

gewichtsfunktion = Ableitung der Sprungantwort
 $g(t)$ gewichtsfunktion = Rücktransformation der Übertragungsfunktion
 Übertragungsfunktion = Laplace-Transformierte der Impulsantwort. (Tabelle).
 $G(s)$ Frequenzgang = Übertragungsfunktion imaginär
 Sprungantwort = Aufintegration von Impulsantwort oder Division von Übertrag.fkt. durch s + Rücktransformation.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

Formeln Laplacetransformation

= Diffgl.

Im Folgenden gilt stets $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Anfangs- / Endwertsatz

$\downarrow$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot s \cdot \tilde{Y}(s)$
 $\downarrow$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot s \cdot \tilde{Y}(s)$

Transformation ($s \in \mathbb{C}$)

$$f(t) \circ - \bullet F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Linearität ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \circ - \bullet c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$$

Differentiation im Originalraum

$$f(t) \circ - \bullet F(s)$$

$$f'(t) \circ - \bullet s \cdot F(s) - f(0^+)$$

$$f''(t) \circ - \bullet s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0^+) - f'(0^+)$$

$$f^{(n)}(t) \circ - \bullet s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - \dots - s \cdot f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Integration im Originalraum

$$\int_0^t f(u) du \circ - \bullet \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Dämpfung ($a \in \mathbb{R}$)

$$f(t) \cdot e^{at} \circ - \bullet F(s-a)$$

Ähnlichkeit ($a \in \mathbb{R}, a > 0$)

$$f(at) \circ - \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Verschiebung nach rechts im Originalraum ($a \in \mathbb{R}, a > 0$)

$$\sigma(t-a) \cdot f(t-a) \circ - \bullet e^{-as} \cdot F(s)$$

$$\lambda_a \cdot a(t) + k \circ - \bullet \lambda_a \cdot A(s) + \frac{1}{s} \cdot k$$

Laplacetabelle

$\sigma(t)$	$\circ - \bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t) \cdot t$	$\circ - \bullet$	$\frac{1}{s^2}$
$\sigma(t) \cdot t^2$	$\circ - \bullet$	$\frac{2}{s^3}$
$\sigma(t) \cdot t^n$	$\circ - \bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot e^{\alpha t}$	$\circ - \bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sigma(t) \cdot t \cdot e^{\alpha t}$	$\circ - \bullet$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sigma(t) \cdot t^2 \cdot e^{\alpha t}$	$\circ - \bullet$	$\frac{2}{(s-\alpha)^3}$
$\sigma(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\circ - \bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$	$\circ - \bullet$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma(t) \cdot \cos(\omega t)$	$\circ - \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	$\circ - \bullet$	$1(s)$
$\delta(t-a)$	$\circ - \bullet$	e^{-as}

Vorzeichen von α beachten!

$$\sigma(t) \cdot \frac{t^n}{n!} \circ - \bullet \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot e^{\alpha t} \circ - \bullet \frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(s+2)^2 + 4} \rightarrow \frac{1}{(s+2)^2 + 2^2} \rightarrow \omega = 2$$

1 Varianten der Integraltransformationen

Signalart	diskret	kontinuierlich
periodisch	Diskrete Fourier-Transformation	Fourierreihe
impulsförmig	"Fourierreihe mit $T = \text{Impulsdauer}$ "	Fourierintegral
kausal	Z-Transformation	Laplace-Transformation

→ lieber Produkte als Resultat!

2 Signale und Systeme

Linearität	Zeitinvarianz
$S(x1 + x2) = S(x1) + S(x2)$ $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$	$S(x(t - t_0)) = S(x) \cdot x(t - t_0)$

2.1 Lineare Systeme

Basissignale

- Lineare Systeme sind durch die Antworten auf die Basissignale bestimmt.
- Basissignale müssen linear unabhängig voneinander sein, d.h. ein Basissignal darf nicht durch **Linearkombination** anderer Basissignale darstellbar sein
- Alle möglichen Eingangs-Funktionen müssen durch eine Linearkombination der Basissignale dargestellt werden können.
⇒ **Periode des Eingangssignals = Anzahl Basissignale**

Berechnung der Systemantwort aufgrund der Basissignale und der Anregung

1. Eingangssignal x als Linearkombination der Basisvektoren darstellen ⇒ lineares Gleichungssystem

⇒ $x = r \cdot a + s \cdot b + t \cdot c$ ($x = \text{Eingangssignal}$; $a, b, c = \text{Basisvektoren}$; $r, s, t = \text{Linearkombinationsparameter}$)

2. Systemantwort $y = r \cdot S(a) + s \cdot S(b) + t \cdot S(c)$; ($S(a) = \text{Systemantwort der Basis } a$)

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega) \cdot \overline{H(\omega)}}$$

2.2 Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

LTI-Systeme sind durch ihre Impulsantwort h vollständig bestimmt

Berechnung der Systemantwort von diskreten LTI-Systemen

$y = x * h$ ($y = \text{Systemantwort}$; $x = \text{Eingangssignal}$; $h = \text{Impulsantwort}$)

Berechnung der Systemantwort von kontinuierlichen LTI-Systemen

$$s_2(t) = h(t) * s_1(t) \iff S_2(s) = H(s)S_1(s)$$

$$h(t) \iff H(s)$$



Betrag des Frequenzganges:
 Änderung der Amplitude:
 Phasengang:
 $\arg(H(\omega)) = \arctan\left(\frac{\Im(H(\omega))}{\Re(H(\omega))}\right)$

2.3 Faltung

$$y = x * h = h * x$$

$h = \text{Impulsantwort des Systems}$

diskret

$$y(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(i-k) \cdot h(k)$$

kontinuierlich

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau$$

grafische Interpretation:

- einfacheres Signal an der Y-Achse spiegeln
- Verschiebung um i nach rechts
- Skalarprodukt der beiden Signale bilden

grafische Interpretation:

- einfacheres Signal an der Y-Achse spiegeln
- Verschiebung um t nach rechts
- Multiplikation und Integration der beiden Signale

3 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$s(h) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{j h k \frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{a}_k \cos\left(hk \frac{2\pi}{N}\right) + \hat{b}_k \sin\left(hk \frac{2\pi}{N}\right) \right] \quad N = \text{Periodenanzahl}$$

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} s(h) e^{-j h k \frac{2\pi}{N}} = \hat{a}_k - j \hat{b}_k \quad \hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} s(h) \cos\left(hk \frac{2\pi}{N}\right) = \text{Re}(\hat{c}_k) \quad \hat{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} s(h) \sin\left(hk \frac{2\pi}{N}\right) = -\text{Im}(\hat{c}_k)$$

3.1 Berechnung mit Matrizen

Transformation

1. Periode N des Signalvektors $\vec{s} = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix}$ bestimmen

2. Einheitswurzel w berechnen: $w = e^{j \frac{2\pi}{N}}$

3. Matrix W berechnen: $W = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$

4. Matrix V berechnen: $V = W^*$ (konj. komplex)

5. Koeffizienten bzw. Fouriertransformierte $\vec{c}$ berechnen: $\vec{c} = \frac{1}{N} V \vec{s}$

Rücktransformation

1. Matrix W (wie bei der Transformation beschrieben) berechnen

2. Signalvektor $\vec{s}$ berechnen: $\vec{s} = W \vec{c}$

3.2 Matrizenmultiplikation

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.25 \\ -3.75 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{i-te Zeile} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{j-te Spalte} \\ \vdots \\ \text{j-te Spalte} \end{pmatrix} = C \quad (\bullet = \text{Skalarprodukt})$$

3.3 Einige W-Matrizen

N = 2

N = 3

N = 4

N = 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

N = 8

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

4 Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot e^{jk\omega_1 t} + \bar{c}_k \cdot e^{-jk\omega_1 t})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt; \quad c_0 \neq a_0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

a_0, c_0, A_0 sind Konstanten, ω_1 ist die Grundkreisfrequenz, a_k und b_k sind die reellen Koeffizienten, c_k ist der komplexe Koeffizient, A_k ist die Amplitude und φ_k ist die Phase.

$$a_k = c_k + \bar{c}_k = 2 \operatorname{Re}(c_k) = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = j(c_k - \bar{c}_k) = -2 \operatorname{Im}(c_k) = -A_k \sin(\varphi_k)$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jk\omega_1 t} dt$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k}$$

$$A_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \arg(c_k)$$

Berechnung von φ_k aus a_k und b_k

$$a_k > 0: \quad \varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

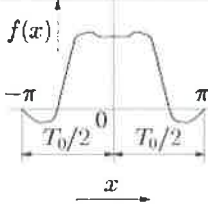
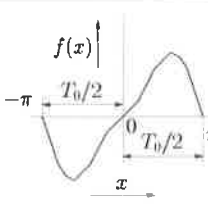
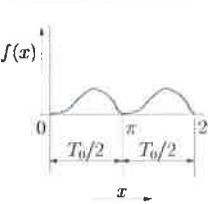
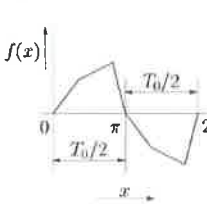
$$a_k < 0: \quad \varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi$$

$$a_k = 0 \wedge b_k > 0: \quad \varphi_k = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = 0 \wedge b_k < 0: \quad \varphi_k = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = 0 \wedge b_k = 0: \quad \varphi_k = \text{nicht definiert}$$

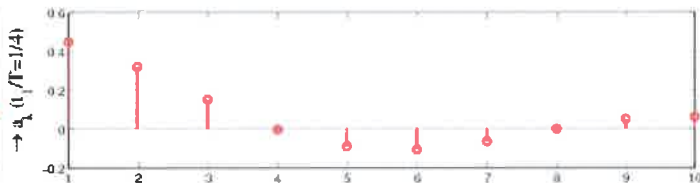
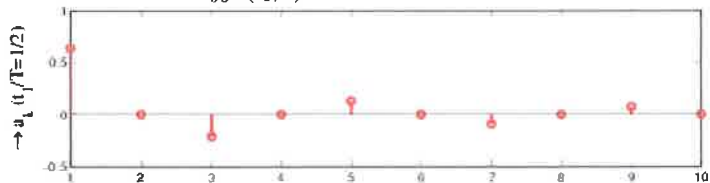
4.1 Symmetrie

gerade Funktion	ungerade Funktion	Halbperiode 1	Halbperiode 2
			
$f(-t) = f(t)$ $b_k = 0$ $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$	$f(-t) = -f(t)$ $a_k = 0$ $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$	$f(t) = f(t + \pi)$ $a_{2k+1} = 0$ $b_{2k+1} = 0$	$f(t) = -f(t + \pi)$ $a_{2k} = 0$ $b_{2k} = 0$

4.2 Rechtecksignale

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-t_1/2}^{t_1/2} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2AT}{2\pi T k} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \Big|_{-t_1/2}^{t_1/2} = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi t_1}{T} k\right)$$

Für Verhältnisse $\frac{T}{ggT(t_1, T)} = n \in \mathbb{N}$ verschwinden die n . Harmonische und deren Vielfache.



5 Fourier-Integral / Fourier-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))] d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{und} \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$$a(\omega) = \frac{\operatorname{Re}[F(j\omega)]}{\pi} \quad b(\omega) = -\frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\pi} \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg[F(j\omega)] \quad F(j\omega) = \pi[a(\omega) - jb(\omega)] = \pi A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

5.1 Symmetrie

Phasendicke: $F(\omega)$ reell: $0, \pi$
 $F(\omega)$ imaginär: $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

Es gelten die gleichen Symmetrien wie bei der Fourierreihe.

5.2 Eigenschaften

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \longleftrightarrow \alpha \cdot F(j\omega) + \beta \cdot G(j\omega)$
Zeitumkehrung (Spiegelung an der Y-Achse)	$f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{ \alpha } F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(j(\omega \mp \omega_0))$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + F(0) \pi \delta(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$t^n f(t) \longleftrightarrow j^n \frac{\partial F(j\omega)}{\partial \omega^n}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow F(j\omega) \cdot G(j\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * G(j\omega)$
Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ $F(t) \longleftrightarrow 2\pi \cdot f(-j\omega)$
Modulation	$\cos(\alpha t) \cdot f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [F(j(\omega - \alpha)) + F(j(\omega + \alpha))]$ $\sin(\alpha t) \cdot f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2j} \cdot [F(j(\omega - \alpha)) - F(j(\omega + \alpha))]$
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) G^*(j\omega) d\omega$
Bessel's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) ^2 d\omega$
Anfangswerte	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega \quad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$
∞ lange Folge von δ -Impulsen	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_0) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{t_0} \delta(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{t_0})$

6 Laplace-Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$

- Definitionsbereich nur für kausale Systeme $t \geq 0$
- Integrierbar über das Intervall $(0, \infty)$
- Wachstum kleiner als der von einer Exponentialfunktion
- Gegenüber $j\omega$ bei der Fourier-Transformation ist bei der Laplace-Transformation s verallgemeinert zu $s = \sigma + j\omega$. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ durch die Laplace-Transformation $F(s)$ ausgedrückt werden kann.

6.1 Eigenschaften

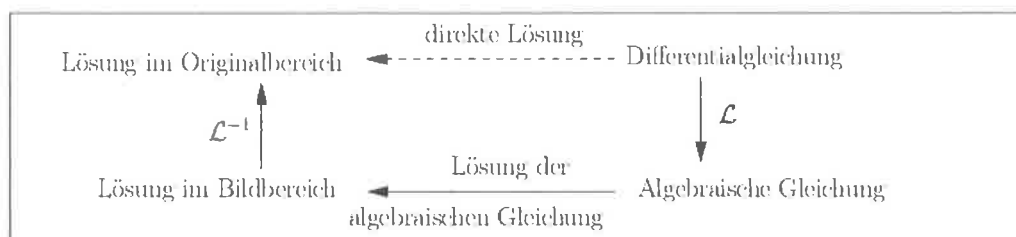
Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ \bullet \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \circ \bullet F(s) \cdot G(s)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi)G(s-\xi)d\xi$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \circ \bullet sF(s) - f(0+)$
Ableitungen im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}\frac{\partial f(0+)}{\partial t} - \dots - s^0\frac{\partial^{n-1}f(0+)}{\partial t^{n-1}}$
Multiplikation mit t	$t \cdot f(t) \circ \bullet \frac{-\partial F(s)}{\partial s}$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-t)^n f(t) \circ \bullet \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n}$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \circ \bullet F(s)e^{\pm t_0 s}$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t)e^{\mp \alpha t} \circ \bullet F(s \pm \alpha)$
Integration	$\int_0^t f(\tau)d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existiert.
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert.

6.2 Rücktransformation

6.2.1 Vorgehen

1. Kürzen oder vereinfachen
2. Partialbruchzerlegung falls nötig
3. Rücktransformation mittels Tabelle
4. $h(t)$ nicht < 0

6.3 Lösung linearer Differentialgleichungen



7 Diverses

7.1 Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow \text{Nenner faktorisieren mit Horner Schema, Binom, etc.} \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2 + 2x - 15) = (x+2)(x+5)(x-3)$$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem aufstellen mit beliebigen x_i -Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{aligned} x_1 = 3: -9 + 60 + 149 &= A \cdot 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2: -4 - 40 + 149 &= B(-5) \cdot 3 \Rightarrow B = -7 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5} \\ x_3 = -5: -25 - 100 + 149 &= C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{aligned}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

7.2 Horner Schema / ☺

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_1 & & \swarrow b_{n-1}x_1 & \swarrow b_{n-2}x_1 & \dots & \swarrow b_1x_1 & \swarrow b_0x_1 \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden!!)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 67x - 126$$

$$\begin{array}{c|cccc} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x+2)(x^2 - 2x - 63)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{1}{s(s^2+4s+8)} = \frac{a(s^2+4s+8) + (Bs+C)s}{s(s^2+4s+8)}$$

$$1 = a(s^2+4s+8) + (Bs+C)s$$

$$1 = as^2 + 4as + 8a + Bs^2 + Cs$$

$$1 = (4+0)s^2 + (4a+C)s + 8a$$

für $s=0$:

$$1 = 8a \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

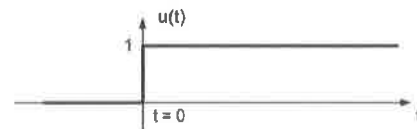
Dann muss $A+B=0$ sein und $4a+C=0$

$$\frac{1}{8} + B = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{4}{8} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

7.3 Schrittfunktion - unit step

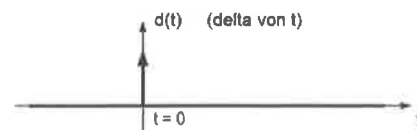
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ (praxis) oder undef. (math.)} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



7.4 Impulsfunktion - dirac delta function

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$



8 Wichtige Formeln

$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \quad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

8.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0 °	0	0	1	0	90 °	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180 °	π	0	-1	270 °	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30 °	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120 °	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210 °	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300 °	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45 °	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135 °	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225 °	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315 °	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60 °	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150 °	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240 °	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330 °	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.2 Periodizität

$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

8.3 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a) \end{aligned}$$

8.4 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

8.5 Doppel- und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(a)}{2} & \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(a)}{2} \end{aligned}$$

8.6 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{aligned}$$

8.7 Summe und Differenz

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)} \end{aligned}$$

8.8 Diverses

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} & (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & (a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

9 Integralrechnung

Partielle Integration: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

9.1 Einige wichtige Integrale

$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$	$\int \sin(a+bx)dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)$
$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\sin(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\sin(bx+d) - b\cos(bx+d))$
$\int \cos(x)dx = \sin(x)$	$\int \cos(a+bx)dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$	$\int e^{ax+c}\cos(bx+d)dx = \frac{e^{ax+c}}{a^2+b^2}(a\cos(bx+d) + b\sin(bx+d))$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
$\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$
$\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}dx$	

10 Differentialrechnung

10.1 Einige wichtige Differentiale

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
C (Konstante)	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x
e^{bx}	be^{bx}	a^x	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\ln[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t + \beta) \cdot e^{-i\omega t} dt \rightarrow \text{substitution: } u = \alpha t + \beta$$

$$t = \frac{u-\beta}{\alpha} \quad \frac{du}{dt} = \alpha \quad \Leftrightarrow du = \alpha \cdot dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\alpha|} \int_{\substack{-\infty \\ \text{wegen Int.-grenzen}}}^{\infty} f(u) \cdot e^{-i\omega \frac{u-\beta}{\alpha}} du \quad \Leftarrow dt = \frac{du}{\alpha}$$

Übertragungsfunktion, Frequenzgang, Sprungantwort
sowie stationären Zustand ($t \rightarrow \infty$) der Sprungantwort
aus Impulsantwort.

$$y_s(t) = \sigma(t) \cdot e^{-t} \cdot \cos(4t)$$

1. Übertragungsfunktion $H(s)$ = Laplace-Transform. der Impulsant. $y_s(t)$

$$y_s(t) \rightarrow H(s)$$

$$\sigma(t) \cdot e^{-t} \cdot \cos(4t)$$

↓ gehört einfach dazu... ↓ Verschiebung ($s+1$)

$$\frac{s}{s^2 + 4^2}$$

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 17}$$

$$\underline{\underline{H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 17}}}$$

2. Frequenzgang = Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse.

$$\underline{\underline{H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{-\omega + 2j\omega + 17}}}$$

3. Sprungantwort = A. auf Integration der Impulsantwort $y_s(t)$
 $\rightarrow y_\sigma(t) = \int_0^t y_s(u) du$
 $= \int_0^t e^{-u} \cdot \cos(4u) du$

Exklusiv- ODER
lol ;)

B. Division der Übertrag.fkt durch s
+ Rücktransformation.

$$Y_D(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+12)} \quad \text{--- } 0 \dots$$

$$y_D(t) = \frac{1}{12} \sigma(t) - \frac{1}{12} e^{-t} \cos(4t) + \frac{9}{12} e^{-t} \sin(4t)$$

4. Stationärer Zustand.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_D(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{distal}} = \frac{1}{12}, \quad \text{weil } e^{-t} \text{ gegen } 0 \text{ streben.}$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Differentialgleichung.

1. Aus der Diff.Gl. direkt die Übertragungsfunktion $G(s)$ hinschreiben:

$$y''' + 3y'' + 7y' + 5y = f(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

2. Nullstellen finden

$$s_1 = -1 \text{ (erraten)}$$

Horner-Schema

	s^3	s^2	s	c
$s_1 = -1$	1	3	7	5
	1	2	5	0
	s^2	s	c	
	$(s^2 + 2s + 5)$			

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

3. Partialbruch...

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{a}{s+1} + \frac{bs+c}{s^2+2s+5}$$

$$1 = a(s^2+2s+5) + (bs+c)(s+1)$$

$$\Rightarrow 1 = as^2 + 2as + 5a + bs^2 + bs + cs + c$$

$$\Rightarrow 1 = (a+b)s^2 + (2a+b+c)s + (5a+c)$$

Matrix...

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{4}$$

$$G(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+2s+5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2+2s+5}$$

4. Rücktransformation

a. In Form bringen

$$\frac{s}{s^2+2s+5} \rightarrow \text{Nenner quadratisch ergänzen:}$$

$$\rightarrow (s^2+2s+1) - 1 + 5 = (s+1)^2 + 2^2$$

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}}_{\bullet} - \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{s}{(s+1)^2+2^2}}_{\bullet} - \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2}}_{\bullet}$$

b. Tabelle

$$g(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{8} \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$$

Differenzierungsregel im Bildraum

$$F^{(n)}(s) \longleftrightarrow (-1)^n t^n f(t) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Rücktransformation von:

$$F(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$$

1. $F(s)$ nach s ableiten:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{d}{ds} \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \quad \left(\frac{\ln(a)}{da} = \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2}} \cdot \left(-\frac{2}{s^3}\right) = -\frac{2}{s^3 + s} = -\frac{2}{s(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

$s^{-2} \rightarrow -2 \cdot s^{-3}$

2. Partialbruch...

$$\begin{aligned} -\frac{2}{s(s^2 + 1)} &= \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + 1} \\ -2 &= as^2 + a + bs^2 + cs \\ -2 &= as^2 + bs^2 + a + cs \\ -2 &= (a + b)s^2 + cs + a \end{aligned}$$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	0	-2

$a = -2, \quad b = 2, \quad c = 0$

$$F(s) = -\frac{2}{s} + 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

3. Rücktransformation.

$$f(t) = -2 \cdot \delta(t) + 2 \cdot \delta(t) \cdot \cos(t) \quad \xrightarrow{\text{Regel anwenden}}$$

$$f(t) = \frac{2}{t} \cdot \delta(t) (1 - \cos(t))$$

2.

$$\int_0^{\infty} t \cdot e^{-3t} \cdot \sin(t) dt.$$

Das Integral ist die Laplace-Transformierte $F(s)$ von $f(t) = t \cdot \sin(t)$ an der Stelle $s=3$.

Für $F(s)$ wenden wir die Differenzierungsregel im Bildraum an. $F(s)$ erhält wir als das Negative der Ableitung:

$$F(s) = - \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$(s^2+1)^{-1} \Rightarrow -(s^2+1)^{-2} \cdot 2s = - \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$F(3) = \frac{3 \cdot 2}{(3^2+1)^2} = \frac{6}{100} = \underline{\underline{\frac{3}{50}}}$$

Laplace sei Summenzeichen:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(t-k)$$

Die Verschiebung wird zu e^{-ks}
 $\sigma(t)$ wird zu $\frac{1}{s}$

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ks}$$

Da e^{-ks} das k mitträgt, nehmen wir auch das zugehörige Σ -Zeichen mit.

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s})^k = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(t-k) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$$

Laplace - Transformation

Produkt mit der Delta-Funktion.

Ein Produkt mit der verschobenen Delta-Funktion, resultiert darin, dass die Variable der gewöhnlichen Funktion sich ändert zu der Zahl, mit der die δ -Fkt verschoben wurde; $\rightarrow$ also dessen **Betrag!!!**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\pi) \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\pi) \cos(k\pi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \delta(t - k\pi)\end{aligned}$$

Die Laplace - Transformierte davon:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-k\pi s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (e^{-\pi s})^k$$

$\downarrow$
alternierende geometrische
Reihe.

$$\rightarrow \underline{\underline{F(s) = \frac{e^{\pi s}}{1 + e^{\pi s}}}}}$$

Faltung

①

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < 1 \\ -1 & , 2 < t < 3 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & , t > 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

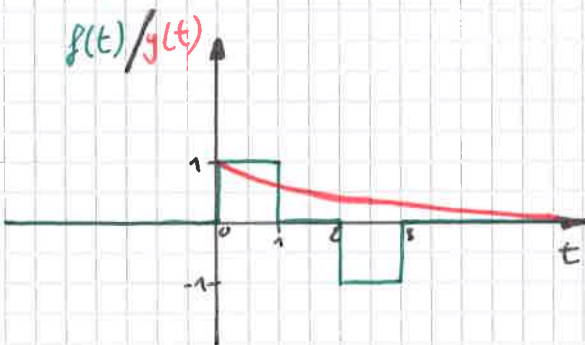
Grenzen aus diesen Werten bilden!

$$\neq 0; \begin{cases} 0 < u < 1 \\ 2 < u < 3 \end{cases} \begin{cases} 0 < u < 1 \\ 2 < u < 3 \end{cases} \rightarrow \text{dazu wird } 0.$$

$$\rightarrow f * g = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(u)}_{\text{einfachere Funktion!}} \cdot \underbrace{g(t-u)}_{\neq 0; t-u > 0 \Leftrightarrow t > u} du$$

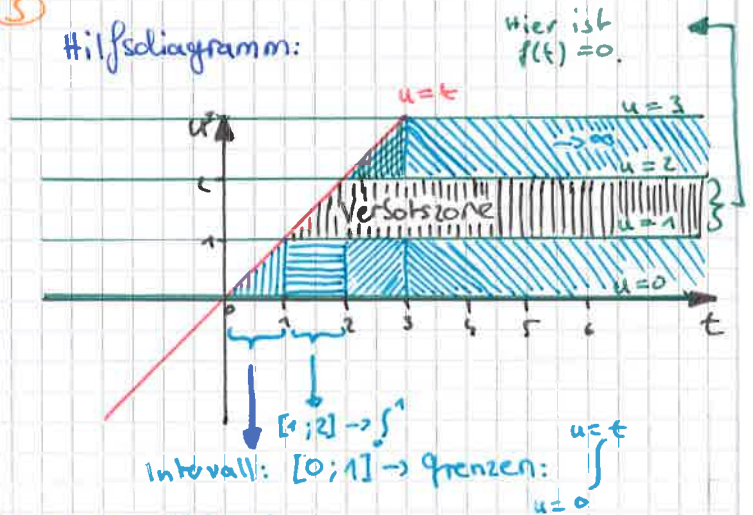
②

Skizze:



③

Hilfsdiagramm:



④

$$f(t) = 1 \text{ für } 0 < u < 1$$

$$0 < t < 1: \int_{u=0}^{u=t} 1 \cdot e^{-(t-u)} du = e^{-t} \int_0^t e^u du = e^{-t} (e^t - 1) = \underline{\underline{1 - e^{-t}}}$$

$$f(t) = 1 \text{ für } 0 < u < 1$$

$$1 < t < 2: \int_0^1 1 \cdot e^{-(t-u)} du = e^{-t} \int_0^1 e^u du = e^{-t} (e - 1) = \underline{\underline{e^{1-t} - e^{-t}}}$$

$$f(t) = -1 \text{ für } 2 < u < 3$$

$$2 < t < 3: \int_0^1 1 \cdot e^{-(t-u)} du + \int_2^t (-1) \cdot e^{-(t-u)} du = e^{-t} \left(\int_0^1 e^u du - \int_2^t e^u du \right) = \underline{\underline{e^{-t} (e - 1 - e^t + e^2)}}$$

$$f(t) = 1 \text{ für } 0 < u < 1$$

$$3 < t < \infty: \int_0^1 1 \cdot e^{-(t-u)} du + \int_2^3 (-1) \cdot e^{-(t-u)} du = e^{-t} \left(\int_0^1 e^u du - \int_2^3 e^u du \right) = \underline{\underline{e^{-t} (e - 1 + e^3 + e^2)}}$$

Neue Funktion:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & , 0 < t < 1 \\ e^{1-t} - e^{-t} & , 1 < t < 2 \\ e^{-t}(e - 1 - e^t + e^2) & , 2 < t < 3 \\ e^{-t}(e - 1 - e^3 + e^2) & , 3 < t < \infty \end{cases}$$

→ Faltungsprodukt.

1.) a. Gegebene Funktionen aufschreiben.

b. Formel für Faltungsintegral aufschreiben.
Einfachere Funktion "wird zu" $(t-u)$.

2.) Funktionen skizzieren.

3.) Für das Hilfsdiagramm müssen die Grenzen bestimmt werden.

a. t mit u bzw. $(t-u)$ substituieren.

$$\text{z.B. } 0 < t < 1 \stackrel{u=t}{\Rightarrow} 0 < u < 1, \\ 0 < t-u < 1$$

→ Durch diese Grenzen erhält man Bereiche.

b. Für die Integralgrenzen werden wir nur noch die Grenzen der u -Achse brauchen. Je nach t -Intervall gibt's andere Grenzen UND andere Funktionswerte innerhalb des Integrals. → Die Funktionen haben nun ja die Variablen u und $t-u$ und nicht mehr t .

4.) Nun können die Integrale aufgestellt werden.

→ Für jedes t -Intervall des Hilfsdiagramms werden die Grenzen (unter Berücksichtigung von "Verbotsszenen") herausgelesen und die Funktionswerte für diese Bereiche als Integrand eingetragen.

Frequenzgang und Systemantwort:

Frequenzgang: $H(\omega) = \frac{-\omega^2 - 3j\omega + 2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$

Signal:

komplex:

Antwort:

$$\sin(t) = f(t)$$

$$f(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$y(t)$$

Vorgehen:

1. $\pm$ Frequenz des Signals in Frequenzgang einsetzen:

$$H(\pm 1)$$

2. Die komplexe Zahl die man bekommt, setzt man in die komplexe Darstellung des Signals als Koeffizienten ein: (pos, neg. beachten!!!)

$$y(t) = \frac{1}{2i} \left(H(1) \cdot e^{it} - H(-1) \cdot e^{-it} \right)$$

↳ • berechnen

• umwandeln.

DiffG1 mit Laplace. groß:

$$\dots y'' \dots y'' \dots y = \dots \sin(t) \dots$$



transformieren

$$s^2 Y(s) \dots - s \cdot y(0) \dots = \dots \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \dots$$

↓
Ableitungen werden
zu Produkten



nach $Y(s)$ auflösen.

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4}$$



Tabelle $\rightarrow$ finde $y(t)$
zu $Y(s)$

$\rightarrow$ eindeutig! :)

$$\underline{y''(t)} + \underline{5y'(t)} + \underline{6y(t)} \stackrel{!}{=} t^2, \text{ für } t \geq 0$$

gesuchte Funktion

1. Typ? $\rightarrow$ Inhomogen, lineare DiffGl 2. Ordnung mit konst. Koeffz.

1. Beide Seite Laplace-Transformieren

$$\begin{aligned} & -y'(0) - s \cdot y(0) + s^2 Y(s) \\ & + 5(-y(0) + sY(s)) \\ & + 6Y(s) = \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

2. Ausklammern:

$$(s^2 + 5s + 6) \cdot Y(s) - y'(0) - (5+s) \cdot y(0) = \frac{2}{s^3}$$

3. auflösen nach $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s^3} + y'(0) + (5+s) \cdot y(0)}{s^2 + 5s + 6}$$

4. Rücktransformation:

$\rightarrow$ rechte Seite zerlegen in Funktionen die in der Formelsammlung zu finden sind.

$$\Rightarrow = \frac{2 + s^3 y'(0) + (5s^3 + s^4) y(0)}{s^5 + 5s^4 + 6s^3}$$

$\hookrightarrow$ Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} & \frac{s^3 (s+3)(s+2)}{(s^5 + 5s^4 + 6s^3)} \\ & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & -3 & -2 \end{matrix} \end{aligned}$$

0-stufige -2/-3/-2

Kandidat für Polstelle:

$$s=0; s=-3, s=-2.$$

Rücktransformation von Laplace-transformierten.

$$F_5(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+3)(s^2+8s+20)}$$

e^{-3s} — Verschiebung im Zeitbereich

1. Analyse

→ e^{-3s} entspricht einer Verschiebung im Zeitbereich.

↳ Also können wir diesen ja erst am Schluss berücksichtigen.

2.a. Vereinfachen / Partialbruch

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+8s+20)} = \frac{a}{(s+3)} + \frac{bs+c}{(s^2+8s+20)} \quad | \cdot \neq N$$

$$1 = a(s^2+8s+20) + (bs+c) \cdot (s+3)$$

$$1 = \underline{as^2} + \underline{8as} + \underline{20a} + \underline{bs^2} + \underline{3bs} + \underline{cs} + \underline{3c}$$

$$1 = (a+b)s^2 + (8a+3b+c)s + (20a+3c)$$

b. Koeffizientenvergleich

$$s^2: a + b = 0$$

$$s^1: 8a + 3b + c = 0$$

$$s^0: 20a + 3c = 1$$

→ Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$



$$\rightarrow a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{1}{5}, \quad c = -1 \quad \text{wegen } (-\frac{1}{5})$$

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+8s+20)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+5}{s^2+8s+20}$$

3. Rücktransformation mittels Tabelle:

a. auf die richtige Form bringen.

$$F(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+4}{s^2+8s+20} - \frac{1}{5} \cdot \frac{5-4}{s^2+8s+20}$$

Bereit für Transformation.

quadratisch ergänzen.

$$s^2+8s+20 = s^2+8s+16 - 16+20$$

$$(s+4)^2+4$$

$$(s+4)^2+2^2$$

$$F(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+4}{(s+4)^2+2^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{(s+4)^2+2^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+4}{(s+4)^2+2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{(s+4)^2+2^2}$$

b. Rücktransform.

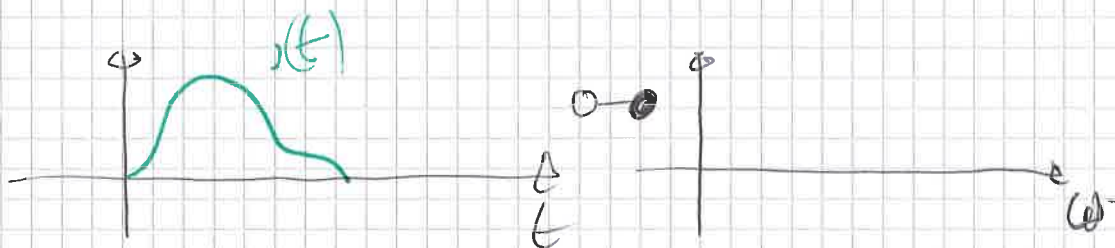
$$f(t) = \alpha(t) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e^{-3t} - \frac{1}{5} \cdot e^{-4t} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{10} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(2t) \right)$$

4. Verschiebung vom Anfang: $e^{-3s} \cdot F(s) \rightarrow$ Vorher multiplizieren!

$$f(t) = \alpha(t-3) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e^{-(t-3)} - \frac{1}{5} \cdot e^{-4(t-3)} \cdot \cos(2(t-3)) - \frac{1}{10} \cdot e^{-4(t-3)} \cdot \sin(2(t-3)) \right)$$

- Amplitudendichte:

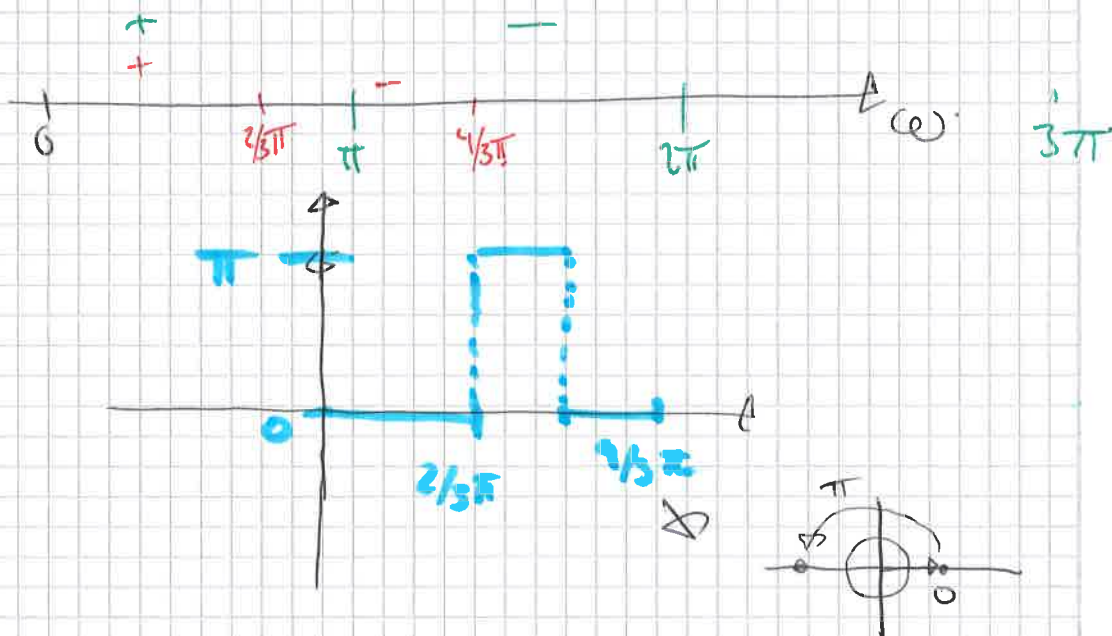
- Phasendichte: $s(t) \xrightarrow{\text{Fouriertrans.}} S(\omega)$; komplexwertig.



$$s(\omega) = \underbrace{|s(\omega)|}_{\text{Amplitudendichte}} \cdot e^{j \underbrace{\arg(s(\omega))}_{\text{Phasendichte}}}$$

$$s(\omega) = \frac{4}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \quad \text{reell}$$

↓
phase 0, π.



- Faltung:

Intra 12:

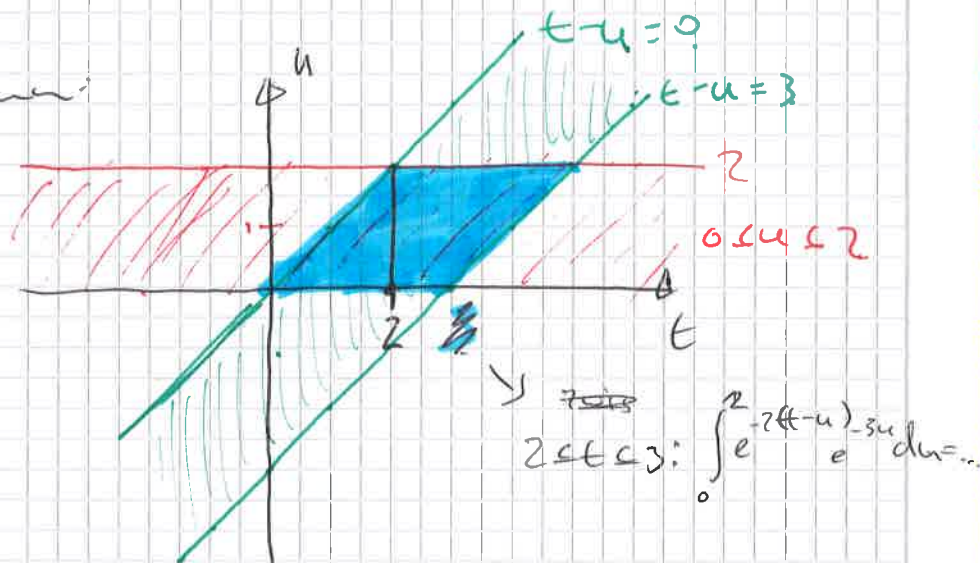
A21.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} ; g(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) \cdot g(u) du$$

$\neq 0; 0 \leq u \leq 2$ (red arrow pointing to $g(u)$)
 $\neq 0; 0 \leq t-u \leq 3$ (green arrow pointing to $f(t-u)$)
 $f(t)$ spiegeln

→ Hilfsdiagramm:



$0 \leq t \leq 2:$

$$\int_0^t e^{-2(t-u)} \cdot e^{-3u} du = \dots$$

$3 \leq t \leq 5:$

$$\int_{t-3}^2 e^{-2(t-u)} \cdot e^{-3u} du = \dots$$

Diffgl. mit Anfangsbedingung.

Eigenfunktion, Sprungantwort.

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t}$$

Übertragungsfunktion?

Anfangsbedingung $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

1. Gewichtsfunktion:

Ableitung der Sprungantwort.

$$g(t) = y'(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t}$$

$$y'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot e^{-3t}$$

$$g(t) = y'(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$$

2. Übertragungsfunktion $G(s)$

$g(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} G(s)$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\overbrace{1(s+3) - 1(s+1)}^{s+3 - s - 1 = 2}}{s^2 + 4s + 3} \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{1}{2} \frac{s+3 - s-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4s + 3}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = G(s)$$

3. Diffgl.: (Zeitverl.)

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$$

Anfangswerte:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \quad , \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

~~$$y''(t) + 8 - 3 = y''(t) + 5$$~~

2.

~~$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0)$$~~

$$s^2 \cdot Y(s) + s \cdot -2 + 4s \cdot Y(s) + 4 + 3Y(s) = 0$$

- nach $Y(s)$ auflösen

- Rücktransformation.

Harmonische Schwingungen

Amplituden - Phasenform:

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow f(t) = A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

$$\rightarrow a = A \cos(\varphi), \quad b = -A \sin(\varphi)$$

Amplitude $\cdot$ Cos/Sin-Phase = Fourier-Koeffizient

$$\rightarrow f(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$$

Kosinus - Sinus form:

$$f(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$$

Kosinus-Koeffizient

Sinus-Koeffizient

reine Cos-Schwingung

reine Sin-Schwingung

$$\text{Fourier-Koeffizient} = \text{Amplitude} \cdot \text{Sin/Cos-Phase}$$