

1 Lineare Gleichungssysteme

Gauss-Algorithmus

Führt LGS zu Stufenform, Koeffizientenmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix

ref(M)

rref(M b)

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{array} :3$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 7 & 5 & 2 \end{array} -(7 \cdot I)$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \cdot 3$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{array} -(\frac{2}{3} \cdot II)$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

 $x = 1$ rot -> '1' erstellen
 $y = -1$ blau -> '0' erstellen

- Mehrere Gleichungssysteme simultan lösen

$$\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & b_1 & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & c_3 \end{array}$$

Wichtig: Gleiche Koeffizientenmatrix

Lösungsmenge, Rang

$$\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & & 0 & * & \cdots & * & b_1 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * & b_n \\ \hline & & 0 & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & b_m \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_{r+1}, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

Rang * frei wählbar

- symmetrisch

$$A = A^T$$

$$M^T$$

- schiefsymmetrisch

$$A^T = -A$$

Hauptdiagonale ist 0

Summe aus symmetrischer und schiefsymmetrischer Matrix

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$$

 $(M + M^T)$ ist symmetrisch $(M - M^T)$ ist schiefsymmetrisch

- orthogonal

$$AA^T = A^T A = E$$

sofern auch regulär: $A^T = A^{-1}$

Rechengesetze

$$(AB)C = A(BC)$$

$$AB \neq BA$$

$$EA = A = AE$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- homogen/ inhomogen

homogen $Ax = 0$

inhomogen $Ax \neq 0$

- regulär (invertierbar)

$$Ax = b \rightarrow A^{-1}b = x$$

$$b = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\det A \neq 0$$

$$b \neq 0 \rightarrow x \neq 0$$

$$\exists A^{-1} | AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

 A^{-1} heisst invers zu A , A^{-1} eindeutig

$$Ax = b \text{ besitzt genau die Lösung } x = A^{-1}b$$

- singular (nicht regulär)

$$\nexists A^{-1} | AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Nullteiler sind singular

$$\det A = 0$$

$$Ax = b \neq 0$$

$$\text{ss} \begin{array}{cc|c} E & * & * \\ \hline 0 & 0 & \neq 0 \end{array}$$

inhomogen -> keine Lösung!

$$Ax = 0$$

homogen -> ∞ viele Lösungen

- partikuläre Lösung

homogen: $\mathbb{L}_h = \{x | Ax = 0\}$

inhomogen: $\mathbb{L} = \{x | Ax = b\} = \{x_p + x_h | x_h \in \mathbb{L}_h\}$

$$\text{Beispiel: } \mathbb{L}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 4-5z \\ z+3z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

Sofern $\det A \neq 0$, A regulär

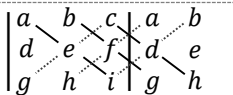
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für 2 * 2 Matizen

$$\begin{array}{cc|cc} A & E & \xrightarrow{\text{Gauss}} & E & A^{-1} \end{array}$$

Bestimmung von Hand mit Gauss

2 Determinanten

Determinante	$\det A = [s_1 \ s_2 \ s_3] = s_1(s_2 \times s_3)$	$\boxed{\det(M)}$
- allgemein Entwicklungssatz	$\det A = \sum_{k=1}^n ((-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(\hat{A}_{ik}))$	i konstant, aber beliebig Vorzeichen gem. Schachbrett $\hat{A}_{ik} \rightarrow$ Minor von A (A ohne Spalte k und Zeile i)
- Bsp. Entwicklungssatz	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ Neue $\det$ ohne Zeile i und Spalte k des gelben Elementes. Element als Faktor. (Zeilenvertauschung beachten $\rightarrow$ Vorzeichen)	
- Det für 2*2 Matrix	$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	Determinante mit Gauss für 2 * 2 Matrix
- Sarrus	 $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$	funktioniert nur für 3*3 Matrizen
- einer Dreiecksmatrix	$\det A = \prod_{i=1}^n d_{ii}$	Vorsicht mit Gauss! Faktoren mitziehen
- $\det A \neq 0$	Gleichungssystem eindeutig lösbar, A regulär	
- $\det A = 0$	Spalten von A sind linear abhängig (komplanar), A singular	
- Eigenschaften Gilt sowohl für Spalten als auch Zeilen (Fläche = Determinante)	1. Spalten vertauschen: $\det A^* = -\det A$ 2. 2 gleiche Spalten: $\det A^* = 0$ 3. Nullzeile: $\det A = 0$ 4. Ausklammern von Faktoren (einer Spalte) 5. Linear als Funktion jeder Spalte 6. $\det A^T = \det A$ 7. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ 8. $\det E = 1$	
Rechengesetze	$\det AB = \det A \cdot \det B$	
- Vandermonde	$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$	$\det A = \prod_{i < k} (a_k - a_i)$ Mit $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Faktoren
Adjungierte Matrix	$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$	$\boxed{\text{adj}(M)}$
- allgemein	$\text{adj}(A)_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \det(\hat{A}_{ki})$ $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot E$	Vorsicht: Indexvertauschung!
Lineares Gleichungssystem		
LGS mit $n \times n$ -Matrix	$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) \cdot b$	
Cramer'sche Regel	$x_k = \frac{[s_1, \dots, b, \dots, s_n]}{[s_1, \dots, s_k, \dots, s_n]} = \frac{1}{ A } (\text{adj}(A) \cdot b)_k$	Bei der Determinante im Zähler die k -te Spalte mit b ersetzen $1 \leq k \leq n$

3 Vektorgeometrie

Schnittpunkt von 2 Geraden

$$g: \vec{p}_1 + t\vec{v}_1$$

$$h: \vec{p}_2 + s\vec{v}_2$$

Q ist Schnittpunkt von g und h

$$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)$$

x	y	s	t			x	y	s	t	
1	0	t_x	0	p_{1x}	$\xrightarrow{\text{Gauss}}$	1	0	0	0	Q_x
0	1	t_y	0	p_{1y}		0	1	0	0	Q_y
1	0	0	s_x	p_{2x}		0	0	1	0	s
0	1	0	s_y	p_{2y}		0	0	0	1	t

Schnittpunkt Gerade-Ebene

$$g = \{\vec{p}_0 + t\vec{r}_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\sigma = \{\vec{q} + t_1\vec{r}_1 + t_2\vec{r}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

regulär: $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ist linear unabhängigsingular: $\vec{r}_0$ ist Linearkombination von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$

$\vec{r}_0$	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_2$	$\vec{q} - \vec{p}_0$
-------------	-------------	-------------	-----------------------

Schnittgerade Ebene-Ebene

$$\sigma_1 = \{\vec{q}_1 + t_1\vec{r}_1 + t_2\vec{r}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\sigma_2 = \{\vec{q}_2 + t_3\vec{r}_3 + t_4\vec{r}_4 \mid t_3, t_4 \in \mathbb{R}\}$$

x	y	z	t_1	t_2	t_3	t_4	
1	0	0	$-r_{1x}$	$-r_{2x}$	0	0	p_{1x}
0	1	0	$-r_{1y}$	$-r_{2y}$	0	0	p_{1y}
0	0	1	$-r_{1z}$	$-r_{2z}$	0	0	p_{1z}
1	0	0	0	0	$-r_{3x}$	$-r_{4x}$	p_{2x}
0	1	0	0	0	$-r_{3y}$	$-r_{4y}$	p_{2y}
0	0	1	0	0	$-r_{3z}$	$-r_{4z}$	p_{2z}

Matrix für Schnittgerade 3D

- Für Schnittpunkt von 2 Ebenen in 4D Matrix um $\vec{u}$ erweitern.

x	y	z	t_1	t_2	t_3	t_4	
1	0	...		0	r_x		p_x
0	1				r_y		p_y
		1	$\vdots$		r_z		p_z
$\vdots$	$\ddots$	1			*		*
				1	0	*	*
0	...		0	1	*		*

Lösungsmatrix => Schnittgerade g

$$g = \vec{p} - t_4\vec{r}$$

Orthogonale Projektion

$$P\vec{u}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{u}| \cdot P\vec{u}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot P\vec{v}(\vec{u})$$

Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$

bilinear!

3.4 Skalarprodukt

allgemein

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Länge

$$\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(0) = |\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Winkel

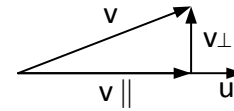
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Orthogonalität:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$$

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\vec{u} \circ \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\vec{u} \circ \vec{u}} \cdot \vec{u}$$



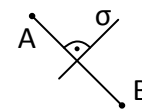
Normale auf Vektor

$$2D: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$3D: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \text{Ebene} \perp \vec{a}: \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Mittelsenkrechte

$$\sigma = \left\{ P \mid (\vec{b} - \vec{a}) \circ \left(\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) \right\}$$



Hessesche Normalform

(Abstand Punkt-Ebene)

- in Parameterform

$$d = \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \vec{p}_0 \right) \circ \vec{n}^0$$

 p_0 ist Stützvektor der Ebene

$$\vec{n}^0 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \text{Normale}$$

Wichtig: $\vec{n}$ normiert $\rightarrow |\vec{n}| = 1$

- in Koeffizientenschreibweise

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

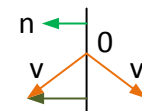
$$\sigma = ax + by + cz + d$$

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

bei Geraden 'c' weglassen!

Vektor an Ebene spiegeln

$$v_{\text{Gespiegelt}} = \vec{v} - 2(\vec{n} \circ \vec{v})\vec{n}$$

Wichtig: $\vec{n}$ normiert $\rightarrow |\vec{n}| = 1$ 

Orthonormalisierung

Gute Koordinatensysteme

$$|\vec{b}_i| = 1; \vec{b}_i \perp \vec{b}_j \text{ (für } i \neq j \text{)}$$

Skalarprodukt wird einfach

$$\vec{b}'_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$$

Gegeben: $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

nicht orthonormiert

$$\vec{b}'_2 = \frac{\vec{b}_2 - \vec{b}'_1 (\vec{b}_2 \circ \vec{b}'_1)}{|\vec{b}_2 - \vec{b}'_1 (\vec{b}_2 \circ \vec{b}'_1)|}$$

Gesucht: $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$

orthonormiert

$$\vec{b}'_3 = \frac{\vec{b}_3 - \vec{b}'_1 (\vec{b}_3 \circ \vec{b}'_1) - \vec{b}'_2 (\vec{b}_3 \circ \vec{b}'_2)}{|\vec{b}_3 - \vec{b}'_1 (\vec{b}_3 \circ \vec{b}'_1) - \vec{b}'_2 (\vec{b}_3 \circ \vec{b}'_2)|}$$

Überbestimmte

Gleichungssysteme

$$A^t(Ax - b) = 0$$

$$A^t Ax = A^t b$$

In Gauss

$$\begin{bmatrix} A^t A & A^t b \end{bmatrix} \rightarrow x$$

Finde $|Ax - b|$ möglichst klein!

„Least squares“

3.5 Kreis und Kugel

Kreis / Kugel

$$K(M, r) = \{\vec{p} | (\vec{p} - \vec{m}) \circ (\vec{p} - \vec{m}) = (\vec{p} - \vec{m})^2 = r^2\} \quad \vec{m} \rightarrow \text{Ortsvektor}$$

P auf Kugel, $\vec{p} = (x, y, z)$

Durchstosspunkt Gerade-Kugel

$$|\vec{r}|^2 t^2 + 2\vec{p}_0 \circ (\vec{p}_0 - \vec{m})t + |\vec{p}_0 - \vec{m}|^2 - r^2 = 0$$

$$\text{Gerade } g = \vec{p}_0 + t\vec{r}$$

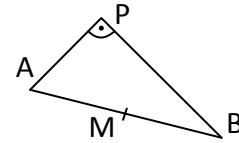
$$\text{Kugel } \{\vec{p} | |(\vec{p}_0 + t\vec{r}) - \vec{m}| = r\}$$

Thaleskugel

Gesucht: $\{P | \overline{AP} \perp \overline{BP}\}$

$$\left(\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}\right)^2$$

$$(\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$



Tangentialebene (Kreis/Kugel)

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{p}_0 - \vec{m} \\ (\vec{p}_0 - \vec{m}) \circ (\vec{p} - \vec{p}_0) &= 0 \\ (\vec{p}_0 - \vec{m}) \circ (\vec{p} - \vec{m}) &= r^2 \end{aligned}$$

p_0 ist Berührungspunkt
 p ist Punkt auf Tangente

3.6 Vektorprodukt

allgemein

Abstraktion des dreidimensionalen geometrischen Raums mit Vektoren

Das Vektorprodukt ist bilinear

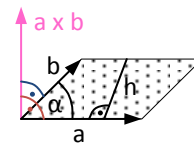
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kreuzprodukt

Für c_1 Zeile eins abdecken und Kreuzprodukt bilden.

- Eigenschaften

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $\vec{b}$
2. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt } \# \vec{a}, \vec{b}$
3. $\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b})$ bilden ein Rechtssystem
4. $h = |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$



- Fläche

$$|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$F(\vec{a}, \vec{b}) = F(\vec{a}' + \vec{a}'', \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Linearität

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$$

- Volumen

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{a}' + \vec{a}'', \vec{b}, \vec{c})$$

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

 $\vec{a} \times \vec{b}$ ist Grundfläche, $\vec{c}$ ist HöheLinearität $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$

- Zwischenwinkel

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

nur für spitze Winkel

Abstand Punkt-Gerade

$$d = \frac{|(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

Punkt $p: \vec{p}$ Gerade $g: \vec{p}_0 + t\vec{r}$

Abstand Punkt-Ebene

$$d = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \circ (\vec{p} - \vec{p}_0)$$

Punkt $p: \vec{p}$ Ebene $\sigma: \vec{p}_0 + t_1 \vec{r}_1 + t_2 \vec{r}_2$ Abstand Gerade-Gerade
(windschiefe Gerade)

$$d = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \circ (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$$

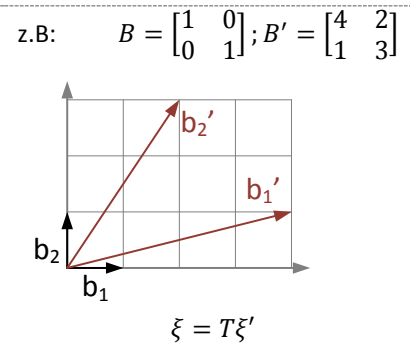
Gerade $g: \vec{p}_1 + t\vec{r}_1$ Gerade $h: \vec{p}_2 + s\vec{r}_2$ Richtung von d: $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$

Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\vec{r}_s = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

4 Lineare Räume

Bedingungen für Linearität	$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $f(\lambda v) = \lambda f(v)$	$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$
Abbildungsmatrix	A, hängt von den Basen B und B' sowie f ab	
Kern	Alle Abbildungen von v, welche durch A auf den Nullvektor von v' abgebildet werden $\mathbb{L} = \{v \in \mathbb{R}^n Av = 0\} \rightarrow$ Nullraum von A, Kern von A, $\ker A$	
Bild	Alle Vektoren von V', welche Bilder sind von Vektoren von V $\mathbb{U} = \{B\xi \xi \in \mathbb{R}^{1291}\} \subset \mathbb{R}^n$	
Fixvektor	$f(v) = v$	Selbstabbildung
Basistransformation	$B = \{b_1, b_2\}; B' = \{b'_1, b'_2\}$ ξ Streckungsfaktor von B für v ξ' Streckungsfaktor von B' für v $v = B\xi = B'\xi'$ $v = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 = \xi'_1 b'_1 + \xi'_2 b'_2$ <i>neue Basisvektoren durch alte ausdrücken</i> $b'_1 = 4b_1 + 1b_2$ $b'_2 = 2b_1 + 3b_2$ ξ aus ξ' ausrechnen $= (4b_1 + 1b_2) \cdot \xi'_1 + (2b_1 + 3b_2) \cdot \xi'_2$ $= (4 \cdot \xi'_1 + 2 \cdot \xi'_2)b_1 + (1 \cdot \xi'_1 + 3 \cdot \xi'_2)b_2$ $= \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$ <i>Umrechnen von neuen Koordinaten in alte</i> $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix}$	
- Spezialfall $\mathbb{R}^n$	$v = B\xi = B'\xi'$ $T = B^{-1}B'$ $\xi = T\xi' = B^{-1}B'\xi'$ $\xi' = T^{-1}\xi = B^{-1}B\xi$	für reguläre $n * n$ Matrizen
- allgemeiner Fall	$v = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 = \xi'_1 b'_1 + \xi'_2 b'_2$ $v = B\xi = B'\xi'$	für $n * m$ Matrizen, ($m < n$)
$B \quad B'$ $\xrightarrow{\text{Gauss}}$ $\begin{array}{cc cc} 1 & 0 & & T \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ $B' \quad B$ $\xrightarrow{\text{Gauss}}$ $\begin{array}{cc cc} 1 & 0 & & T^{-1} \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$		
$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_1 \end{pmatrix}$ $\downarrow T$ $\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A'} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}'_1 \\ \tilde{\xi}'_2 \end{pmatrix}$ $\downarrow T$ $\downarrow T$ altes Koordinatensystem neues Koordinatensystem $A' = TAT^{-1}$		
Orthogonale Matrizen	Spalten einer orthogonalen Matrix sind orthogonal und haben Länge 1 $O(n) = \{A A \text{ orthogonal } n * n \text{ Matrix}\}$	
- Bedingung	$A^{-1} = A^t$ $AA^{-1} = AA^t = E$ $\det(A) = \pm 1$	



Spiegelung	$\det A = -1$ $SO(n) = \{A \in O(3) \det A = 1\}$	analog in beliebig vielen Dimensionen Unterraum von orthogonalen Matrizen
- Beispiele	an X-Achse $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	an XY-Ebene $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
	an Y-Achse $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	an XZ-Ebene $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	an 45°-Geraden $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	an YZ-Ebene $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Projektionen	auf X-Achse $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	auf XY-Ebene $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Beispiele	auf Y-Achse $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	auf XZ-Ebene $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
		auf YZ-Ebene $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Drehmatrizen	$\det A = +1$ $x' = D_\varphi \cdot x$	$SO(n) = \{A \in O(3) \det A = 1\}$ „Die Spalten von A sind die Bilder der Standardbasis-Vektoren“
- 2D	$A = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	in 2-Dimensionen $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$
- 3D, Drehung um x-Achse	$A = D_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	in 3-Dimensionen Reihenfolge der Drehungen beachten
- 3D, Drehung um y-Achse	$A = D_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	
- 3D, Drehung um z-Achse	$A = D_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Spur	$Spur(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$	Spur, det sind Invarianten einer Abbildung, sind unabhängig vom Koordinatensystem <u>trace(M)</u>
- Eigenschaften	$Spur(ABC) = Spur(BCA) = Spur(CAB)$ $Spur(AB) = Spur(BA)$	A, B und C seien beliebige $n * n$ Matrizen
- Drehwinkel 3D	$\cos(\alpha) = \frac{Spur(A) - 1}{2}$	
- Drehwinkel 2D	$\cos(\alpha) = \frac{Spur(A)}{2}$	
- Richtung der Drehachse	Ist $\vec{v}$ die Drehachse? $D\vec{v} = \vec{v}$	$\vec{v}$ Drehachse? D Drehmatrix $\vec{v}$ wird unverändert wiedergegeben, wenn $\vec{v}$ die Drehachse ist.

5 Matrixzerlegungen

Motivation

$Ax = b \rightarrow$ viel Arbeit

L, R sind Dreiecksmatrizen

$$A = LR \rightarrow LRx = b \begin{cases} Ly = b \\ Rx = y \end{cases}$$

$$\det A = \det L \cdot \det R$$

$$A = QR \rightarrow \begin{cases} Qy = b \text{ "sehr einfach"} \\ Rx = y \text{ "einfach"} \end{cases}$$

$$Q \text{ orthogonal, } Q^{-1} = Q^t \\ \det A = \det Q \cdot \det R$$

$$A = Q^t Q \rightarrow \begin{cases} Q^t y = b \text{ "einfach"} \\ Qx = y \text{ "sehr einfach"} \end{cases}$$

$$Q \text{ dreiecksmatrix} \\ \det A = \det Q^2$$

- Trick 1

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{l_{22}} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{l_{nn}} \end{pmatrix} \cdot L_0$$

$$\Rightarrow L_0 = \text{diag}(l_{11}, \dots, l_{nn})^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{22}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{l_{n1}}{l_{nn}} & \frac{l_{n2}}{l_{nn}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Trick 2

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ & l_{k,k} & \\ & \vdots & 1 \\ & \vdots & & \ddots \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Trick 3

Bedeutung der Multiplikation mit

macht Gauss-Operation rückgängig (siehe auf Blatt vom 2.12.13)

- LU-Zerlegung

$$A = LU =$$

1. Gauss; Vorwärtsreduktion $\rightarrow$ bleibt U
2. L setzt sich zusammen aus den Spalten unter Pivot-Elemente

- QR-Zerlegung

$$A = QR$$

$$R = Q^{-1}A = Q^t A$$

Spalten von A orthonormalisieren $\rightarrow$ Spalten von Q (siehe 3.4)

Cholesky-Zerlegung

$$A = LL^t = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ c & \dots & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \dots & c \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b \end{pmatrix}$$

Def: A heisst positiv definit, wenn $v^t A v > 0, \forall v \neq 0$

geht nur für „positive“ Matrizen, $A = A^t$, d.h. symmetrisch

d.h. der folgende Algorithmus funktioniert.

- Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{11} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow 3$$

$$L_{21} = 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 2$$

$$L_{31} = 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 1$$

$$L_{22} = 2^2 + 2^2 = 8 \rightarrow 2$$

$$L_{32} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 1$$

$$L_{33} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 3 \rightarrow 1$$

$$\text{Kontrolle } A = LL^t$$

6 Eigenwerte und Eigenvektoren

allgemein

Problem: zu A finde Vektor v mit $Av = \lambda v$ Def: Ein Vektor $v \neq 0$ mit dieser Eigenschaft
heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ - A^n

$$Av = v \Rightarrow A^n v = v$$

$$Av = -v \Rightarrow A^n v = (-1)^n v$$

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^n v = \lambda^n v$$

- Schritt 1

$$(A - \lambda E)v = 0$$

 $\Rightarrow$ Für welche λ ist $A - \lambda E$ singulär?

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

 $\rightarrow$ liefert charakteristisches Polynom

$$\text{z.B.} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Geg: A eine $n \times n$ -Matrix

$$\text{z.Bsp für } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ges: Vektoren $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$

$$\text{charPoly}(M, \lambda)$$

- Schritt 2 - Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{eigVl}(M)$$

- Schritt 3 - Eigenvektoren

Für jedes λ suche Vektor v

$$(A - \lambda E)v = 0$$

 $a = \text{Resultat}$

$$\text{eigVc}(M)$$

Finde Vektor v_1 für λ_1

$$\begin{array}{|cc|} \hline 2 - \lambda_1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda_1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

 $x_1 = x_2$
 x_2 frei wählbar

$$\text{z. Bsp. } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 v_2 : genau gleich, einfach mit λ_2 Ist A diagonalisierbar?

- jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar
- Eigenvektoren von A als Basis verwenden $\rightarrow$
 A diagonal in Eigenvektorbasis = A'

 A ist diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt!

Sonstiges

System

Rechtssystem: $\det A > 0$ Linkssystem: $\det A < 0$ Umrechnung Koordinatenform
 $\rightarrow$ Parameterform

$$\sigma: ax + by + cz = d$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ \frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ \frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Umrechnung Parameterform $\rightarrow$
Koordinatenform

$$\sigma = \vec{p} + s\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{n} = \vec{v} \times \vec{v}$$

$$\Rightarrow \sigma: ax + by + cz = d$$

 d erhält man durch einsetzen des
Stützvektors $\vec{p}$ in die Koordinatengleichung

binomische Formel

$$(A \pm \lambda E)^2 = A^2 \pm 2\lambda A + \lambda^2 E$$

$$(A \pm \lambda E)^3 = A^3 \pm 3\lambda A^2 + 3\lambda^2 A \pm \lambda^3 E$$

$$(A - \lambda E)^4 = A^4 - 4\lambda A^3 + 6\lambda^2 A^2 - 4\lambda^3 A + \lambda^4 E$$