingang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$	$2(D + 1)\eta B$	$2(D + 1)\eta B$	
SNR am Eingang $\left(\frac{S}{N}\right)_i$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 S_X)}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2}{2(D + 1)\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2}{2(D + 1)\eta B}$	
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$X(t)$	$A_c X(t)$	$A_c \mu X(t)$	$k_p X(t)$	$k_f X(t)$	
Leistung S_o von $X_o(t)$	S_X	$A_c^2 S_X$	$A_c^2 \mu^2 S_X$	$k_p^2 S_X$	$k_f^2 S_X$	
Rauschleistung am Ausgang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$	$\frac{1}{A_c^2/2} \eta B$	$\frac{1}{3} \frac{(2\pi B)^2}{A_c^2/2} \eta B$	
SNR am Ausgang $\left(\frac{S}{N}\right)_o$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{A_c^2 \mu^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{k_p^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{3D^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	
$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ ausgedrückt mit $\gamma = \frac{S_i}{\eta B}$	γ	γ	$\frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma$	$k_p^2 S_X \gamma$	$3D^2 S_X \gamma$	

8 Optimaler Detektor S.226

Rauschen verschlechtert die Performance. Dies macht sich in digitalen Übertragungssystemen durch fehlerhafte Detektion der gesendeten Symbole bemerkbar.

Ziel ist es nun den Empfänger (Detektor) so zu optimieren, dass die Bitfehlerrate P_e minimiert (und die Übertragungsrate maximiert) wird.

8.1 Modell des digitalen Empfängers



Ein binäres Signal $s_i(t)$ wird über einen verzerrungsfreien Kanal gesendet.

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für logisch 1} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für logisch 0} \end{cases} \quad \text{Signalformen siehe Kapitel 4.5}$$

Gauss'scher Kanal

- mittelwertfreies, additives, weisses, gauss'sches Rauschen
- Verzerrungsfreie Übertragung

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 1, 2 \quad 0 \leq t \leq T$$

Lineares Filter

- Empfangene Signale $s_i(t)$ geeignet filtern, um SNR zu den optimalen Abtastzeitpunkten nT zu maximieren.

$$z(t) = r(t) * h(t)$$

Abtastung

- Abtastung des analogen Signals (Zeitdiskretisierung) zu den optimalen Abtastzeitpunkten nT

$$z(nT) = \underbrace{a_i(nT)}_{\text{Signalant.}} + \underbrace{n_o(nT)}_{\text{Rauschant.}}$$

Detektor

- Entscheidung, welches Symbol höchstwahrscheinlich gesendet wurde (soft- oder hard-decision)
soft-decision: Wahrscheinlichkeit für s_1, s_2 bestimmen

$$\begin{aligned} z(nT) > \lambda & \quad \text{Hypothese } H_1: s_1 \text{ gesendet} \\ z(nT) < \lambda & \quad \text{Hypothese } H_2: s_2 \text{ gesendet} \end{aligned}$$

8.2 Fehlerwahrscheinlichkeit

Soft-Decision

Bei einer Soft-Decision bildet die Wahrscheinlichkeit einen Anhaltspunkt für mögliche Bitfehler

Hard-Decision

Bei Hard-Decision können im binären Fall Folgende Bitfehler vorkommen:

	gesendet	
detektiert	s_1 mit $P(s_1)$	s_2 mit $P(s_2)$
Hypothese H_1	$P(H_1 s_1)$	$P(H_1 s_2)$
Hypothese H_2	$P(H_2 s_1)$	$P(H_2 s_2)$

Damit ergibt sich folgende Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$P_e = P(H_2|s_1) \cdot P(s_1) + P(H_1|s_2) \cdot P(s_2)$$

falls $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot [P(H_2|s_1) + P(H_1|s_2)]$$

8.3 Maximum Likelihood Detector

Gegeben ist:

- Die Wahrscheinlichkeiten $P(s_1)$ und $P(s_2)$
- Die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(z|s_1)$ und $f(z|s_2)$
 - Das lineare Filter verändert die Gauss'sche Charakteristik des Rauschens nicht
 - je nach empfangener Zahl $z(nT)$ ergeben sich folgende bedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

$$f_{n_o}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2/(2\sigma_{n_o}^2)}}{\sigma_{n_o}\sqrt{2\pi}}$$

$$f(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_{n_o}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_{n_o}^2}}$$

$$f(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_{n_o}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_{n_o}^2}}$$

Der Maximum Likelihood Detector entscheidet wie folgt:

$$\begin{aligned} f(z|s_1) \cdot P(s_1) &> f(z|s_2) \cdot P(s_2) && \text{Hypothese } H_1: s_1 \text{ gesendet} \\ f(z|s_1) \cdot P(s_1) &< f(z|s_2) \cdot P(s_2) && \text{Hypothese } H_2: s_2 \text{ gesendet} \end{aligned}$$

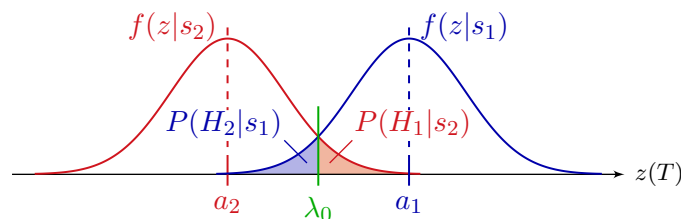
likelihood ratio $\Lambda(z)$:

$$\begin{aligned} \Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} &> \frac{P(s_2)}{P(s_1)} && \text{Hypothese } H_1: s_1 \text{ gesendet} \\ \Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} &< \frac{P(s_2)}{P(s_1)} && \text{Hypothese } H_2: s_2 \text{ gesendet} \end{aligned}$$

Damit beträgt die **Wahrscheinlichkeit der falschen Hypothese**:

$$P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz$$

$$P(H_1|s_2) = \int_{\lambda_0}^{\infty} f(z|s_2) dz$$



Vereinfachte Bedingungen:

- $P(s_1) = P(s_2)$
- $f(z|s_1)$ und $f(z|s_2)$ symmetrisch bzgl. λ_0

$$\begin{aligned} z > \lambda_0 && \text{Hypothese } H_1: s_1 \text{ gesendet} \\ z < \lambda_0 && \text{Hypothese } H_2: s_2 \text{ gesendet} \end{aligned}$$

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$P_e = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right)$$

8.4 Lineares Filter

Ziel:

- Fehlerwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt T minimieren
- Signalabstand $(a_1 - a_2)$ maximieren
- Rauschen n_0 minimieren

Bedingungen:

- $a(T) = a_1(T) - a_2(T)$
- $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$
- $a(T) \circ \bullet S(\omega)$

8.4.1 Matched Filter (optimales lineares Filter)

Herleitung:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{a^2(T)}{N_o} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega\right)^2}{\frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Cauchy-Schwarz Ungleichung:} \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\omega)|^2 d\omega \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{2}{\eta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{\eta}} \quad \boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{o\max} = \frac{2E}{\eta}} \quad E: \text{Energie des Eingangssignals } s(t)$$

Matched-Filter-Funktion $H(\omega)$:

SNR_o wird maximal falls gilt:

$$\boxed{H(\omega) = S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}}$$

• $\circ$

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} s(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

8.4.2 Korrelator

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \left| \quad h_{\text{Matched}}(t) = \begin{cases} s(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \right.$$

$$\text{Es gilt: } z(t) = \int_0^t r(\tau) s(T-(t-\tau)) d\tau \quad \left| \quad \text{Zeitpunkt } t = T \right.$$

$$\underline{z(T) = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau}$$

Für den optimalen Abtastzeitpunkt T (nur für T) führt also eine Kreuzkorrelation von $r(t)$ mit $s(t)$ bei Verschiebung $\tau = 0$ zum gleichen Ergebnis wie das Matched-Filter.

$$\boxed{R_{rs}(\tau = 0) = \int_0^T r(t) s(t+0) dt = \int_0^T r(t) s(t) dt}$$

8.4.3 Optimaler Detektor

Um die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e möglichst klein zu machen, muss der Signalabstand maximiert und das Rauschen minimiert werden.

$$\rightarrow \frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}} \text{ bzw. } \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{n_o}^2} \text{ maximieren}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{n_o}^2} = \frac{E_d}{\eta/2} = \frac{2E_d}{\eta}}$$

Daraus ergibt sich für Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e :

$$\boxed{P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)}$$

8.4.4 Fehlerwahrscheinlichkeit verschiedener binären Übertragungen

E_b bezeichnet die mittlere Signalenergie pro Bit.

Unipolar Baseband Signaling

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Bipolar Baseband Signaling

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = A^2 T$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Amplitude-Shift Keying

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{4}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Phase-Shift Keying

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos(\omega_c t + \pi) = -A \cos \omega_c t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Frequency-Shift Keying

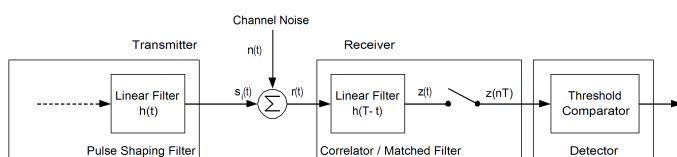
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad E_b = \frac{A^2 T}{2}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_1 t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos \omega_2 t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

8.5 Root-Raised-Cosine Filter

Problem:

Wird mit einem Matched Filter die Bitfehlerrate minimiert und beim Sender und Empfänger je ein Raised-Cosine Filter eingesetzt, tritt beim Abtaster durch die Kombination dieser Filter wieder Intersymbol-Interferenz auf.

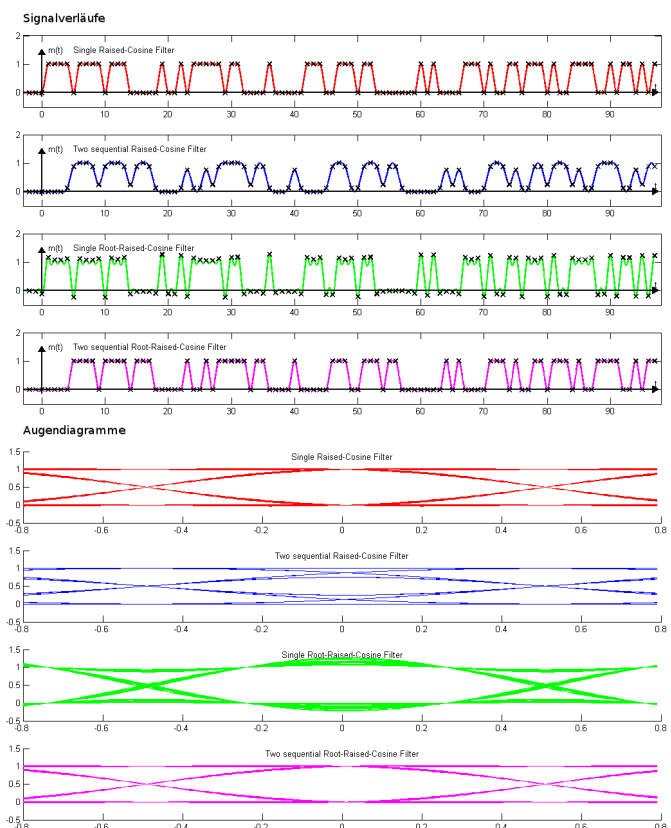


Lösung:

Die Übertragungsfunktion des Raised-Cosine Filters wird in zwei gleiche Teile auf den Sender und Empfänger aufgeteilt.

→ zwei **Root**-Raised-Cosine Filter

Pulse, welche mit dem Root-Raised-Cosine Filter gebildet und mit dem selben Matched Filter empfangen werden, weisen beim Abtaster keine Intersymbol-Interferenz mehr auf.



9 Informationstheorie und Quellencodierung S.245

Ziel: Ein Nachrichtensignal in möglichst effizienter Darstellung über einen vorgegebenen Kanal senden
→ Redundanz minimieren.

9.1 Redundanz und Irrelevanz

	Redundanz: mehrfach vorhandene Information	Irrelevanz: bedeutungslose Information
Erklärung	- Redundanz entsteht durch "ineffiziente" Codierung und kann durch geeignete Codierung entfernt werden. - Durch Entfernung von Redundanz geht keine Information verloren → verlustfreie Codierung	- Irrelevanz wird vom Empfänger nicht ausgewertet und muss daher nicht gesendet werden. - Durch weglassen von Irrelevanz geht aus Sicht des Senders Information verloren → verlustbehaftete Codierung
Beseitigung von Redundanz bzw. Irrelevanz	Symbole die häufig vorkommen werden mit wenigen Bits und seltene Symbole mit mehr Bits codiert.	Information, die unser Auge oder Ohr nicht oder nur beschränkt wahrnimmt weglassen oder grob quantisieren.
Beispiel JPEG-Codierung	Kombinierte Huffman-/Runlength Codierung	Grobe Quantisierung der hochfrequenten Koeffizienten

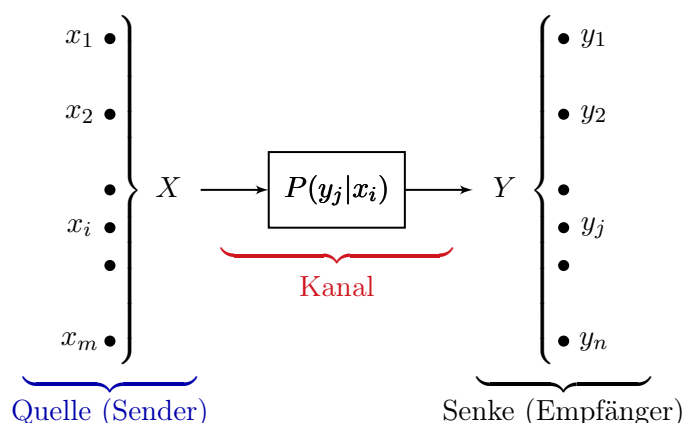
9.2 Modelle für Quelle und Kanal

Diskrete gedächtnisfreie Quelle (DMS):

diskret: Die Quelle hat einen endlichen Satz an Symbolen, das Quellenalphabet:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

gedächtnisfrei: Jedes neue Symbol ist unabhängig von vorhergehenden Symbolen. Die Symbole x_i treten mit der Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ auf.



Diskreter gedächtnisfreier Kanal (DMC):

diskret: Der Kanal kann nur eine endliche Anzahl an Symbolen generieren $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

gedächtnisfrei: Der Ausgang y_i ist nur abhängig vom momentanen Eingang x_i und nicht von anderen Symbolen x_k ($k \neq i$).

Kanal-Übertragungs-Wahrscheinlichkeit: Jeder Übertragungspfad ist durch die Kanal-Übertragungs-Wahrscheinlichkeitsmatrix $P(y_j|x_i)$ definiert.

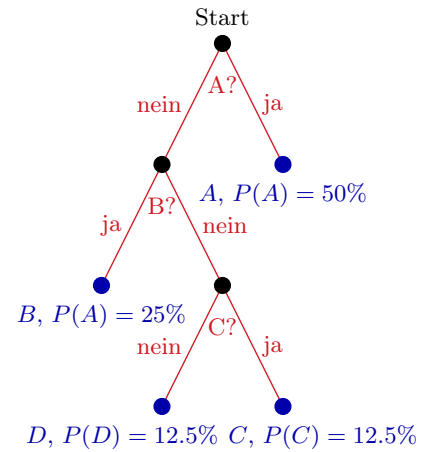
9.3 Informationsgehalt, Entropie und Informationsrate

9.3.1 Information

Definition: Information ist die Antwort auf eine konkrete Fragestellung.

Ziel: Fragen so stellen, dass mit **möglichst wenig Fragen** das Ergebnis eines Zufallsexperiments sicher bestimmt werden kann.

Binärer Fall: Jede Frage kann mit Ja oder Nein beantwortet werden
 → Fragen stellen, die mit 50% Wahrscheinlichkeit mit Ja oder Nein beantwortet werden



9.3.2 Mathematische Beschreibung

Informationsgehalt eines Symbols x_i :

$$I(x_i) = -\log_2(P(x_i)) \quad [b]$$

$$I(x_i) \geq 0$$

$$I(x_i) > I(x_k)$$

$$I(x_i \cdot x_k) = I(x_i) + I(x_k) \quad \text{falls } x_i, x_k \text{ unabhängig}$$

$$\text{falls } P(x_i) < P(x_k)$$

Entropie des Alphabets X (mittlerer Informationsgehalt):

$$\begin{aligned} H(X) &= E[I(x_i)] = \sum_{i=1}^m P(x_i) \cdot I(x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^m P(x_i) \cdot \log_2(P(x_i)) \end{aligned}$$

[b/Symbol]

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(m)$$

$$0 \leq H(X) \leq 1$$

m : Grösse des Alphabets X
 für binäre Quelle ($m = 2$)

Maximale Entropie des Alphabets X :

$$H_{\max}(X) = \log_2(m) \quad [b/\text{Symbol}]$$

m : Grösse des Alphabets X (anz. Symbole)

Redundanz der Quelle X

$$\begin{aligned} R(X) &= H_{\max}(X) - H(X) \\ &= \log_2(m) + \sum_{i=1}^m P(x_i) \cdot \log_2(P(x_i)) \end{aligned}$$

[b/Symbol]

Informationsrate einer Quelle X

$$R = r \cdot H(X) \quad [b/s]$$

r : Symbolrate [Symbole/s]

Bedingte Entropien (S.250)

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X) \quad [b/\text{Symbol}]$$

$H(Y|X)$: Informationsbedarf um aus gesendetem X empfangenes Y zu bestimmen

$H(X|Y)$: Informationsbedarf um aus empfangenem Y gesendetes X zu bestimmen

$H(X, Y)$: Informations des gesamten Kommunikationskanals

Gegenseitige Information (S.250)

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= I(Y; X) \end{aligned}$$

[b]

Information, welche vom Eingang zum Ausgang des Kanals transferiert wird.

9.4 Diskreter gedächtnisfreier Kanal (DMC)

Ein diskreter gedächtnisfreier Kanal ist ein statisches Modell mit:

- Eingang X : m Eingänge
- Ausgang Y : n Ausgänge

9.4.1 Kanalmatrix und Verbundmatrix

Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix}$$

Die Kanalmatrix gibt für jedes gesendete x_i die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(y_j|x_i)$ an, dass der Empfänger ein y_j detektiert.

$$[P(X)] = [P(x_1) \ P(x_2) \ \dots \ P(x_m)]$$

$$[P(Y)] = [P(y_1) \ P(y_2) \ \dots \ P(y_n)]$$

$$[P(Y)] = [P(X)] \cdot [P(Y|X)]$$

Verbundmatrix

$$[P(Y, X)] = \begin{bmatrix} P(y_1, x_1) & \dots & P(y_n, x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1, x_m) & \dots & P(y_n, x_m) \end{bmatrix}$$

Die Verbundmatrix gibt die Wahrscheinlichkeiten von sämtlichen Kombinationen von gesendeten und empfangenen Symbolen x_i, y_j an

$$[P(X)]_d = \begin{bmatrix} P(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P(x_m) \end{bmatrix}$$

$$P(Y, X) = [P(X)]_d \cdot [P(Y|X)]$$

9.4.2 Kanalkapazität

Die Kanalkapazität beschreibt den maximalen Informationsfluss über einen vorgegebenen Kanal und ist von der Kanalmatrix $[P(Y|X)]$ abhängig.

Kanalkapazität pro Symbol C_s : $C_s = \max_{\{P(x_i)\}} I(X; Y)$ [b/Symbol]

Kanalkapazität pro Sekunde C : $C = r \cdot C_s$ [b/s] r : Symbolrate [Symbole/s]

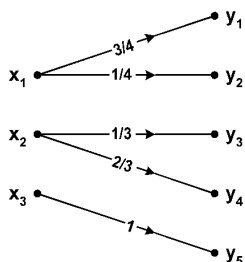
Mögliche Übertragung: Es ist möglich, die Information der Quelle fehlerfrei zu übertragen falls gilt:

$$H(X) < C_s \quad \text{bzw.} \quad r \cdot H(X) < C$$

9.4.3 Spezielle Kanäle

Verlustloser Kanal

Kanaldiagramm:



Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gegenseitige Information

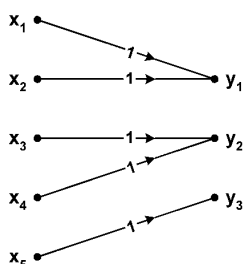
$$I(X; Y) = H(X)$$

Kanalkapazität

$$C_s = \log_2(m)$$

Deterministischer Kanal

Kanaldiagramm:



Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gegenseitige Information

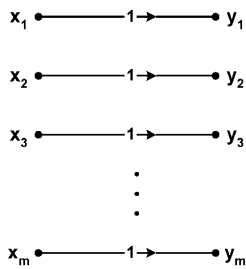
$$I(X; Y) = H(Y)$$

Kanalkapazität

$$C_s = \log_2(n)$$

Rauschfreier Kanal

Kanaldiagramm:



Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Gegenseitige Information

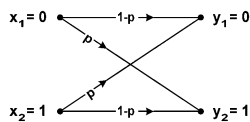
$$I(X; Y) = H(X) = H(Y)$$

Kanalkapazität

$$C_s = \log_2(m) = \log_2(n)$$

Binärer symmetrischer Kanal

Kanaldiagramm:



Gegenseitige Information

$$I(X; Y) = H(Y) - [-p \cdot \log_2(p) - (1-p) \cdot \log_2(1-p)]$$

Kanalkapazität

$$C_s = 1 + p \cdot \log_2(p) + (1-p) \cdot \log_2(1-p)$$

Kanalmatrix

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} (1-p) & p \\ p & (1-p) \end{bmatrix}$$

Additiver weißer Gauss'scher Rausch-Kanal (AWGN)

Kanalkapazität

$$C_s = \max\{I(X; Y)\} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Kanalkapazität

$$C = 2 \cdot B \cdot C_s = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Kanalausgang:

$$Y = X + \underbrace{n}_{\text{Noise}}$$

Beispiel:

$$(S/N) = 40dB = 10 kW$$

$$B = 4 kHz$$

$$\Rightarrow \underline{C = 4000 \cdot \log_2(1 + 10'000)}$$

9.5 Quellencodierung

Quellencodierung eliminiert Redundanz

Der Quellencoder wandelt das Nachrichtensignal einer diskreten Quelle in eine Symbolfolge mit möglichst kleiner Redundanz um.

$$\text{Entropie } H(X) \text{ maximieren} \Rightarrow \begin{cases} \text{Redundanz } R(X) \text{ minimieren} \\ \text{Informationsrate } R \text{ maximieren} \end{cases}$$

9.5.1 Klassifizierung von Codes S.254

Fixed Length Code

- Jedes Codewort hat die gleiche Länge.

Bsp: ASCII-Code

Variable Length Code

- Die Codewörter können unterschiedliche Längen haben.

Bsp: Morse Code

Prefix-Free Code

- Kein Codewort ist Präfix (Vorsilbe) eines anderen Codewortes.

Bsp: Shannon-Fano Code, Huffman Code

Uniquely Decodable Code

- Eine Kette von Codewörtern kann eindeutig wieder in die ursprüngliche Symbolfolge zurückgewandelt werden.

Bsp: präfixfreie Codes

Instantaneous Code

- Jeder eindeutig decodierbare Code, welcher nach dem Empfang jedes einzelnen Codewortes sofort ein eindeutiges Symbol liefert, ohne dass nachfolgende Symbole decodiert werden müssen.

Bsp: ASCII-Code, präfixfreie Codes

Optimal Code

- Jeder Instantaneous Code, welcher eine minimale Codelänge besitzt.
- Die minimale Codelänge ist dann erreicht, wenn:

$$L = H(X) \Rightarrow \eta = 100\%$$

Mittlere Codelänge L :
$$L = \sum_{i=1}^m P(x_i) \cdot n_i \geq H(X) \quad [b/\text{Symbol}]$$

Effizienz η :
$$\eta = H(X)/L$$

Redundanz $R(X)$:
$$R(X) = L - H(X) \quad [b/\text{Symbol}]$$

9.5.2 Kraft'sche Ungleichung

Gegeben:

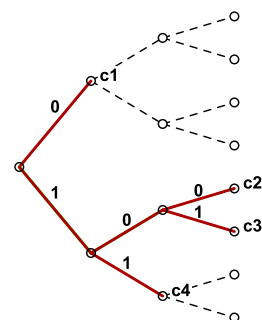
- Quelle mit Alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$
- Die Codelänge der Symbole x_i ist n_i

Kraft'sche Ungleichung:

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \leq 1$$

Kraft'sche Ungleichung ist erfüllt $\Rightarrow$ Es existiert ein präfixfreier und eindeutig und sofort decodierbarer Code.

Codebaum eines binären, präfixfreien Codes



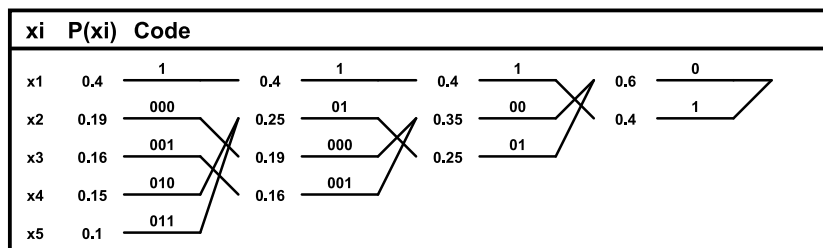
9.5.3 Shannon - Fano Codierung

1. Symbole nach absteigender Wahrscheinlichkeit anordnen.
2. Mit Trennung 2 Teilmengen möglichst gleicher Wahrscheinlichkeit bilden.
3. Oberer Teilmenge 0, unterer Teilmenge 1 zuordnen.
4. Weiter bei Schritt 2., um Teilmengen weiter zu unterteilen, bis alle Einzelsymbole codiert sind.

x_i	$P(x_i)$	Step 1	Step 2	Step 3	Code
x_1	0.4	0	0		00
x_2	0.19	0	1		01
x_3	0.16	1	0		10
x_4	0.15	1	1	0	110
x_5	0.1	1	1	1	111

9.5.4 Huffman Codierung

1. Symbole (bzw. Symbolgruppen) nach absteigender Wahrscheinlichkeit anordnen.
2. Unterste zwei Symbole als Symbolgruppe zusammenfassen (Reduktionsschritt).
3. Weiter bei 1. bis nur noch zwei Symbolgruppen vorliegen.
4. Der Symbolgruppe mit grösserer Wahrscheinlichkeit 0, der anderen 1 zuordnen.
5. Letzten Reduktionsschritt rückgängig machen.
6. Weiter bei 4. bis für alle Einzelsymbole ein Codewort vorliegt.



10 Kanalcodierung S.282

Ziel: Kanalcodierung erkennt Übertragungsfehler und kann diese z.T. korrigieren.

Das Beifügen von **geeigneter Redundanz** ermöglicht:

- Fehler zu erkennen
- Fehler zu korrigieren

10.1 Rechnen mit Codes (Galois Körper)

Im Binären Fall gilt:

- Alphabet $M = \{0, 1\}$
- Modulo-2 Addition $\oplus$ (logisches XOR)
- Multiplikation $\cdot$ (logisches AND)

10.2 Kanalcodierungstheorem von Shannon

Gegeben sein:

- Quelle (DMS) mit Entropie $H(X)$
- Kanal (DMC) mit Kanalkapazität C_s

$$\begin{aligned} H(X) < C_s &\Rightarrow \exists \text{ Kanalcodierung mit beliebig kleiner Fehlerrate} \\ H(X) > C_s &\Rightarrow \nexists \text{ Kanalcodierung mit beliebig kleiner Fehlerrate} \end{aligned}$$

→ Für fehlerfreie Übertragung wird die nutzbare Übertragungsrate beschränkt.

10.3 Klassifizierung von Kanalcodes

Blockcodes

- Codierung von (relativ kleinen) Datenblöcken der Länge k (Unterteilung des Eingangsdatenstroms)
- (n, k) -Code: k Eingangssymbole $\rightarrow n$ Ausgangssymbole
- Die gültigen Codeworte sind eine Teilmenge aller möglichen Bitkombinationen: $\{m^k\} \subset \{m^n\}$
 m : Anz. Symbole des Alphabets
- Coderate R_c :
$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{\text{Datensymbole}}{\text{Übertragungssymbole}}$$
- Beispiele: lineare Blockcodes und zyklische Blockcodes

Faltungscodes

- Codierung von Daten-Streams

10.3.1 Linearer Code

Codeworte des Codes C :

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C$$

$$\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in C$$

Ein Code C ist genau dann **linear** wenn für $\underline{c}$ gilt:

$$\underline{c} = \underline{a} \oplus \underline{b} = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n) \in C$$

Merke: Da $\underline{a} \oplus \underline{a} = (0, 0, \dots, 0)$, gehört der Nullvektor $\underline{0}$ zu jedem linearen Code.

10.3.2 Systematischer Code

Ein systematischer Block-Code hat folgende Eigenschaften:

- Linear (n, k) -Code
 k Datenbits d_i
 n Codebits c_i
 $m = n - k$ Paritybits $p_i \subset c_i$

$$\begin{aligned} \underline{d} &= (d_1, d_2, \dots, d_k) \\ &\downarrow \\ \underline{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) = (d_1, d_2, \dots, d_k, p_1, p_2, \dots, p_m) \end{aligned}$$

- Die Datenbits $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ kommen **unmodifiziert** an irgendwelchen Stellen c_i vor.

10.4 Hamming-Gewicht und Hamming-Distanz

Codeworte $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in C$ mit Länge n :

Hamming-Gewicht

$$w(\underline{c}) = \text{Anzahl Einer des Codewortes } \underline{c}$$

$$w(\underline{c}) = d(\underline{c}, \underline{0})$$

Hamming-Distanz

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \text{Anzahl unterschiedliche Stellen der beiden Codeworte } \underline{a}, \underline{b}$$

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = w(\underline{a} \oplus \underline{b})$$

Minimale Hamming-Distanz

Kleinste Hamming-Distanz aller möglichen Codewort-Paaren $\underline{a}_i, \underline{b}_j \setminus \underline{0}$

$$d_{\min} = \min\{d(\underline{a}, \underline{b})\} \stackrel{\text{lin. Codes}}{=} \min\{w(\underline{a} \oplus \underline{b})\} = \min\{w(\underline{c})\}$$

Je grösser $d_{\min}$ ist, umso mehr Stellen müssen verändert werden, um $\underline{a}_i$ in $\underline{b}_j$ umzuwandeln.

10.5 Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Die minimale Hamming-Distanz bestimmt die maximale Anzahl erkennbare bzw. korrigierbare Symbolfehler.

Detektierbare Fehler $t_d = d_{\min} - 1$

Korrigierbare Fehler $t_c = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$

10.6 Generatormatrix G

Ein **linearer** (n, k) -**Blockcode** wird von seiner Generatormatrix G gebildet und beschrieben.

- $k \times n$ -Matrix (k Eingänge, n Ausgänge)
- besteht aus k **linear unabhängigen Codeworten** $\underline{c}_i$
- $\underline{c} = \underline{d} \cdot G$

$$\text{Codewort } \underline{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

$$\text{Datenwort } \underline{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_k]$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & g_{k3} & \dots & g_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_k \end{bmatrix}$$

Geordnet Systematischer Block-Code:

$$G = [I_k \ P^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{21} & \dots & p_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{12} & p_{22} & \dots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{mk} \end{bmatrix}$$

mit Paritätsmatrix $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mk} \end{bmatrix}$

Bildungsgleichungen

$$c_1 = d_1$$

$$c_2 = d_2$$

...

$$c_k = d_k$$

$$c_{k+1} = p_1 = p_{11} \cdot d_1 \oplus p_{12} \cdot d_2 \oplus \dots \oplus p_{1k} \cdot d_k$$

...

$$c_n = p_m = p_{m1} \cdot d_1 \oplus p_{m2} \cdot d_2 \oplus \dots \oplus p_{mk} \cdot d_k$$

10.7 Paritätsprüfmatrix H

Mit der Paritätsprüfmatrix H können Übertragungsfehler erkannt werden.

Paritätsprüfmatrix H eines geordnet systematischen Blockcodes:

$$H = [P \quad I_m]$$

$$H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix}$$

- $m \times n$ -Matrix
- besteht aus m **linear unabhängigen Zeilen**
- G und H^T sind orthogonal

$$G \cdot H^T = [I_k \quad P^T] \cdot \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} = P^T \oplus P^T = O \quad \underline{O} : \text{Nullmatrix } (k \times m)$$

$$\underline{c} \cdot H^T = \underline{d} \cdot G \cdot H^T = \underline{0} \quad \underline{0} : \text{Nullvektor } (1 \times m)$$

- **Minimale Hamming-Distanz** $d_{\min}$ entspricht der minimalen Anzahl Zeilen von H^T , die Addiert ($\oplus$) werden müssen, um den Nullvektor $\underline{0}$ zu erhalten.
 $d_{\min} \geq 3 \Rightarrow$ Alle Zeilen von H^T sind unterschiedlich.

10.7.1 Fehlersyndrom

Das Fehlersyndrom $\underline{s}$ erlaubt die Erkennung/Korrektur von Übertragungsfehlern $\underline{e}$.

$$\underline{s} = \underline{c}_r \cdot H^T = (\underline{c} \oplus \underline{e}) \cdot H^T = \underbrace{\underline{c} \cdot H^T}_{\underline{0}} \oplus \underline{e} \cdot H^T = \underline{e} \cdot H^T$$

$\underline{s}$: Fehlersyndrom ($1 \times m$)

$\underline{e}$: Error-Pattern ($1 \times n$)

$\underline{c}_r$: empfangenes Codewort ($1 \times n$)

$$\begin{array}{ll} \underline{s} = \underline{0} & \Rightarrow \text{Gültiges Codewort } \underline{c} \text{ empfangen} \\ \underline{s} \neq \underline{0} & \Rightarrow \text{Ungültiges Codewort } \underline{c}_r \text{ empfangen} \end{array}$$

Bei **Einzelfehlern** entspricht die Fehlerposition gerade der Zeile von H^T , welche gleich dem Syndrom $\underline{s}$ ist.
 $\underline{s} = i$. Zeile von $H^T \rightarrow i$. Bit ist falsch.

10.8 Hamming-Schranke

Ein linearer (n, k) -Blockcode kann bis zu t **Fehler korrigieren**, falls n und k folgende Hamming-Schranke erfüllen:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^t \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

- Diese Bedingung ist **notwendig aber nicht hinreichend!**
 Massgebend ist die Minimale Hamming-Distanz $d_{\min}$.
- **Perfekter Code:** Wenn in der Hamming-Schranke das Gleichheitszeichen gilt.
- **Hamming-Code:** Einzelfehler ($t = 1$) korrigierende perfekte Codes.

$$2^m = 1 + n \Rightarrow n = 2^m - 1$$

m	n	k
2	3	1
3	7	4
4	15	11
5	31	26

10.9 Zyklischer Blockcode

Ein zyklischer Blockcode C ist ein linearer Blockcode, bei welchem jede zyklische Verschiebung eines Codewortes $\underline{c}$ von C zu einem neuen gültigen Codewort von C führt

Zyklische Verschiebung:

Codewort $\underline{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1})$

- $1 \times$ zyklisch verschoben: $\sigma(\underline{c}) = \underline{c}^{(1)} = (c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2})$
- $2 \times$ zyklisch verschoben: $\sigma^2(\underline{c}) = \underline{c}^{(2)} = (c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-3})$
- $n \times$ zyklisch verschoben: $\sigma^n(\underline{c}) = \underline{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1})$

Vorteile des zyklischen Blockcodes:

- Einfache Hardware-Realisierung des Coders und Decoders auch für $n \gg 1$ und $k \gg 1$
Mit Look-up Table oder Matrizenmultiplikation wird die Implementierung bei $n \gg 1$ und $k \gg 1$ sehr umfangreich.
- Fehlererkennende und -korrigierende Fähigkeiten des Codes bei möglichst hoher Coderate $R_c = k/n$

10.10 Polynomschreibweise

Ein Codewort $\underline{c}$ wird als Polynom dargestellt, um die mathematische Behandlung zu vereinfachen.

Codewort: $\underline{c} = (\underbrace{c_0}_{\text{LSB}}, c_1, c_2, \dots, \underbrace{c_{n-1}}_{\text{MSB}})$
Polynom zu $\underline{c}$: $c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$

Polynomgrad: $(n-1)$
Koeffizienten: $c_i \in \{0, 1\}$

Beispiel: $\underline{c} = (1, 0, 0, 1, 1, 0) \rightarrow c(x) = 1 + x^3 + x^4$

10.10.1 Rechenoperationen mit Polynomen

Modulo-2 Addition $\oplus$:

$$\begin{array}{rcl} x^a \oplus x^a & = & 0 \\ x^a \oplus 0 & = & x^a \\ 0 \oplus 0 & = & 0 \end{array}$$

Modulo-2 Subtraktion $\ominus$:

$$\begin{array}{rcl} x^a \ominus x^a & = & 0 \\ 0 \ominus x^a & = & x^a \\ 0 \ominus 0 & = & 0 \end{array}$$

Multiplikation $\cdot$:

$$\begin{array}{rcl} x^a \cdot x^b & = & x^{a+b} \\ 0 \cdot x^a & = & 0 \\ 0 \cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1 + x^2) \cdot (x + x^3) &= x + x^3 \oplus x^3 + x^5 \\ &= x + \underbrace{x^3 \oplus x^3}_0 + x^5 \\ &= x + x^5 \end{aligned}$$

Polynomdivision : (Modulo-2 Division):

$$f(x) : h(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x) \quad \begin{array}{l} q(x) : \text{Quotient} \\ r(x) : \text{Rest} \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{(x^5 + 1)}^{f(x)} : \overbrace{(x^2 + x + 1)}^{h(x)} & = & \overbrace{(x^3 + x^2 + 1)}^{q(x)} + \frac{\overbrace{x}^{r(x)}}{x^2 + x + 1} \\ \underline{\ominus (x^5 + x^4 + x^3)} & & \\ x^4 + x^3 + 1 & & \Rightarrow \underline{(x^5 + 1) = (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) + (x)} \\ \underline{\ominus (x^4 + x^3 + x^2)} & & \\ x^2 + 1 & & \\ \underline{\ominus (x^2 + x + 1)} & & \\ x = r(x) & & \end{array}$$

Vereinfachte Schreibweise der Polynomdivision:

Weisen zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ den gleichen Rest $r(x)$ auf, kann dies folgendermassen dargestellt werden:

$$a(x) = b(x) \pmod{h(x)} \quad \Rightarrow \quad r(x) = f(x) \pmod{h(x)}$$

10.10.2 Zyklische Verschiebung mit Polynomen

Ein Codewort $\underline{c}$ soll um i Stellen verschoben werden.

$$\begin{aligned}\underline{c} &= (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ c(x) &= c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}\underline{c}^{(i)} &= (c_{n-i}, c_{n-(i-1)}, \dots, c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-(i+1)}) \\ c^{(i)}(x) &= c_{n-i} + c_{n-(i-1)} x + \dots + c_{n-1} x^{i-1} + c_0 x^i + c_1 x^{i+1} + \dots + c_{n-(i+1)} x^{n-1}\end{aligned}$$

Berechnung des Polynoms $c^{(i)}(x)$ des verschoben Codewortes $\underline{c}^{(i)}$.

$c^{(i)}(x)$ entspricht dem Rest der Polynomdivision $(c(x) \cdot x^i) : (x^n + 1)$

$$c^{(i)}(x) = c(x) \cdot x^i \pmod{(x^n + 1)}$$

$$(c(x) \cdot x^i) : (x^n + 1) = q(x) + \frac{c^{(i)}(x)}{(x^n + 1)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{c(x) \cdot x^i}_{f(x)} = \underbrace{q(x) \cdot (x^n + 1)}_{h(x)} + \underbrace{c^{(i)}(x)}_{r(x)}$$

10.11 Fundamentales Theorem für zyklische Codes

Gegeben sei:

- Polynom $g(x)$ der Ordnung $m = (n - k)$ $g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_{n-k} x^{n-k} \quad g_0 = g_{n-k} = 1$
- $g(x)$ ist ein Faktorpolynom von $(x^n + 1)$ $(x^n + 1) = q(x) \cdot g(x) \quad \text{mit } r(x) = 0$

Theorem

Besitzt $g(x)$ diese Eigenschaften, dann bildet $g(x)$ aus den Datenworten $d(x)$ einen linearen und zyklischen (n, k) -Blockcode C :

$$\underbrace{c(x)}_{\text{Codepolynom}} = \underbrace{d(x)}_{\text{Datenpolynom}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{Bildungspolynom}}$$

Beispiel: $(7, 4)$ -Blockcode ($m = n - k = 3$)

$$(x^7 + 1) = \underbrace{(x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + x + 1)}_{g(x)} \quad \Rightarrow \quad c(x) = d(x) \cdot (x^3 + x^2 + 1)$$

10.12 Polynom des Fehlersyndroms $s(x)$

Empfangenes Codewort:

$$c_r(x) = c(x) + e(x)$$

Fehlersyndrom

$$\begin{aligned}s(x) &= c_r(x) \pmod{g(x)} \\ &= c(x) + e(x) \pmod{g(x)} \\ &= e(x) \pmod{g(x)}\end{aligned}$$

- Das Fehlersyndrom $s(x)$ ist für alle Fehler $< d_{\min}/2$ ein ganz charakteristisches, eindeutiges Polynom, das nur abhängig vom Fehler $e(x)$ aber unabhängig vom Codewort $c(x)$ ist.
- Die Polynome $e(x)$ und $s(x)$ können in einer Tabelle (Syndromtabelle) gegenübergestellt werden.

10.13 Generatormatrix G von zyklischen Codes

Zyklische Codes sind eine Untergruppe von linearen Codes.

- Jede Zeile der Generatormatrix G entspricht einem Codewort.
- Die k Zeilen müssen linear unabhängig sein.
- Brauchbare Matrixzeilen sind: $g(x), x \cdot g(x), \dots, x^{k-1} \cdot g(x)$.

$$G = \begin{bmatrix} g(x) \\ x \cdot g(x) \\ \vdots \\ x^{k-1} \cdot g(x) \end{bmatrix}$$

10.13.1 Generatormatrix G von systematischen zyklischen Codes

Die Generatormatrix G eines systematisch zyklischen Codes kann durch **Zeilenadditionen** (Modulo-2) der nicht-systematischen Generatormatrix gebildet werden.

$$G = [\dots \quad I_k]$$

- Eigenschaften (Linearität, Zyklizität, Hammingdistanz) bleiben erhalten
- Zuordnung von Datenworten $d(x)$ zu Codeworten $c(x)$ ändert.

10.14 Hardware-Realisierung eines systematischen Codes

Generatorpolynom $g(x) = g_0 + g_1 \cdot x + g_2 \cdot x^2 + \dots + g_{n-k} \cdot x^{n-k}$

Datenwort $d(x) = d_0 + d_1 \cdot x + d_2 \cdot x^2 + \dots + d_{k-1} \cdot x^{k-1}$

Parity-Bits $p(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \dots + d_{n-k-1} \cdot x^{n-k-1}$

Codewort $c(x) = \underbrace{p_0 + p_1 \cdot x + \dots + p_{n-k-1} \cdot x^{n-k-1}}_{\text{Parity-Bits}} + \underbrace{d_0 \cdot x^{n-k} + d_1 \cdot x^{n-k+1} + \dots + d_{k-1} \cdot x^{n-1}}_{\text{Datenbits}}$

Berechnung der Parity-Bits $p(x)$:

$$p(x) = x^{n-k} \cdot d(x) \pmod{g(x)}$$

Implementierung:

- Phase 1: Ausgabe von $d(x)$ (MSB first)
- Phase 2: Ausgabe von $p(x)$

