Integraltransformationen

F.Dubacher

23. Februar 2021

1 Varianten der Integraltransformationen **1**

2 Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI) **1**
2.1 Systemantwort eines unbekannten LTI-Systems ("Black Box") bestimmen . . . 2
2.2 Systemantwort auf ein sinusförmiges Eingangssignal $f(\omega_0 t)$ über Frequenzgang berechnen . . . 2
2.3 Übertragungsfunktion eines bekannten Systems (z.B. Schaltung) bestimmen . . . 2

3 Fouriertransformation $\mathcal{F}$ **2**
3.1 Rechenregeln . . . 3
3.2 Weitere Eigenschaften . . . 3
3.3 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) . . . 3
3.4 Schnelle Fourier-Transformation (FFT) . . . 4

4 Laplacetransformation $\mathcal{L}$ **4**
4.1 Rechenregeln . . . 4
4.2 Tipps zur Rücktransformation . . . 4
4.3 Einige wichtige Korrespondenzpaare . . . 5
4.4 Veranschaulichung der Laplacetransformation . . . 5
4.5 Lösen von Differentialgleichungen . . . 5

5 Z-Transformation **6**

6 δ-Funktion ("Dirac-Stoss") **6**
6.1 Rechenregeln . . . 6

7 Faltungsprodukt (Convolution) **7**
7.1 Eigenschaften und Rechenregeln . . . 7
7.2 Vorgehen bei abschnittweise definierten Funktionen . . . 7

8 Ampltiduden- und Phasenspektrum einer (Trigo-)Funktion $f(t)$ bestimmen **7**

9 Diverses **8**

10 Notizen **9**
10.1 Herleitung des Vertauschungssatz der Fouriertransformation . . . 9

1 Varianten der Integraltransformationen

Signalart	diskret	kontinuierlich
periodisch	Diskrete Fourier-Trafo / Fourierreihe	Fourierreihe
impulsförmig	Fourierreihe (begrenztes Intervall)	Fourier-Transformation
kausal	Z-Transformation	Laplace-Transformation

Idee Integraltransformationen: Im Bildbereich lassen sich Systemantworten für LTI-Systeme berechnen, ohne eine DGL im Zeitbereich lösen (oder sogar kennen) zu müssen.

2 Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI)

Ein System, das sich sowohl linear wie auch zeitinvariant verhält, nennt man (englisch) "**l**inear **t**ime-**i**nvariant System" (LTI-System). Was das genau bedeutet, zeigen die folgenden mathematischen Bedingungen.

Allgemeine Begriffe und Rahmenbedingungen		
Eingangssignal	$f(t)$	
Systemantwort	$y(t)$	Ausgangssignal aus einem System im Zeitbereich; Eine reelle Schwingung am Eingang erzeugt **immer** eine reelle Schwingung am Ausgang
Linearität	$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{L}\{f_k(t)\}$	Linearkombination am Eingang bewirkt Linearkombination der Systemantworten am Ausgang
Zeitinvarianz	$\mathcal{L}\{f(t+t_0)\} = y(t+t_0)$	Die Antwort auf eine zeitlich verschobene Eingangsgrösse ist die gleichermassen zeitlich verschobene Ausgangsgrösse
Stabilität	Liegen die Pole der Übertragungsfunktion links der imaginären Achse, dann ist das System stabil (auch "passiv" genannt). Es ergibt sich dann nämlich ein dämpfender Exponentialfaktor ($e^{\mathrm{Re}(s)t}$). Mit Polen rechts der imaginären Achse ergibt sich ein verstärkender Exponentialfaktor ($e^{\mathrm{Re}(s)t}$).	

Systemfunktionen und Schaltungen		
Übertragungsfunktion $G(s)$	$G(s) = \dfrac{1}{p(\lambda = s)} = Y_\delta(s)$	Wirkung des LTI-Systems auf ein Eingangssignal (Bildbereich) ; $\hat{=}$ Impulsantwort ; $\hat{=}$ Kehrwert des Charakteristischen Polynoms der laplacetransformierten DGL des LTI-Systems
Gewichtsfunktion $g(t)$	$g(t) = y_\delta(t) = \dot{y}_\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \; G(s)$	Wirkung des LTI-Systems auf ein Eingangssignal (Zeitbereich)
Impulsantwort $Y_\delta(s)$	$Y_\delta(s) = G(s) \cdot 1(s) = G(s)$	Systemantwort auf einen Dirac-Stoss $\delta(t)$; $1(s) = \mathcal{L}[\delta(t)]$
Sprungantwort $Y_\sigma(s)$	$Y_\sigma(s) = G(s) \cdot \dfrac{1}{s} \Leftrightarrow G(s) = sY_\sigma(s) - \underbrace{Y_\sigma(0^+)}_{=0}$	Systemantwort auf die Einheitssprungfunktion $\sigma(t) = u(t)$; $\frac{1}{s} = \mathcal{L}[\sigma(t)]$
Serieschaltung von n LTI-Systemen	$Y(s) = \prod_{k=1}^{n} G_k(s) \cdot F(s)$	
Parallelschaltung von zwei LTI-Systemen	$Y(s) = [G_1(s) - G_2(s)]$	folgt aus Masons Regel (Signale und Systeme)
Rückkopplung mit G_2	$Y(s) = \dfrac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} \cdot F(s)$	siehe auch Masons Regel (Signale und Systeme) ; $\Delta = 1 - G_1(s)G_2(s) =$ Netzwerkdeterminante

Frequenzgang		
Beziehung zur Übertragungsfunktion	Der Frequenzgang beschreibt den stationären Teil der Übertragungsfunktion. Die Dämpfung der Laplace-Transformation wird auf Null gesetzt ($x = \sigma = 0$) und somit Übergangsvorgänge ignoriert (Laplaceintegral beinhaltet nur $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$ und somit keine dämpfenden Einschwingvorgänge).	
Frequenzgang $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$	$H(\omega) = G(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \dfrac{1}{p(\lambda = j\omega)}$	Beschreibt die Antwort eines Systems auf ein sinusförmiges Eingangssignal ; $\hat{=}$ stationärer Teil der Impulsantwort ; $\hat{=}$ Kehrwert des Char. Polynoms der fouriertransformierten DGL des LTI-Systems
Amplitudengang	$\lvert H(\omega)\rvert = \sqrt{\mathrm{Re}(H(\omega))^2 + \mathrm{Im}(H(\omega))^2}$	Amplitudenveränderung des Frequenzgangs
Phasengang	$arg[H(\omega)] = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & (z_1 \geq 0) \\ \arctan(\frac{z_2}{z_1}) + \pi & (z_1 < 0) \end{cases}$	Phasenveränderung des Frequenzgangs
"Komplex -ifizierung"	für sin und cos siehe Diverses und $1 = e^{j0t}$	
Komplexe harmonische Schwingung	$A \cdot e^{j\omega t} = A \cdot [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$	Eulerformel
Frequenzerhaltung	$y(t) = \mathcal{L}\{Ae^{j\omega t}\} = H(\omega) \cdot A \cdot e^{j\omega t}$	Die Systemantwort verändert die Amplitude und die Phase, aber belässt die Frequenz!

2.1 Systemantwort eines unbekannten LTI-Systems ("Black Box") bestimmen

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$: Eingangssignal ; $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)$: Systemantwort

1. Impulsantwort $y_\delta(t)$ ausmessen und daraus die Übertragungsfunktion bestimmen (numerische $\mathcal{L}$) $\rightarrow$ $y_\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$
2. **Systemantwort im Bildbereich:** $Y(s) = G(s) \cdot F(s)$
   Systemantwort im Zeitbereich: $y(t) = f(t) * g(t) = f(t) * y_\delta(t)$

2.2 Systemantwort auf ein sinusförmiges Eingangssignal $f(\omega_0 t)$ über Frequenzgang berechnen

1. $f(\omega_0 t)$ auf Linearform bringen und "Komplexifizieren"
2. $H(\omega_0)$ vereinfachen und auch $H(-\omega_0) = H^*(\omega_0)$ bestimmen
3. Jede komplexe harmonische Schwingung in der Linearkombination mit $H(\omega_0)$ / $H(-\omega_0)$ multiplizieren $(e^{-j\omega_0 t} \rightarrow H(-\omega_0))$
4. Umstellen, so dass wieder "Reellifiziert" werden kann (zurückgeformt in sin und cos); Dieser Term entspricht der Systemantwort!

2.3 Übertragungsfunktion eines bekannten Systems (z.B. Schaltung) bestimmen

1. Differentialgleichung aufstellen
   (Bauteilgleichungen aufstellen und dann über allgemeine Gesetze verknüpfen [Bsp: Elektrizität - Kirchhoff ; Mechanik - Federgleichungen])
2. DGL laplace-transformieren (siehe auch hier)
   Info Frequenzgang: Falls nur die stationäre Lösung interessiert, kann auch fourier-transformiert werden, dann erhält man **Frequenzfunktionen**, welche dann zum Frequenzgang führen.
3. Die Gleichung im Bildbereich nach dem Verhältnis der Bildfunktionen gewünschten Signale auflösen. $\rightarrow G(s) = \dfrac{\text{Zielsignal}(s)}{\text{Startsignal}(s)}$

3 Fouriertransformation $\mathcal{F}$

Ausgangslage mit Fourierreihe: Mit FR kann eine periodische Funktion als Summe von Schwingungen dargestellt werden. Für eine abschnittweise definierte Funktion kann der Definitionsabschnitt als Periode aufgefasst werden und der Gültigkeitsbereich der FR auf den Abschnitt begrenzt werden.

Ziel: (Fast) beliebige Nicht-periodische Funktion f mit Hilfe von komplexen Exponentialfunktionen $e^{j\omega t}$ (Schwingungen) darstellen.

Komplexe Fourierreihe → Fourier-Transformation	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot e^{-jk\omega_f t} dt \right]}_{c_k} e^{jk\omega_f t} \omega_f$ $T \rightarrow \infty$; $\omega_f \rightarrow d\omega$; $k\omega_f \rightarrow \omega$; $\sum \rightarrow \int$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$	$\frac{\omega_f}{2\pi} = \frac{1}{T}$ f zu transformierende Funktion f_T: periodische Variante von f Die Periode wird langgezogen, dadurch wird der Abstand zwischen den diskreten Frequenzen der Fourierreihe immer kleiner und beim Grenzübergang wird sie schliesslich kontinuierlich (eine Spektraldichte). $F(\omega)$, bzw. das Integral weicht genau dann deutlich von Null ab, wenn $\omega \rightarrow \omega_f$ ($k\omega_0 \rightarrow \omega_f$ bei Fourier-Reihe). Man kann sich dabei $f(t)$ als Zeiger vorstellen, der im Fall von $\omega \rightarrow \omega_f$ eine Figur in der komplexen Ebene zeichnet, deren Schwerpunkt von Null abweicht.
Fourier-transformierte / Spektraldichte-funktion	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	$F(\omega)$ gibt an, welche Frequenzen $f(t)$ wie stark beinhaltet. Entspricht ω einer grossen Frequenz in $f(t)$, dann wird der Wert des Integrals für diese Frequenz ω gross, weil sich dann der Schwerpunkt der Figur $f(t) \cdot e^{-j\omega t}$ weg vom Nullpunkt verschiebt (der Zeiger $f(t)$ ist verstärkt in nur einer Halbebene gross).
Rück-transformation (Zeitbereich)	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$	
Notation	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ oder $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t)$	Korrespondenz
Hinreichende Bedingung	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t) \rvert dt$ existiert	Ist $f(t)$ absolut integrierbar, existiert die Fouriertransformation
Amplitudendichte	$\lvert F(\omega) \rvert = \sqrt{Re[F(\omega)]^2 + Im[F(\omega)]^2}$	
Phasendichte	$arg[F(\omega)] = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & (z_1 \geq 0) \\ \arctan(\frac{z_2}{z_1}) + \pi & (z_1 < 0) \end{cases}$	

Zusammenhang Fouriertransformation und Fourierreihe	$F(k\omega_0) = 2\,T\,c_k \quad ; \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T}$ $c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cdot e^{-jk\omega_f t}dt \quad ; \quad FR[f(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(c_k \cdot e^{jk\omega_f t}\right)$	c_k: Komplexe Fourierkoeffizienten T: Periode vom Signal $k \in \mathbb{N}$

3.1 Rechenregeln

Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ $F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi \cdot f(-\omega)$	auch "Zeit-Frequenz-Symmetrie" genannt ; siehe auch Herleitung
Linearität	$\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha_1 \cdot F_1(\omega) + \alpha_2 \cdot F_2(\omega)$	mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Horizontale Verschiebung	$f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-jwt_0} \cdot F(\omega)$ $e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega - \omega_0)$	Modulationstheorem
Horizontale Streckung / Stauchung	$f(\alpha \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \cdot F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ $\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \cdot f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\alpha \cdot \omega)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Zeitumkehrung	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(-\omega)$	
Modulationssatz	$f(t)\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)\right]$ $f(t)\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2j}\left[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)\right]$	
Ableitung	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (j\omega)^n F(\omega)$ $t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$	
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) \cdot G(\omega)$	
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)F(\omega - \tau)d\tau$	

3.2 Weitere Eigenschaften

Zeitbereich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	**Frequenzbereich**
$f(t)$ gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ gerade
$f(t)$ reell und gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ reell und gerade
$f(t)$ imaginär und gerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ imaginär und gerade
$f(t)$ ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ ungerade
$f(t)$ reell und ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ imaginär und ungerade
$f(t)$ imaginär und ungerade	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ reell und ungerade
$f(t)$ (zeit)kontinuierlich	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ nicht periodisch
$f(t)$ (zeit)diskret	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ periodisch
$f(t)$ periodisch	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ (frequenz)diskret
$f(t)$ nicht periodisch	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$ (frequenz)kontinuierlich

3.3 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Problem	In der Praxis ist der kontinuierliche Verlauf eines Signals oft nicht bekannt, sondern nur diskrete Abtastwerte (von einer Periode) des Signals. Man will aber mit einer Funktion arbeiten!
Idee	Approximierte Fourierreihe berechnen mit approximierten Fourier-Koeffizienten

DFT	$\hat{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$	N: Anzahl Abtastwerte in einer Periode y_n: Abtastwerte des Signal $f(t)$ $k \in \mathbb{Z}$: Argument von $c_k(k)$

inverse DFT (iDFT)	$y_n = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{c}_k \cdot e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$	
Rück-transformation	$\hat{f}(t) = \sum_{k=-T/2}^{T/2} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$	Ergibt **kontinuierliche** Approximation von $f(t)$
Abstasttheorem und Alias-Effekt	Wird das Signal $f(t)$ mit einer Abtastfrequenz kleiner als **zweimal** die höchste Frequenz in $f(t)$ abgetastet, werden alle Koeffizienten der Frequenzen $(k+m\cdot N)\omega_0$ zusammengefasst (Alias-Effekt). Für bestimmte Frequenzen $k\omega_0$ werden dann nämlich auch die Werte von höheren Frequenzen mitgezählt, die sich sonst mit der Summe aufheben würden, wenn gemäss Abtasttheorem abgetastet würde. Ist das Abtasttheorem erfüllt, kann die Original-Funktion **eindeutig** rekonstruiert werden! **Lösung für Aliasproblem in der Praxis:** Signal tiefpassfiltern und mit mindestens der doppelten Grenzfrequenz des Tiefpassfilters das Signal abtasten (Abtasttheorem).	

3.4 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die Formel für die diskrete Fouriertransformation benötigt N^2 komplexe Multiplikationen. Das ist in der Praxis mit sehr grossen N nicht tragbar. Der FFT-Algorithmus optimiert die Berechnung ohne Verlust von Genauigkeit. Die Grundidee besteht darin, dass bei der direkten Berechnung viele Teilsummen mehrfach ausgewertet werden. Mit einer geschickten Organisation des Rechnungsablaufs lässt sich das vermeiden.
Stichwort: Iteratives Aufteilen in gerade und ungerade Koeffizienten und anschliessend deren Zusammenhang ausnutzen

4 Laplacetransformation $\mathcal{L}$

Ziel: Die Fouriertransformation funktioniert nur für Funktionen, wofür das Fourierintegral konvergiert. Das Ziel der Laplacetransformation ist die Erweiterung der Fouriertransformation, so dass beliebige kausale Funktionen in einen Bildbereich mit den vorteilhaften Rechenregeln der Fouriertransformation abgebildet werden können.

Idee: Die zu transformierende Funktion wird mit einer exponentiellen Dämpfung e^{-xt} multipliziert, so dass das Fourierintegral konvergiert.

Wieso muss die zu transformierende Funktion kausal sein? Weil eine Dämpfung mit e^{-xt} auf der positiven Seite eine Dämpfung ist, aber auf der negativen Seite eine Verstärkung und in der Praxis sind Funktionen erst ab einem bestimmten Zeitpunkt relevant, so dass man alles zuvor ignorieren (auf Null setzen) kann.

Kausale Funktion	Eine Funktion ist dann mathematisch kausal, wenn sie für alle negativen Argumente **Null** ist. Jede Funktion kann kausal gemacht werden, indem sie mit der Einheitssprungfunktion σ (Heaviside) multipliziert wird $\rightarrow f(t) \cdot \sigma(t) = f_k(t)$	$\sigma(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ 1 & ,t \geq 0 \end{cases}$
Laplace-transformation	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) = \int_0^\infty f_k(t) \cdot e^{-st} dt$	$f_k(t) = f(t) \cdot \sigma(t)$ $s = x + j\omega \quad \in \mathbb{C}$ x: Dämpfung ω: Kreisfrequenz
Rück-transformation	$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$	besser Tabellen benutzen
Notation	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ oder $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$	Korrespondenz
Übertragungsfunktion und Gewichtsfunktion eines LTI-Systems	$\rightarrow$ siehe LTI-Systeme	

4.1 Rechenregeln

Linearität	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a_1 \cdot F_1(s) + a_2 \cdot F_2(s)$	$a > 0$ ist vertikale Streckung/Stauch.
Verschiebung	$\sigma(t - t_0) \cdot f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0} \cdot F(s)$	für $t_0 > 0$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet F(s - a)$	
Streckung	$f(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	für $a > 0$ horizontale Streckung/Stauch.
Differentiation	$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \left(\sum_{i=2}^{n} s^{n-i} \cdot f^{(i-1)}(0^+)\right)$	für $n = 1$: $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(0^+)$
Integration	$\int_0^t f(u) du \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \cdot F(s)$	

4.2 Tipps zur Rücktransformation

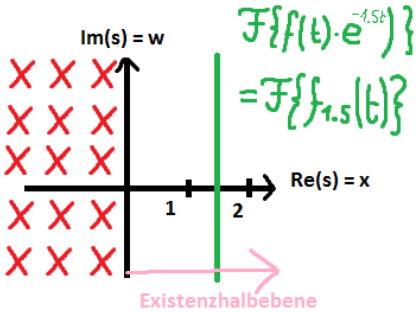
- mit Korrespondenztabelle arbeiten
- evt. Partialbruchzerlegung
- so hinschreiben, wie man es gerne hätte und dann kompensieren (mit Erweitern, Auseinandernehmen, etc.)

4.3 Einige wichtige Korrespondenzpaare

$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$1(s) = 1$
$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t) \cdot e^{at}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$
$\sigma(t) \cdot t^n$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sigma(t) \cdot \cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

4.4 Veranschaulichung der Laplacetransformation

- Für jede Dämpfung x gibt es eine vertikale Gerade, die eine Fouriertransformation darstellt.
- Die Existenzhalbebene* beginnt dort, wo x gerade noch eine Dämpfung ist.
  Bsp: Für $f(t) \cdot e^{-t}$ beginnt die Existenzhalbebene bei $x = -1$, weil $f(t) \cdot e^{-t} e^{-(x+j\omega)t} = f(t) \cdot e^{-[(x+1)+j\omega]t}$, somit ist die exponentielle Dämpfung vorhanden für $x > -1$.



* dort wo die Laplacetransformation existiert, bzw. das Laplaceintegral konvergiert

4.5 Lösen von Differentialgleichungen

4.5.1 Direkte Methode

Vorgehen

1. DGL mit Anfangsbedingungen und Erregung (=Störung) per Laplacetransformation in den Bildbereich übersetzen
2. Im Bildbereich nach der Korrespondierenden $Y(s)$ von $y(t)$ auflösen
3. Rücktransformieren

Spezialsituationen

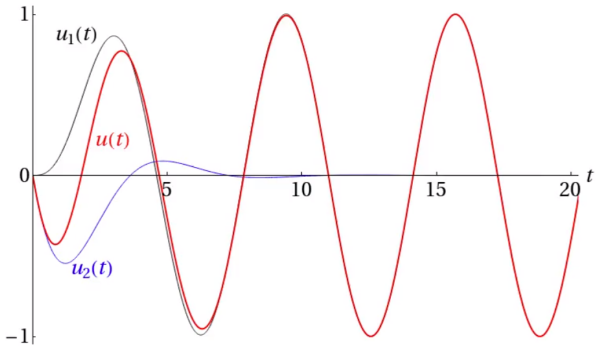
- **Es interessiert nur der stationäre Zustand des Systems (eingeschwungener Zustand)**
  $\Rightarrow$ Anfangsbedingungen können auf Null gesetzt werden: $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = ... = y^{(n)}(0) = 0$
- **Es interessiert nur die Reaktion des Systems auf die Anfangsauslenkung**
  $\Rightarrow$ Erregung (=Störung) auf Null setzen: $f(t) = 0$
- **Differentialgleichungssystem**
  1. Alle Gleichungen zeilenweise in den Bildbereich transformieren
  2. Algebraisches GLS im Bildbereich lösen
  3. Lösungsfunktion rücktransformieren

Beispiel $\boxed{\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = f(t)}$ mit $f(t) = \sigma(t)$ und $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 1$

1. **Transformation**
   $$[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{1}{s}$$
2. **Auflösen nach** $Y(s)$
   $$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}+1}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s[s^2+2s+5]} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2} = \underbrace{\left(\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}\right)}_{\text{NR}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$
   $$\boxed{\underline{\text{NR:}} \quad 1 = A(s^2+2s+5) + (Bs+C)s = (A+B)s^2 + (2A+C)\cdot s + A \cdot 5 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{r} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 5A=1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow A = \frac{1}{5} \ ; \ B = -\frac{1}{5} \ ; \ C = -\frac{2}{5}}$$
   $$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$
3. **Rücktransformation**
   $$y(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \cos(2t)e^{-t} + \frac{2}{5}\sin(2t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \underbrace{e^{-t}\left[2\sin(2t) - \cos(2t)\right]}_{\text{Einschwingvorgang}} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{stationär}}}$$

4.5.2 Indirekte Methode

1. Reaktion auf reine Fremderregung (Störfunktion) bestimmen (d.h. **Anfangsbedingungen auf Null setzen**): $\boxed{u_1(t)}$
2. Reaktion auf Anfangsauslenkung bestimmen (d.h. **Störfunktion auf Null setzen**): $\boxed{u_2(t)}$
3. Die beiden **Resultate überlagern**: $\boxed{u(t) = u_1(t) + u_2(t)}$



5 Z-Transformation

Ziel: Von einer kausalen Funktion $f(t)$ seien nur diskrete Abtastwerte $f_k(k \cdot T)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ gegeben. Um trotzdem die Vorteile der Laplace-Transformation nutzen zu können, wurde die Z-Transformation eingeführt.

Darstellung der Abtastung

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(t - kT) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kTs} \cdot 1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (\underbrace{e^{Ts}}_{z \in \mathbb{C}})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = F_z(z)$$

$\tilde{f}(t)$: auf $f(t)$ basierende Impulsfolge

Wissenswertes zur Z-Transformierten F_z

- $F_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
- $F_z = F_z(z)$ ist nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert. Es gibt einen Konvergenzbereich in der komplexen Zahlenebene.
- Die Korrespondenz $f_k \circ\!\!-\!\!\bullet F_z$ ist eindeutig, aber der Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $f_k(t)$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig (siehe dazu Alias-Effekt)!

Beispiele siehe Vorlesungsmitschrift von M.Bichsel

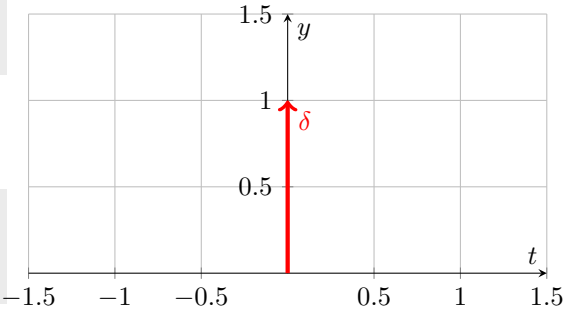
6 δ-Funktion ("Dirac-Stoss")

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

Achtung : Definition kann unterschiedlich sein! Besser nur auf nachfolgende Eigenschaften achten.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

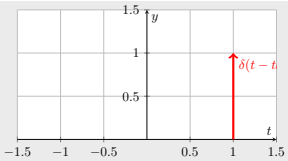
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot g(t) dt = g(0)$$



6.1 Rechenregeln

Horizontale Verschiebung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0)$$



Horizontale Streckung / Stauchung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t) g(t) dt = \frac{1}{|\alpha|} \cdot g(0)$$

Multiplikation mit Funktion

$$g(t) \cdot \delta(t - t_0) = g(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Linearkombination

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(t - t_k) g(t) dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g(t_k)$$

"Abtasten von g an bestimmten Stellen t_k"

Ableitung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t) \cdot g(t) dt \overset{\text{part. Int.}}{=} -\dot{g}(t)$$

δ-Funktion und Einheitssprungfunktion (σ)

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

Fourier-Transformierte

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \Delta(\omega) = 1(\omega) = 1$$

$$\delta(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j\omega t_0} \cdot 1(\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \circ\!\!-\!\!\bullet \pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi\big(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

7 Faltungsprodukt (Convolution)

Definition	$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u) du$
Idee für Signale	1. Die Antwort eines LTI-Systems auf einen Dirac-Impuls ist $h(t)$. Das nennt man die **Impulsantwort**. 2. Nun kann man das Eingangssignal $f(t)$ als unendlich dichte Folge von Dirac-Impulsen betrachten, von denen man die Reaktion $h(t)$ kennt. 3. Jetzt wird $h(t)$ an der vertikalen Achse gespiegelt und durch $f(t)$ durchgeschoben. Die Antwort des Systems darauf wird aufaddiert (integriert). 4. Das Resultat $y(t)$ nennt man **Faltungsprodukt**. Es stellt genau das Ausgangssignal des LTI-Systems für das Eingangssignal $f(t)$ dar.

7.1 Eigenschaften und Rechenregeln

Kommutativität	$f * g = g * f$
Assoziativität	$f * (g * h) = (f * g) * h$
Distributivität	$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
Stetigkeit	$f * g$ ist immer stetig, auch wenn f und/oder g nicht stetig sind
Dirac-Stoss (δ)	$\delta * f = f * \delta = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \delta(t-u) du = f(t)$ • δ ist genau dann 1, wenn $u = t$, sonst 0 • δ ist neutrales Element vom Faltungsprodukt
Einheitssprung σ	$f * \sigma = \int_0^t f(u) \cdot \sigma(t-u) du \;=\; \left[F(u)\right]_0^t \cdot \sigma(t)$
Faltungssatz	$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega) \cdot G(\omega)$ $f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$

7.2 Vorgehen bei abschnittweise definierten Funktionen

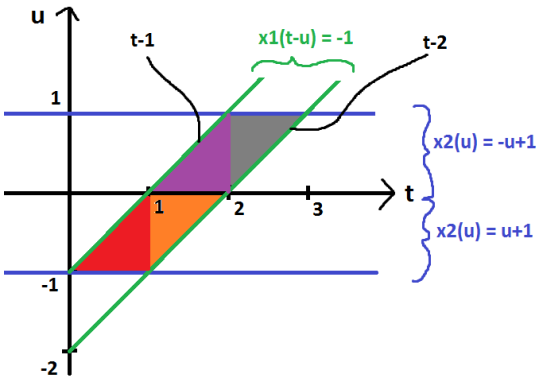
Beispiel $x_1(t) = \begin{cases} -1 & , 1 < t < 2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ und $x_2(t) = \begin{cases} 1+t & , -1 < t \leq 0 \\ 1-t & , 0 < t < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$; Gesucht: $x_1 * x_2$

1. Operanden so vertauschen, dass die Funktion mit den komplizierteren Grenzen zuerst kommt
   $x_2 * x_1$
2. Grenzen bezüglich der Integrationsvariable 'u' von beiden Funktionen bestimmen

   $\boxed{x_2:}$ $\mathbf{-1 < u \leq 0}$: $x_2(u) = u + 1$
   $\mathbf{0 < u < 1}$: $x_2(u) = -u + 1$

   $\boxed{x_1:}$ $1 < t - u < 2$
   $1 - t < -u < 2 - t$
   $\mathbf{t - 2 < u < t - 1}$: $x_1(t-u) = -1$
3. Grenzen in Diagramm einzeichnen, um Integrationsbereiche zu visualisieren. Das Diagramm zeigt die Integrationsgrenzen über u in Abhängigkeit von t, wo das Faltungsintegral nicht Null ergibt.
4. Separate Bereiche integrieren ; das Resultat ist eine abschnittsweise definierte Funktion!

$$t < 0: \quad x_2 * x_1(t) = 0$$
$$0 \leq t < 1: \quad x_2 * x_1(t) = \int_{-1}^{t-1} (u+1) \cdot (-1) du = \ldots$$
$$1 \leq t < 2: \quad x_2 * x_1(t) = \int_{t-2}^{0} (u+1) \cdot (-1) du + \int_{0}^{t-1} (-u+1) \cdot (-1) du = \ldots$$
$$2 \leq t < 3: \quad x_2 * x_1(t) = \int_{t-2}^{1} (-u+1) \cdot (-1) du = \ldots$$
$$3 \leq t: \quad x_2 * x_1(t) = 0$$



8 Ampltiduden- und Phasenspektrum einer (Trigo-)Funktion $f(t)$ bestimmen

Besteht eine Funktion nur aus trigonometrischen Funktionen, kann mit der folgenden Methode das Spektrum bestimmt werden (ohne Integration).

1. "Komplexifizieren"
2. Jedes ω_i in den Termen $e^{j\omega_i}$ ist eine Frequenz. Die Beträge der Vorfaktoren von $e^{j\omega_i}$ sind die Amplituden
3. Die Phasenverschiebungen sind die Imaginärteile der Vorfaktoren

9 Diverses

Kreisbewegungen $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Komplexe Trigo $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$; $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$; $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

Trigo $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$; $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$; $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$

Logarithmus

Allgemein $y = \log_b(x) \Leftrightarrow b^y = x$

Basiswechsel $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

$\log(x^m) = m \cdot \log(x)$

Zerlegungen

Partialbruchzerlegung

1. Term auf Form **Polynom + echt gebrochenes Polynom** $(P(x) + R(x))$ bringen (Polynomdivision)
2. Der Nenner von $R(x)$ kann geschrieben werden als $N_R(x) = (x - x_1)^{r_1} + (x - x_2)^{r_2} + \ldots + (x - x_n)^{r_n}$
3. Für jede r_i-fache reelle Nullstelle x_i enthält der Ansatz r_i Summanden $\frac{A_1}{x - x_i} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_i)}$

   Für komplexe Nullstellen z.B.: $\frac{Ax + B}{x^2 + 1}$
4. **Originalterm = Ansatz** $\Rightarrow$ Brüche weg multiplizieren $\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich um die A_k zu ermitteln

- Weitere Ansätze...

$\frac{Z}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ $\quad \frac{Z}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$ $\quad \frac{Z}{x[x^2+2x+5]} = \frac{A}{x}\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

$\frac{Z}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ $\quad \frac{Z}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)}$

Polynomdivision

Beispiel (komplexes Polynom)

$$
\begin{array}{llllllllll}
z^3 & +jz^2 & +0z & +2j & : & (z & -j) & = & \boldsymbol{z^2} & \boldsymbol{+2jz} \quad \boldsymbol{-2} \\
z^3 & -jz^2 & & & & & & & & \\
 & 2jz^2 & +0z & & & & & & & \\
 & 2jz^2 & +2z & & & & & & & \\
 & & -2z & +2j & & & & & & \\
 & & -2z & +2j & & & & & & \\
 & & & \underline{0} & & & & & &
\end{array}
$$

Polynomdivison vermeiden:
Zählersumme auseinandernehmen und den Teil der gleich dem Mehrfachen vom Nenner ist, in separatem Bruch schreiben und kürzen

Integralrechnung

Grenzen $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\quad \int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$

Summen $\int (a + b - c)dx = \int adx + \int bdx - \int cdx$

Linearität $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) + C$

Allgemeine Potenzregel $\int (f(x))^\alpha \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot (f(x))^{\alpha+1} + C$ $\quad \alpha \neq -1$

Logarithmische Integration $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (f(x))^{-1} \cdot f'(x)dx = \ln|f(x)| + C$ $\quad f(x) \neq 1$

Partielle Integration $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$

$v(x)$: einfachste Funktion wählen!

Trigo•Exp→ 2× part. Int. und GL nach Int. umstellen

Allgemeine Substitution (Mitsubstituieren der Grenzen) $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

$t = g^{-1}(x)$

$x = g(t)$

$dx = g'(t) \cdot dt$

Differentiation $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ $\quad \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = \frac{dF(x)}{dx} - \frac{dF(c)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Differentialrechnung

Ableitungsregeln

Summenregel $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Potenzregel $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}u'$

Produktregel $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel $\Big[u\big(v(x)\big)\Big]' = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

Einige Ableitungen

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\arcsin(x)$	$1/(\sqrt{1-x^2})$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\arcsin(x)$	$-1/(\sqrt{1-x^2})$
$\ln(x)$	$1/x$					$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$

10 Notizen

10.1 Herleitung des Vertauschungssatz der Fouriertransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \qquad f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad t \to -\omega \quad ; \quad \omega \to t \qquad \text{Vertauschen}$$

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad \text{Multiplizieren mit } 2\pi$$

$$2\pi f(-\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-j\omega t} dt}_{\text{Formel FT}} \qquad F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi f(-\omega)$$