

Der Kern oder Nullraum einer Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, für die gilt:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}; \quad \vec{x} \in \ker A$$

$$\ker A = \{ \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$$

Das Bild einer Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{b}$, für die die Gleichung

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{lösbar ist (eine oder } \infty \text{ Lsg.)}$$

$$\text{im } A = \{ \vec{b} \mid A\vec{x} = \vec{b} \} \neq \{ \}$$

Cramer'sche Regel

$$x_i = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

i : ~~Sp~~ Zeile
 j : Spalte

$$x_i = \frac{\det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & b_i & \dots & a_{in-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{in} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Eine Basis aus Eigenvektoren führt dazu, dass eine Matrix diagonal wird.

Rang: Anzahl linear unabhängige Zeilen.

$$A \cdot C = B \iff C = A^{-1} \cdot B$$

Die Dimension $\dim(V)$ eines Vektorraums V ist die Zahl der Basisvektoren einer Basis von V

Berechnung Determinanten:

- 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \cancel{ad} - \cancel{bc} = ad - bc$$

- 3×3 : (Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

- $\geq 4 \times \geq 4$:

Produkt der Pivots od. Entwicklungssatz

A ist $m \times m$ -Matrix: $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det(A)$$

Abbildungen:

$$\vec{v} \xrightarrow{A \cdot \vec{v}} \vec{v}' \xrightarrow{B \cdot \vec{v}'} \vec{v}'' \xrightarrow{C \cdot \vec{v}''} \vec{v}'''$$

Zusammengefasst: $\vec{v} \xrightarrow{(C \cdot B \cdot A) \cdot \vec{v}} \vec{v}'''$

Y wird auf Z abgebildet: $Z \cdot Y$

Basiswechsel: in $\mathbb{R}^n$

geg: $B = (\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3)$

$B' = (\vec{b}'_1; \vec{b}'_2; \vec{b}'_3)$

$$B \vec{\xi} = B' \cdot \vec{\xi}'$$

$$\Rightarrow \vec{\xi}' = B'^{-1} \cdot B \cdot \vec{\xi} \Rightarrow T = B'^{-1} \cdot B$$

ges.: Transformationsmatrix T

$$T: \vec{\xi} \mapsto \vec{\xi}'; \vec{\xi} \text{ hat Basis } B; \vec{\xi}' \text{ hat Basis } B'$$

$$\bullet B = B' \cdot T \Leftrightarrow T = B'^{-1} \cdot B$$

$$\bullet \vec{\xi}' = T \cdot \vec{\xi} \Leftrightarrow \vec{\xi} = T^{-1} \cdot \vec{\xi}'$$

Orthogonale Matrix:

$$A^T \cdot A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}; \det(A) = \pm 1$$

$$\text{Drehmatrix } D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

geg.: $\vec{b}_1; \vec{b}_2; \dots; \vec{b}_n$

sind die Vektoren eine Basis in $\mathbb{R}^n$?

- testen, ob $\vec{e}_1; \dots; \vec{e}_n$ durch $b_1; \dots; b_n$ darstellbar

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_n \end{pmatrix} \middle| E \right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

- testen, ob linear unabhängig: Vektoren als Zeilen

$$\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} \rightarrow \text{Gauss}$$

Basiswechsel in $\mathbb{R}^2$

Bsp.: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = T \cdot \vec{v}$$

Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt

n linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$

$$B = \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$$

$$\text{ges.: } B' = \{b_1'; b_2'; \dots; b_n'\} ; b_i' \perp b_j' ; |b_i'| = 1$$

$$b_1' = \frac{b_1}{|b_1|}$$

Zähler: Vektor, der senkrecht steht; "Kandidat"

$$b_i' = \frac{b_i - (b_i \circ b_1')b_1' - (b_i \circ b_2')b_2' - \dots - (b_i \circ b_{i-1}')b_{i-1}'}{| \text{Zähler} |}$$

Eigenwerte und -vektoren

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Eigenwert: alle λ_0 , um die ein Vektor $\vec{x}_0$ gestreckt wird, wenn die Matrix A mit ihm multipliziert wird

Eigenvektor: alle Vektoren $\vec{x}_0$, für die es einen Eigenwert λ_0 gibt; $\vec{x}_0 \neq 0$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$A\vec{x} - \lambda E\vec{x} = 0$$

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \quad \text{immer singular (as Lsg)}$$

① für welche λ ist $A - \lambda E$ singular (über Determinante)

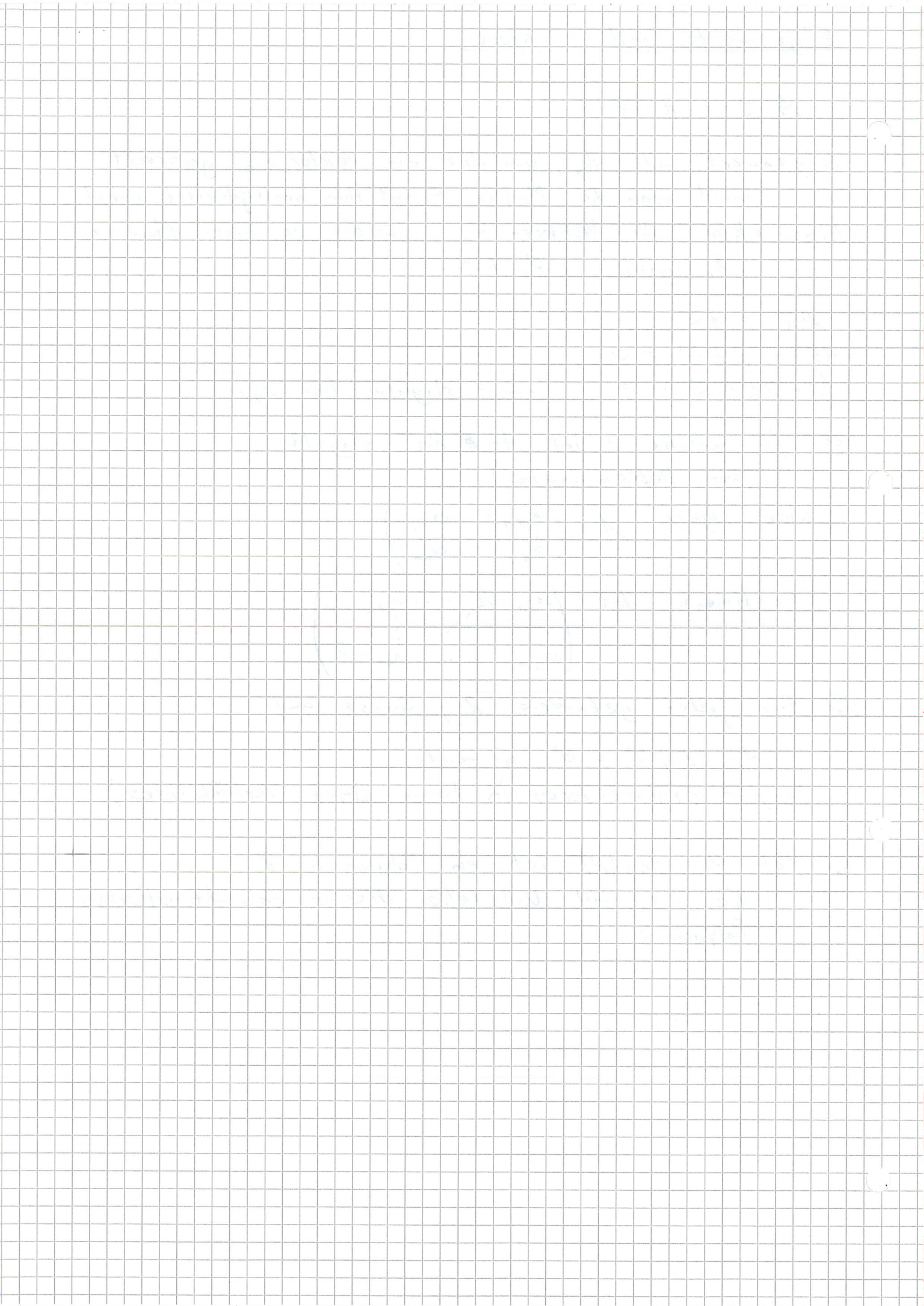
also geg: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

bestimme $\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$

② Für jedes gefundene λ , Gauss auf

$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ anwenden
(ergibt Eigenvektoren in Form einer Verhältnisse)

Zu Pkt. ①: $\det(A)$ ist ein Polynom in λ
die λ 's sind Nullstellen dieses charakteristischen Polynoms



Matrix zerlegungen

LU-Zerlegung

auf quadratische Matrix Gauss anwenden (Vorwärtsreduktion)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{nn} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

U: Untere Dreiecksmatrix mit Pivots auf Diagonalen

LR-Zerlegung $\hat{=}$ $L_0 D U$ -Zerlegung

$$D = \begin{pmatrix} \circ & & 0 \\ & \circ & \\ 0 & & \circ \end{pmatrix} \quad \text{Diagonalmatrix aus Pivots}$$

$\circ$ = Pivot-Element

$$L_0 = L \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\circ & & \\ & 1/\circ & \\ & & 1/\circ \end{pmatrix}$$

$$R = D \cdot U = \begin{pmatrix} \circ & & 0 \\ & \circ & \\ 0 & & \circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & & * \\ & \circ & \\ 0 & & \circ \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix mit Pivots auf Diagonalen

$$A = L_0 \cdot D \cdot U = L_0 \cdot R$$

$$\text{Bsp.: } A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \quad R = D \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = L \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L_0 \cdot D \cdot U = L_0 \cdot R$$

QR-Zerlegung

geg. Matrix A

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \end{pmatrix}$$

↳ Vektoren $\rightarrow$ Orthonormalisierung
nach Gram-Schmidt durchführen

ergibt $A^1 = Q$

$Q^{-1} = Q^T$, weil Q orthogonal ist

$$\text{Bedingung: } A = Q \cdot R \Rightarrow R = Q^{-1} \cdot A = Q^T \cdot A$$

Matrixzerlegungen

Cholesky-Zerlegung

geg.: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \vec{a}^t \\ \vec{a} & A' \end{pmatrix}$

$n \times n$ $\nearrow$ $(n-1) \times (n-1)$

ges.: $L = n \times n$ -Matrix für $L \cdot L^t = A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \vec{a}^t \\ \vec{a} & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & \vec{0} \\ \vec{l} & L' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & \vec{l}^t \\ \vec{0} & L'^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11} \cdot \vec{l}^t \\ \underbrace{l_{11} \cdot \vec{l}}_{\text{Vektor}} & \underbrace{L' \cdot L'^t + \vec{l} \cdot \vec{l}^t}_{\text{Matrix}} \end{pmatrix}$$

Zahl Vektor

$\Rightarrow$ Vergleich: $l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (Zahl)

$l_{11} \cdot \vec{l} = \vec{a} \Rightarrow \vec{l} = \frac{1}{l_{11}} \cdot \vec{a}$ (Vektor)

$\cdot l \cdot l^t$ berechnen (Vektor)

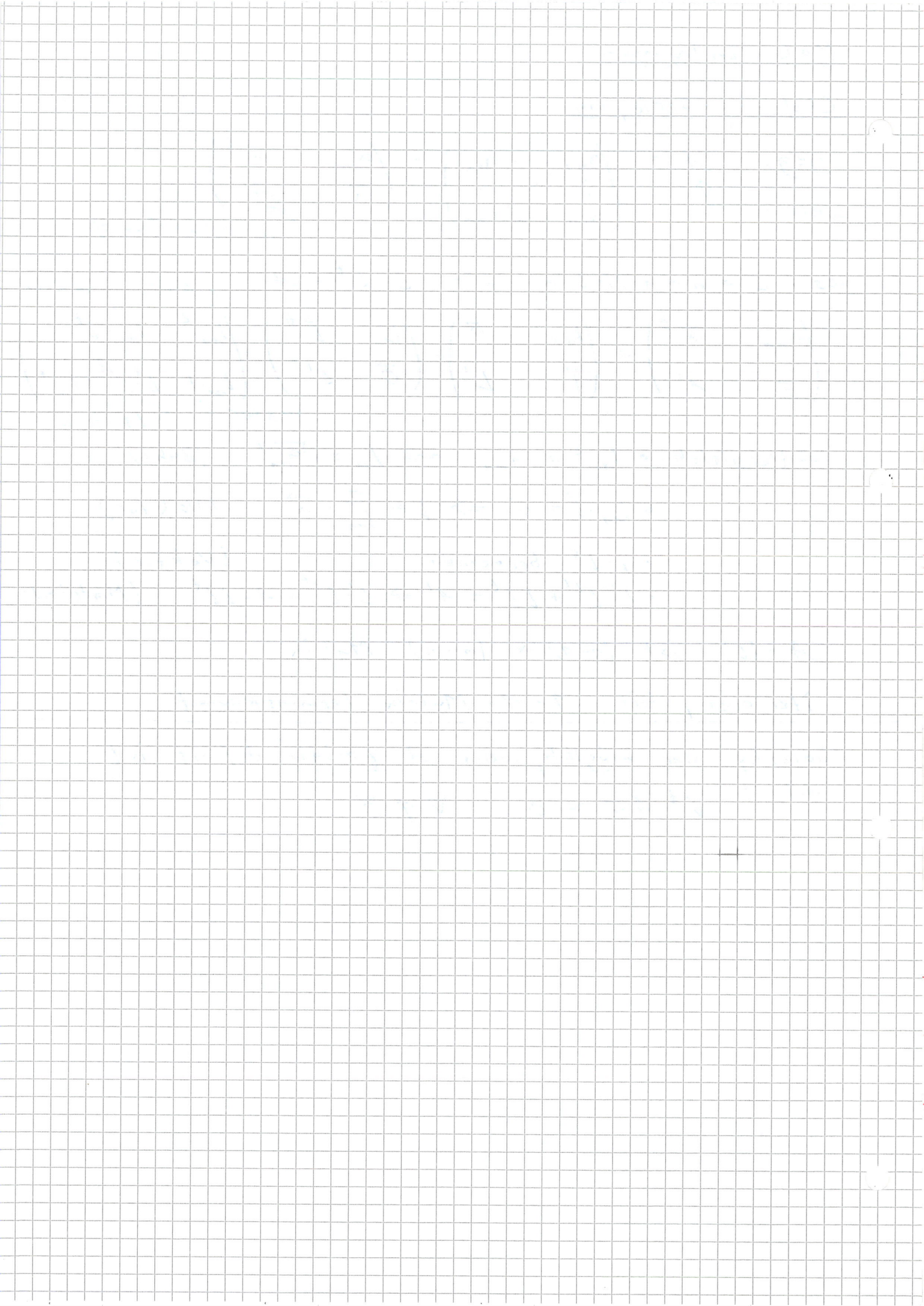
$\cdot L' \cdot L'^t + l l^t = A' \Rightarrow L' \cdot L'^t = A' - l l^t$ (Matrix)

$A - l l^t$ ist $(n-1) \times (n-1)$ Matrix

iterieren, bis 1×1 -Matrix herauskommt

Cholesky nur möglich, wenn A positiv definit ist

d.h.: $\vec{v}^t A \vec{v} > 0 \quad \vec{v} \neq \vec{0}$



Entwicklungssatz / Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$= +1 \cdot \left[+2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left[+3 \cdot |4| - 4 \cdot |0| \right] = \underline{\underline{24}}$$

einfacher:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$= +2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 2 \cdot \left(+3 \cdot |4| - 0 \cdot |4| \right) = \underline{\underline{24}}$$

