

Lineare Gleichungssysteme

Linearform: $l(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$

Aus einer Linearform l und einer Konstanten b kann ein Gleichungssystem gebildet werden:

Gleichungssystem: $l(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

Allgemeine Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Grundsätzlich wird ein Lineares Gleichungssystem in 2 Fälle unterteilt.

1. Regulärer Fall: System hat genau eine Lösung.
2. Singulärer Fall: System hat keine oder unendlich viele Lösungen.

Das Gauss- Verfahren

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{3} & -6 & 9 \\ \hline 2 & 4 & -2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 3 \\ \hline \textcircled{2} & 4 & -2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 3 \\ \hline 0 & \textcircled{8} & -8 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Mit Hilfe des Gauss- Verfahrens können lineare Gleichungssysteme „einfach“ gelöst werden. Dazu braucht es lediglich folgende zwei Operatoren die hier **I** und **E** genannt werden.

- I:** Eine Variable isolieren bedeutet, die ganze Zeile durch den Koeffizienten dieser Variable zu teilen. Diese Koeffizienten werden auch als **Pivot- Element** bezeichnet.
- E:** Eine Variable mit Hilfe einer anderen Zeile zu eliminieren bedeutet, ein geeignetes Vielfaches dieser anderen Zeile zu subtrahieren, so dass der Koeffizient zu 0 wird.

Lineare Abhängigkeit

Liefert der Gauss- Algorithmus eine oder mehrere Nullzeilen, so besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen. Sprich es gibt Zahlen λ_i welche mit den Linearformen l_i multipliziert werden, sodass die Summe aller Zeilen = 0 ergibt. Mit der **transponierten- Matrix** (Zeilen und Spalten werden getauscht / Matrix wird an der Diagonalen gespiegelt) können die Zahlen λ_i mittels Gauss ermittelt werden. (Schreibweise Matrix: A **transponierte Matrix** A^T)

Rang der Matrix und Vektorform des Gleichungssystems

Mit der Vektordarstellung können nun Lösungsmengen einfacher dargestellt werden. Dazu ein Beispiel für folgendes Gausstableau:

$$\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 7 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ \hline \end{array} \quad \vec{b} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge besteht also aus dem Vektor $\vec{b}$ und denn frei wählbaren Variablen sofern diese vorhanden sind. Der **Rang** einer Matrix besteht aus der Anzahl definierten Variablen. Im Beispiel oben wäre der Rang also 3.

Mehrere Gleichungssysteme mit den gleichen Koeffizienten können gleichzeitig gelöst werden, indem der Vektor $\vec{b}$ des jeweiligen Systems der rechten Seite angehängt wird.

Zeilen- und Spaltenvektor

Eine Zeile mit den beinhaltenen Faktoren a_{ij} ist ein Zeilenvektor. Und die Spalte(n) der rechten Seite ist ein Spaltenvektor. Ein Gleichungssystem kann also auch folgendermassen in Vektorschreibweise notiert werden:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Was gleich bedeutend ist zu
 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b.$

Zu den **Speziellen Vektoren** zählt der **Nullvektor**, welcher nur aus Nullen besteht und die **Einheitsvektoren** $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Das rechteckige Zahlenschema heisst $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$ Matrix kann mit einem Spaltenvektor mittels „Zweihandtechnik“ multipliziert werden. Das heisst jede Zeile wird folgendermassen mit dem Spaltenvektor multipliziert.

$$Av = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 9 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 37 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Dass gleiche gilt auch für die Multiplikation zweier Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Dabei spielt es eine Rolle welche Matrix mit welcher multipliziert werden, was zu bedeuten hat, dass das Matrizenprodukt } AB \neq BA \text{ ist.}$$

Weiter Rechenregeln für Matrizen:

$$\begin{aligned} A(u+v) &= Au + Av & \Rightarrow & \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC \\ A\lambda v &= \lambda Av & \Rightarrow & \quad A\lambda B = \lambda AB \end{aligned}$$

Inverse Matrix

Die Inverse Matrix von A ist A^{-1} und wird mit Hilfe der Einheitsmatrix und dem Gauss bestimmt. Das heisst A ist die Koeffizienten Matrix und E ist die rechte Seite. Die **Inverse Matrix** kann **überprüft** werden, indem $A \cdot A^{-1} = \text{die Einheitsmatrix}$ ergibt.

Nutzen: $x = A^{-1}b$. Gleichungssystem Lösen

TR: A^{-1} ergibt die inverse

Determinanten

Grundsätzlich ist die Determinante einer Matrix A das Produkt aller Pivot-elemente $\det(e) = 1$. Sie gibt unter anderem Auskunft darüber, ob eine Matrix singulär ist oder nicht.

Schreibweise: $\det(A) = |A|$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Eigenschaften: Hat A eine Nullzeile, dann ist $\det(A) = 0$ | Gilt auch
 Sind in A zwei Zeilen gleich ist $\det(A) = 0$ | für
 Werden zwei Zeilen miteinander vertauscht, ändert sich das Vorzeichen | Spalten
 $\det(A) = 0 \rightarrow \det(A^T) = 0 \rightarrow A = \text{singulär}$

Berechnung: Bei 2x2 und 3x3 Matrizen lässt sich die Determinante einfach berechnen, indem der „Fisch (ad-bc)“ bei einer 2x2 und die Sarrus- Formel bei einer 3x3 Matrix angewendet wird.

Sarrusformel: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Diese Formel darf nur bei einer 3x3 Matrix angewendet werden und ergibt die Determinante

$$= \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{31}a_{22}a_{13}} - \underline{a_{32}a_{23}a_{11}} - \underline{a_{33}a_{21}a_{12}}$$

Entwicklungssatz Determinanten

Sei A eine n x n Matrix mit den Einträgen a_{ij} . Dann heisst die Matrix A_{ij} , die sich aus A durch Wegstreichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte ergibt, der i-j **Minor** der Matrix A.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

In der Anwendung des Entwicklungssatzes ist es von Vorteil, dass eine Spalte / Zeile ausgewählt wird mit möglichst vielen 0en. Dadurch muss bedeutend weniger gerechnet werden. Anwendungsbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = +(-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-9 + 2) + 3(-6 + 4) + 0(2 - 6) = \underline{1}$$

Rechnen mit Determinanten:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad \det(AB)/\det(B) = \det(A)$$

Gleichungssysteme Lösen mit Determinanten (Cramersche Regel)

Das Gleichungssystem mit n Unbekannten und n Gleichungen mit $\det(A) \neq 0$ (**regulärer** Fall) hat die Lösungen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} -x - 3y & = & -7 \\ 2x + 3y - 2z & = & 2 \\ 2x + y - 3z & = & -5 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 \text{ (Siehe oben)}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 63 - 30 + 0 - 0 - 14 - 18 = 1 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 6 + 28 + 0 - 0 + 10 - 42 = 2, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 15 - 12 - 14 + 42 + 2 - 30 = 3.$$

Inverse Matrix mit Determinante

Die Berechnung der Inverse mittels Gaußalgorithmus erfordert im Allgemeinen weniger Aufwand. Hingegen ist folgende Formel für theoretische Überlegungen durchaus Interessant. Es folgt aus ihr zum Beispiel, dass die Inverse einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1 wieder lauter ganzzahlige Einträge hat.

$$\text{Formel: } (A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ij})}{\det(A)}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 \quad \text{Die Minoren sind: } \begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 & A_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \\ A_{21} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 & A_{22} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 & A_{23} &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 & A_{32} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 & A_{33} &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Somit ist die Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & +\det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ +\det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

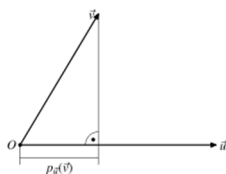
Schnittpunkt von 2 Geraden / Gerade und Ebene & Schnittgerade von 2 Ebenen

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \mathbf{0} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \end{pmatrix} \text{ nach dem Gauss}$$

kann Schnittpunkt (x,y,z) und das entsprechende t1 und t2 abgelesen werden.

Gleiches gilt für Schnittpunkt Gerade und Ebene. Bei der Schnittgeraden von zwei Ebenen gilt das gleiche vorgehen: Stützvektor (x,y,z) ablesen und Richtungsvektor steht **links** (Vorzeichen wechseln).

Orthogonale Projektion und Skalarprodukt



Projektion von $\vec{v}$ nach $\vec{u} = P_{\vec{u}}(\vec{v})$ = die Länge der Projektion. Somit ist die Projektion $P_{\vec{v}}(\vec{v}) = |\vec{v}|$ und $\cos(\alpha) = \frac{P_{\vec{u}}(\vec{v})}{P_{\vec{v}}(\vec{v})}$. Daraus ergibt sich das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v} = P_{\vec{v}}(\vec{v}) P_{\vec{u}}(\vec{u}) \cos(\alpha) = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha)$

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}, P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ausgeschrieben ist das Skalarprodukt zweier Vektoren: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Der Zwischenwinkel $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$ (Skalarprodukt = 0: $\alpha = 90^\circ$)

Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$

Normalenform einer Ebene

Eine Ebene ist auch eindeutig bestimmt durch einen Punkt P_0 sowie einem Vektor $\vec{n}_e$ der senkrecht auf der Ebene steht. Somit gilt für jeden Punkt P_n : $\vec{n}_e \cdot \overrightarrow{P_0 P_n} = 0$.

Normalenform (Parameterdarstellung) einer Ebene: $n_1x + n_2y + n_3z + D = 0$. Wobei n_1 - n_3 die Koeffizienten der Normalen sind und D durch Einsetzen eines Punktes, der in der Ebene liegt, berechnet werden kann.

Beispiel: Ebene $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normale bestimmen mit Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ kürzen $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

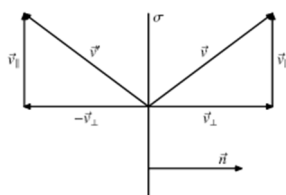
Ebene: $2x + y + 3z + D = 0 \rightarrow$ Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ einsetzen $\rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -7$

Ebene: $2x + y + 3z - 7 = 0$ in Hessesche Normalform bringen d.h. Normale muss Länge 1 haben.

$\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \rightarrow$ also Ebene in Hessesche Normalform: $\frac{2x+y+3z-7}{\sqrt{14}} = 0$. Somit ist der

Abstand der Ebene zum 0 Punkt $\frac{7}{\sqrt{14}}$ und jeglicher Abstand zur Ebene kann durch einfaches Einsetzen des jeweiligen Punktes ermittelt werden.

Spiegelung an einer Geraden und Winkelhalbierende



Spiegelung eines Vektors v an der Ebene senkrecht auf n .

$$\vec{v}' = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Winkelhalbierende: Gegeben 2 Geraden, gesucht Winkelhalbierende (2D)

MATHE BM

Orthonormieren von Basen

Gegeben sind die linearen unabhängigen Vektoren $a_1 - a_n$. Dann gibt es orthonormierte Vektoren $b_1 - b_n$ so, dass b_k aus $a_1 - a_n$ linear kombiniert werden können. Die b_i lassen sich wie folgt berechnen:

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{a}_1|} \vec{a}_1 \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1}{|\vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1|} \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2}{|\vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2|}$$

$$\vec{b}_k = \frac{\vec{a}_k - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2 - \dots - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_{k-1}) \vec{b}_{k-1}}{|\vec{a}_k - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2 - \dots - (\vec{a}_k \cdot \vec{b}_{k-1}) \vec{b}_{k-1}|}$$

Überbestimmte Gleichungssystem (Least squares)

Gegeben A und b , finde x so, dass $Ax - b$ möglichst klein ist:

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b \quad \text{ABGEKÜRZTES VERFAHREN}$$

(Wenn A transponiert * A symmetrisch ist, muss die Inverse nicht mehr gebildet werden)

Kreis und Kugel

Kugel ist definiert durch M und Radius r: $K(M,r) = \{p \mid \overrightarrow{PM}\}$

Gleichung der Kugel: $(\vec{p} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$ ausmultipliziert: $|\vec{p}|^2 + |\vec{m}|^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{p} = r^2$

Durchstosspunkt Gerade und Kugel: Gerade: $\vec{p} = \vec{p}_0 - t\vec{r}$

Gerade in Kugelgleichung einsetzen $\rightarrow$ gibt quadratische Gleichung für t. Falls nur eine Lösung für t, nur Berührungspunkt, ansonsten durchstösst die Gerade die Kugel.

Tangentialebene und Kreis

Vektorprodukt, Flächen-Volumeninhalte

Flächeninhalt Parallelogramm (2D): $A(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$

Flächeninhalt Dreieck mit den Ecken (x_1, y_1) (x_2, y_2) und (x_3, y_3) : $F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$

Volumen eines Parallelepipeds: $V \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{1. Zeile streichen und „Fisch“ anwenden (-8)} \\ \text{2. Zeile streichen “ “ “ (4) ist aber -(4)} \\ \text{3. Zeile streichen “ “ “ (-12)} \end{array}$$

Dieser neue Vektor steht senkrecht auf den anderen zwei Vektoren. Zusätzlich entspricht die Länge des neuen Vektors gleich der Fläche des Parallelogramms.

Abstand Punkt Gerade und windschiefer Geraden

Abstand h eines Punktes P zur Geraden mit Punkt P_0 und Richtungsvektor r:

$$h = \frac{|(\vec{P} - \vec{P}_0) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

Kürzester Abstand d von windschiefer Geraden $g_0 = \vec{p}_0 + t\vec{r}_0$ und $g_1 = \vec{p}_1 + t\vec{r}_1$

$$d = \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{r}_0 \times \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 \times \vec{r}_1|}}{1}$$

Lineare Räume, Aufgespannter Raum Basis,

Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ von Vektoren erzeugt den linearen Raum $\langle B \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$. Man sagt auch, B spannt den Raum $\langle B \rangle$ auf.

Basis: Wenn eine Menge von Vektoren eine Basis bilden sollen, dann ist dies der Fall wenn die Vektoren linear unabhängig sind.

Transformationsmatrix für verschiedene Basen

Basis mit Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Basis mit $b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Transformationsmatrix T findet man mit dem Gauss: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Umrechnung in $B'v = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Das Bild $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von v auf B und B' ist somit identisch.

Lineare Abbildungen

Definition: In einer Abbildungsmatrix A sind die Spalten die Bilder der Standardbasisvektoren $\vec{e}_i$.

Abbildungsmatrix A der **Spiegelung an der Geraden** mit der Normalen $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_i' = \vec{e}_i - 2(\vec{e}_i \cdot \vec{n})\vec{n} \rightarrow A \text{ setzt sich also aus } \begin{pmatrix} e_i'x & e_{i+1}'x \\ e_i'y & e_{i+1}'y \end{pmatrix} \text{ zusammen.}$$

Basiswechsel der Abbildungsmatrix A: $A' = TAT^{-1}$

Orthogonale Matrix

Abbildungen die das Skalarprodukt nicht ändern sind orthogonale Matrizen, dabei gilt $A^t = A^{-1}$ und $A^t A = E$. Diese Matrizen ändern Längen und Winkel nicht, sie beschreiben also Bewegungen des Raumes.

Drehmatrizen

In 2D: $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (Drehmatrizen sind auch Orthogonale Matrizen)

In 3D, Drehung um z-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$\text{y-Achse: } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Spurformel ermittelt den Drehwinkel von Drehmatrizen: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Spur}(A)-1}{2}$, wobei die Spur die Summe der Diagonalelemente der Matrix ist.

Matrizenzerlegung

Zerlegung von Dreiecksmatrizen: LU und LR

Zuerst Gaussen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LU:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LR:

$L(\text{Diagonalelemente}^{-1}) = L_0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L_0$$

$U(\text{Diagonalelemente}) = R$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R$$

QR:

Matrix Q besteht aus orthonormalisierten Spalten von A. Und $R = Q^t A$

Überbestimmtes Gleichungssystem mit QR lösen: geg: b ges.: geringster Abstand von B zu A bzw. Lotfusspunkt: 1. QR berechnen 2. $Q^t b$ berechnen 3. R mit Lösung von $Q^t b$ gaussen für Lösung.

Cholesky- Zerlegung

Eine Symmetrische positiv definite Matrix kann folgendermassen „cholesky-zerlegt“ werden. Gesucht ist L so, dass $A = LL^t$:

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 17 & 21 \\ 3 & 21 & 107 \end{pmatrix} \text{ dann 1. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Erste Spalte von L = links oben $\sqrt{}$ von A, Rest von Zeile durch 3 teilen und in L eintragen

$$2. A' \text{ berechnen: } \begin{pmatrix} 17 & 21 \\ 21 & 107 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 106 \end{pmatrix}$$

3. Erster Schritt wiederholen: links oben $\sqrt{}$ von A', Rest von Zeile durch 4 teilen und in L eintragen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$4. d \text{ berechnen: } A' = \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ also } 5 * 5 + d^2 = 106, d = 9 \text{ (Positiv)}$$

$$5. \text{ Fertig: } A = LL^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Eigenwertprobleme

Definition: $v \neq 0$ heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ wenn $Av = \lambda v$, d.h. gesucht sind Vektoren die nur die Länge Ändern und nicht die Richtung wechseln. Die Bestimmung der v's und λ 's erfolgt in 2 Schritten.

1. λ mit Gleichung bestimmen $\det(A - \lambda E) = 0$

2. Zu jedem gefundenem λ : $(A - \lambda E)v = 0$ (Gaussen, muss eine nullzeile rauskommen, weil v ist nicht eindeutig bestimmt. Alle Vielfachen von v sind auch Eigenvektoren).

Beispiel:

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ gegeben } \rightarrow 1. \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0 \text{ d.h. } (3-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

$$\text{Eigenwerte: } 3, 5, 7 \rightarrow 2. \text{ Für EW } \lambda=3: \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7-3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Oder da auch die Vielfachen EV sind } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Die weiteren EV's zu EW 5 & 7 nach gleichem Schema berechnen.

Speziell: A eine Diagonalmatrix (wie Bsp.) $\rightarrow$ Diagonalelemente sind EW, Standardbasisvektoren sind EV.

Kern einer Matrix

Der Kern einer Matrix A ist jener Vektor v , der mit der Matrix multipliziert wird und der Nullvektor als Lösung hervorruft ($A \cdot v = 0$). Eine quadratische Matrix enthält einen Kern wenn ihre Determinante gleich null ist. Ansonsten besteht keinen Kern bzw. nur der Nullvektor. Für die Berechnung muss also die Matrix „gegausst“ werden um den Vektor v zu finden.

Bild einer Matrix**Diagonalisierung einer Matrix**

1. Berechne das charakteristische Polynom der Matrix
2. Berechne die Nullstellen des Polynoms (=Eigenwerte) (besitzt eine $n \times n$ Matrix weniger als n Nullstellen, so ist die Matrix nicht diagonalisierbar)
3. Bestimme Eigenräume und ihre Dimensionen
4. Stelle die Diagonalmatrix auf. Dabei sind die Einträge der Hauptdiagonalen gleich der Eigenwerte

Beispiel 1:

Sonstiges