

InTra Zusammenfassung

Joël Leirer – joel.Leirer@ost.ch

Herbstsemester 2022

Lizenz

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons](#) “Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International” Lizenz.



Note:

Erlaubte Hilfsmittel HS22:

- 4 A4-Seiten Zusammenfassung
- Formelsammlung Fourier-/Laplacetransformation

(Diese Formelsammlung ohne Inhaltsverzeichnis, Anhang ist erwähnte Fourier-Tabelle.)

Inhaltsverzeichnis

1	Integraltransformationen	1
1.1	Faltung	1
1.2	Fourier-Reihe und Transformation	1
1.3	Laplace-Transformation	2
1.4	Hilbert-Transformation	2
2	Wichtige Funktionen	2
3	LTI-Systeme	3
3.1	Beschreibung von LTI Systemen	3
3.1.1	Impulsantwort	3
3.1.2	Frequenzantwort	3
3.1.3	Berechnung des Ausgangssignals	3
3.2	Bezeichnungen	3
3.2.1	Filtereigenschaften	3
3.3	BIBO-Stabilität Bound-Input-Bound-Output	3
3.4	Integrieren und Differenzieren	4
3.4.1	Integrationsregeln	4
3.4.2	Ableitungsregeln	4
3.5	Partialbruchzerlegung	4
3.6	Wichtige Werte & Vereinfachungen	4

1 Integraltransformationen

1.1 Faltung

$$y(t) = (x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau$$

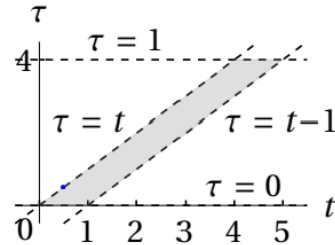
Eigenschaften:

Kommutativ	$(f * g = g * f)$
Assoziativ	$((f * (g * h)) = ((f * g) * h))$
Distributiv	$(f * (g + h) = f * g + f * h)$
Stetigkeit	ist immer stetig

Vorgehen

1. τ bzw. $t - \tau$ in die Entsprechende Funktion Einsetzen
2. Bereiche für $f \neq 0$
3. Bereiche in Hilfsdiagramm einzeichnen (siehe Bsp.)
4. Einzelne Integrationsbereiche mit Hilfe Diagramm bestimmen, indem Zeit t "raufgezählt" und Übergänge der Grenzen beachtet wird
5. Integrale Bestimmen, Integralgrenzen = Ein-gezeichnete Grenzen im Diagramm.
6. Integrale auflösen

Beispiel



$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < t < 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1. (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$2. f(t) : 0 < \tau < 4$$

$$g(t) : 0 < t - \tau < 1 \Rightarrow t - 1 < \tau < t$$

3. Siehe oben.

4. und 5.

$$(f * g)(t) = \begin{cases} t \leq 0 : 0 \\ 0 < t \leq 1 : \int_0^t 2 \cdot 3 d\tau \\ 1 < t \leq 4 : \int_{t-1}^t 2 \cdot 3 d\tau \\ 4 < t \leq 5 : \int_{t-1}^4 2 \cdot 3 d\tau \\ 5 < t : 0 \end{cases}$$

1.2 Fourier-Reihe und Transformation

Fourier-Reihe

Trigonometrische Form $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t)$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) dt$$

Harmonische Form $x(t) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t + \varphi_n)$

$$r_0 = \frac{u_0}{2} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad r_n > 0 = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \quad \varphi = \arg(u_n - j \cdot v_n)$$

Komplexe Form $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn2\pi f_0 \cdot t}$

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn2\pi f_0 \cdot t} dt$$

$2\pi f_0$ wird auch als **Kreisfrequenz** ω bezeichnet,
 f_0 = Frequenz des Grundsignals $x(t)$.

Umrechnung Koeffizienten $c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, b_0 = 0)$

$$a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n); \quad b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, b_0 = 0)$$

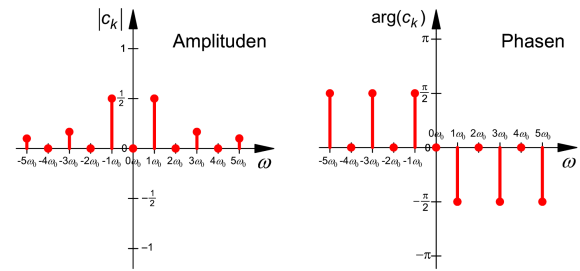
Fouriertransformation $\mathcal{F}(\omega)$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$|F(\omega)|$ = Amplitudendichtefunktion
 $\arg(F(\omega))$ = Phasendichtefunktion
 Rechenregeln Siehe Anhang.

Spektraldarstellung



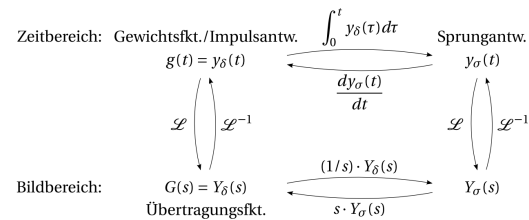
1.3 Laplace-Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \text{ mit } s \in \mathbb{C}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p_0-j\infty}^{p_0+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Rechenregeln Siehe Anhang.

Zusammenhänge



Konvergenzhalbebene

Die Konvergenzhalbebene beginnt bei der Polstelle der Laplace-Transformierten mit dem Grössten Realteil und geht bis unendlich.
 Bsp: Bei $\frac{1}{s-2}$ ist die Polstelle bei +2, daraus folgt: Konvergenzhalbebene = $[2, \infty)$

1.4 Hilbert-Transformation

Im Zeitbereich:

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Im Frequenzbereich:

$$\hat{X}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega) \cdot X(\omega)$$

2 Wichtige Funktionen

Diracimpuls (auch Impuls-/Deltafunktion,-Distribution)

Unendlich kurzer, normierter Impuls mit unendlicher Amplitude.

1.	$\delta(-t) = \delta(t)$	gerade Funktion
2.	$\delta(-t + t_0) = \delta(t - t_0)$	symmetrisch
3.	$\delta(at) = \frac{1}{ a } \delta(t)$	Skalierung
4.	$\delta(\frac{t-t_0}{a}) = a \cdot \delta(t - t_0)$	Skalierung und Verschiebung
5.	$\delta(t - t_0)f(t) = f(t_0)\delta(t - t_0)$	Abtastung
6.	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$	Siebungseigenschaft
7.	$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t)dt = A$	Spezialfall Siebungseigenschaft
8.	$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$	Faltung
9.	$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$	Faltung

10.	$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$	Ableitung Einheitssprung
11.	$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t}$	Definition
12.	$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-t^2/\epsilon}}{\sqrt{\pi\epsilon}}$	Definition
13.	$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-t^2/\epsilon}}{\sqrt{\pi\epsilon}}$	Definition
14.	$t^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} = (-1)^n n! \delta(t)$	Ableitung
15.	$f(t) * \frac{d\delta(t-t_0)}{dt} = \frac{df(t-t_0)}{dt}$	Faltung mit Ableitung
16.	$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\delta(t)}{-t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-2t\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}$	1. Ableitung $\delta(t)$ = ungerade F.
17.	$1 \circ \bullet 2\pi\delta(\omega)$	Fourier
18.	$\delta(t) \circ \bullet 1(\omega)$	Fourier

Name	Definition	○—●	Formelzeichen	plot
Sprungfunktion (Heaviside)	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$ (machmal: 1 für $t = 0$)	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$u(t), \sigma(t), h(t)$	
Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)	$\begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	$sgn(t)$	
Rampenfunktion	$\begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ t & \text{für } t > 0. \end{cases}$	$\frac{1}{s^2}$	$r(t)$	
Rechteckimpuls	$\begin{cases} 1 & \text{für } t < a, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = a, \\ 0 & \text{für } t > a. \end{cases}$	$\frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s}$	$p_a(t), \beta(t)$ $\sigma(t+a) - \sigma(t-a)$	
Dreieckimpuls	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & \text{für } t < a \\ 0 & \text{für } t \geq a \end{cases}$	$\text{sinc}^2(\omega)$	$\Lambda(t)$	
Sinc-Funktion	$\frac{\sin(t)}{t} \quad \forall t$ $\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}(t) = 1$ wenn normalisiert: $t \rightarrow \pi t$	$\beta(\omega)$ (Rechteckimpuls)	$\text{sinc}(t)$	

3 LTI-Systeme

Linearität und Zeitinvarianz

- $\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$
- $\mathcal{T}[k_a \cdot x(t)] = k_a \cdot y(t)$
- $\mathcal{T}[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$

3.2 Bezeichnungen

Übertragungsfunktion: $H(\omega) = G(j\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\varphi_H(\omega)}$

auch: Frequenzgang

Amplitudengang: $|H(\omega)|$

Phasengang: $\varphi_H(\omega)$

3.1 Beschreibung von LTI Systemen

3.1.1 Impulsantwort

Systemreaktion auf $\delta(t)$.

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

3.1.2 Frequenzantwort

Fouriertransformierte Impulsantwort.

Auch Übertragungsfunktion genannt.

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = X(\omega) \cdot G(j\omega)$$

3.1.3 Berechnung des Ausgangssignals

1. Integraltransformation:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] \quad / \quad X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

2. Berechnung in Bild / Frequenz:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad / \quad Y(s) = X(s) \cdot G(s)$$

3. Rücktransformation:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

3.2.1 Filtereigenschaften

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$$

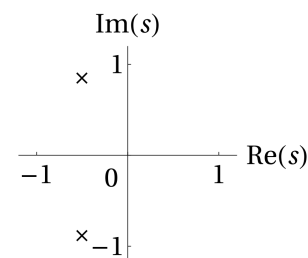
$$\varphi_y(\omega) = \varphi_x(\omega) + \varphi_H(\omega)$$

3.3 BIBO-Stabilität Bound-Input-Bound-Output

Systemantwort Begrenzt, wenn Eingangssignal Begrenzt

⇒ Konvergenzhalbebene Übertragungsfunktion enthält Imaginär-Achse

⇒ Alle Polstellen Übertragungsfunktion links von "j-Achse"



3.4 Integrieren und Differenzieren

3.4.1 Integrationsregeln

Linearität	$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) + C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$ ($v(x)$ = einfachste Funktion wählen!)
Substitution (Rationalisierung)	$t = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \int R(\sin(x) \cos(x)) dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad x = g(t) \quad g'(t) = \frac{dt}{dx} \quad dx = \frac{1}{g'(t)} \cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C \quad (f(x) \neq 1)$
Spezielle Form des Integranden	$\int f'(x) \cdot (f(x))^\alpha dx = f(x)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad \frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt = f(x)$

3.4.2 Ableitungsregeln

Linearität	$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Kettenregel	$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$
Potenz	$((x-a)^n)' = n \cdot (x-a)^{n-1}$
Trigo	$\sin'' = \cos' = -\sin$
Schrittfunktion	$\sigma'(t) = \delta(t)$

3.5 Partialbruchzerlegung

Nenner Faktorisieren (Nennerexponent)

Zähler = Polynom (Nennergrad -1)

Gleichsetzen mit Originalbruch

Mit Gleichungssystem auflösen.

Ansätze:

$$\frac{\dots}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$\frac{\dots}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

$$\frac{\dots}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

3.6 Wichtige Werte & Vereinfachungen

Integration über Periodendauer

$$\int_T (x \cdot \sin(\omega t + \alpha))^2 dt = x^2 \cdot \int_T \sin^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_T (x \cdot \cos(\omega t + \alpha))^2 dt = x^2 \cdot \int_T \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{x^2}{2}$$

Komplex sin/cos

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

Fourier- und Laplacetransformation

Eigenschaften und Rechenregeln

Wo nicht anders angegeben, sind a , t_0 , ω_0 beliebige reelle und a_1 , a_2 beliebige komplexe Zahlen.

	Fouriertransformation	Laplacetransformation (f ist kausal)
Transformation	$f(t) \circ \bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	$f(t) \circ \bullet F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$
Rücktransf.	$F(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$	$F(s) \bullet \circ \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\cdot\infty}^{x+j\cdot\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$ bzw. Tabelle
Linearität	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)$ $\circ \bullet a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega)$	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)$ $\circ \bullet a_1 \cdot F_1(s) + a_2 \cdot F_2(s)$
Verschiebung	$f(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega)$	$\sigma(t - t_0) \cdot f(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} \cdot F(s)$ für $t_0 > 0$
Modulation	$F(\omega - \omega_0) \bullet \circ e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)$	
Dämpfung		$f(t) \cdot e^{at} \circ \bullet F(s - a)$
Streckung	$f(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{ a } \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ für $a \neq 0$	$f(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ für $a > 0$
Differentiation	$f'(t) \circ \bullet j\omega \cdot F(\omega)$ $f''(t) \circ \bullet -\omega^2 \cdot F(\omega)$ $f'''(t) \circ \bullet -j\omega^3 \cdot F(\omega)$ $\vdots$ $f^{(n)}(t) \circ \bullet (j\omega)^n \cdot F(\omega)$	$f'(t) \circ \bullet s \cdot F(s) - f(0+)$ $f''(t) \circ \bullet s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0+) - f'(0+)$ $f'''(t) \circ \bullet s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0+) - s \cdot f'(0+) - f''(0+)$ $\vdots$ $f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \dots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$
Integration		$\int_0^t f(u) du \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot F(s)$
Faltungsprodukt	$(f * g)(t) \circ \bullet F(\omega) \cdot G(\omega)$	$(f * g)(t) \circ \bullet F(s) \cdot G(s)$

Einige wichtige Korrespondenzpaare der Laplacetransformation

$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{s}$	$\sigma(t) \cdot \cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma(t) \cdot t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma(t) \cdot \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sigma(t) \cdot e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$	$\delta(t) \circ \bullet 1(s)$