

ZF Theorie Linear Algebra 2013 EEU

n x m Matrix: n-Zeilen, m-Spalten

Diagonalmatrix: alle Elemente, ausser jene der Diagonalen sind 0

Dreiecksmatrix: oberhalb oder unterhalb der Diagonalen sind alle Elemente 0

homogen: $Ax=0$ [rechte Seite ausschliesslich = 0!]

inhomogen: $Ax=b$ [$b \neq 0$]

Rang: maximale Anzahl nicht linearabhängiger Zeilen (identisch mit der maximalen Anzahl linear unabhängigen Spalten)

Dimension: Anzahl frei wählbarer Variablen

Rang + Dimension = n Variablen

Multiplikation/Addition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Achtung!: Additionen mit unterschiedlichen Dimensionen sind nicht definiert.

$$A \cdot B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Achtung!: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Matrix x Matrix bzw. Matrix x Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z \end{pmatrix}$$

Algorithmus von Gauss: Umformen in Dreiecksform/Diagonalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

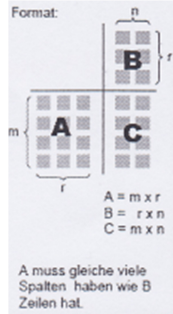
Elementare Umformung: ändert die Lösungsmenge nicht:

- vertauschen zweier Zeilen
- multiplizieren einer Zeile mit $x \neq 0$
- addieren einer Zeile auf eine andere Zeile

inverse Matrix A^{-1} : transformieren von A in die Einheitsmatrix, die rechte Seite enthält dann A^{-1}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & | & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \\ 0 & 1 & | & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$$



transponierte Matrix A^T : Spiegelung an der Diagonalen (symmetrisch, wenn $A = A^T$)

Regeln invers und transponiert:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

orthogonale Matrix: $A^{-1} = A^T$

singulär: A ist singulär, wenn mindestens einer der folgenden Punkte erfüllt ist:

- A^{-1} existiert nicht
- $\det(A)=0$
- nicht eindeutig lösbar (keine $\mathbb{L}=0$) oder ∞ viele $\mathbb{L}=\{\dots\}$ Lösungen)

regulär: A ist regulär, wenn mindestens einer der folgenden Punkte erfüllt ist:

- A^{-1} existiert
- $\det(A) \neq 0$
- A ist linear unabhängig
- A hat vollen Rang
- eindeutig lösbar (genau eine Lösung)

Determinante:

- beim Vertauschen zweier Gleichungen ändert die Determinante ihr Vorzeichen
- Multiplikationen einer Gleichung mit $\lambda \neq 0$ verändern die Determinante um den Faktor λ
- Hinzusaddieren einer Gleichung auf eine andere ändert die Determinante nicht
- ist $\det \neq 0$, dann ist das LGS eindeutig lösbar

$$\det(\text{Einheitsmatrix}) = 1 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

***berechnen mit Algorithmus von Gauss:** Die Multiplikationen werden zusammen multipliziert und invers genommen, dies ergibt die Determinante

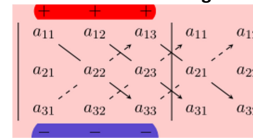
$$\text{z.B.: } -\frac{1}{x} \det(A) = \det(I) \Leftrightarrow \det(A) = -x$$

***berechnen mit Laplaceschen Entwicklung:** nach der n-Zeile oder m-Spalte.

Vorzeichenwechselfolge $++\dots$ in horizontale, wie vertikale Richtung. (z.B.:

$$\det(A) = \text{Vorzeichen}^n \text{"abzählen" nach Entwicklungsstartpunkt} a_{11} \det(A_{11}) + \text{gleich verfahren mit nächstem Koeffizienten der Zeile/Spalte} = x)$$

***berechnen mit der Regel von Sarrus:**



Cramersche Regel: (x,y,z lassen sich ermitteln)

eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$

$$\text{Prinzip} \rightarrow x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; x_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \dots \text{ (Matrix)}$$

lösen mit Sarrus)

Koordinaten bestimmen:

$$\text{Basis } B = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\} \text{ Vektor } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Basiswechsel: ($T_{B \rightarrow D} = T_{D \rightarrow B}^{-1}$)

Koordinaten von B und D bestimmen, analog oben.

$$T_{B \rightarrow D} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} V_{b_{11}} & V_{b_{12}} & V_{d_{11}} & V_{d_{12}} \\ V_{b_{21}} & V_{b_{22}} & V_{d_{12}} & V_{d_{22}} \\ V_{b_{31}} & V_{b_{23}} & V_{d_{13}} & V_{d_{23}} \end{array} \right)$$

$T_{B \rightarrow D} \cdot \text{Koordinaten von } B = \text{Koordinaten von } D$

Kern oder Nullraum: alle Vektoren, die auf die Null abgebildet werden, sprich;

jede Belegung der Variablen, die rechts nur Nullen produzieren $\Rightarrow \ker(A) =$

$$\{x \in \mathbb{R}^n | A \cdot x = 0\}$$

Bild: $\text{im}(A) = \{A \cdot x | x \in \mathbb{R}^n\} = \{b \in \mathbb{R}^n | \text{es gibt ein } x \text{ mit } A \cdot x = b\}$

Skalarprodukt: (um Länge zu bestimmen)

$$\langle u, v \rangle = u^T \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= 0 \Leftrightarrow \varnothing = \frac{\pi}{2} \text{ (u senkrecht v)} \\ \langle u, v \rangle &> 0 \Leftrightarrow \varnothing \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \langle u, v \rangle &< 0 \Leftrightarrow \varnothing \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{aligned}$$

Betrag, Norm: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Einheitsvektor: $e_v = \frac{v}{\|v\|}$

Winkel: $\cos(\varphi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$

Projektion des Vektors in Richtung e: $\|v\| \cos(\varphi) = \langle v, e \rangle$

Orthogonal: $\langle u, v \rangle = 0$ [$B^T = B^{-1}$]

Orthonormal: $\langle u, v \rangle = 0 \wedge \|u\| = \|v\| = 1$

Ab Skriptseite 77 noch unvollständig!!!

Eigenwert und Eigenvektor:

Eigenvektor = Streckungsfaktor

$$A \underset{EV}{x} = \underset{EW}{\lambda} x$$

berechnen von EW und EV:

wenn $\det(A - \lambda I) \neq 0$, dann eindeutige Lösung

1. Nullstellen berechnen durch $\det(A - \lambda I) = 0$

2. Alle λ in $(A - \lambda I) = 0$ einsetzen

Veronika Perl