Definitionsbereich

Kritische Terme: Wurzeln, Brüche, Winkelfunktionen

Notation: $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\neq 0\}$ „∧" → und, „∨" → oder

Bsp.: $f(x,y)=y^4\cdot e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}$

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1} \Rightarrow D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 0\}$

$f(x,y)=\sqrt{(x^2-1)(9-y^2)} \Rightarrow D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|>1, |y|<3 \vee |x|<1, |y|>3\}$

$f(x,y)=\arcsin(y-x) \Rightarrow D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq y-x\leq 1\}$

Wertebereich

- Auflösen der Funktion $f(x,y)=c$
  1. Auflösen der Funktion nach x und y
  2. Problemstellen betrachten

Bsp: $f(x,y)=y^4\cdot e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow y^4>0$ und $e^{\frac{x}{y}}>0 \Rightarrow W(f)=]0,\infty[$ (Ohne 0)

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1} \Rightarrow$ Wurzel nur + $\Rightarrow W(f)=[0,\infty[$ (Mit 0)

$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \Rightarrow$ Wurzel nur + aber unter Bruchstrich:

$W(f)=[\frac{1}{4},\infty[$

$f(x,y)=\arcsin(y-x) \Rightarrow \arcsin$ liefert immer Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$

$W(f)=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$f(x,y)=\arccos(y-x) \Rightarrow \arccos$ liefert immer Werte zwischen 0 und π

$W(f)=[0,\pi]$

- Substitution der Variabeln durch Polarkoordinaten:
  1. Substitution: $x=\boxed{r\cdot\cos(\varphi)}$, $\boxed{y=r\cdot\sin(\varphi)}$, $\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$, $\boxed{r^2=x^2+y^2}$
  2. Umformen dass nur 1 Winkelfunktion vorhanden:

Bsp: $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{r\cdot\cos(\varphi)\cdot r\cdot\sin(\varphi)}{r^2}=\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)=\frac{1}{2}\underbrace{\sin^2(\varphi)}_{-1\,\dots\,1}$

$\Rightarrow W(f)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

Niveaulinien:

- ist die Funktion in x-Richtung und/oder y-Richtung periodisch?

Bsp: periodisch in x-Richtung: $\cos(x)+y^2$ | y-Richtung: $\cos(y)+x^2$

y- und x-Richtung: $\cos(x)\cdot\cos(y)$ | $x^2+y^2\cdot e^{-x^2-y^2}$

- ist die Funktion Symmetrisch?

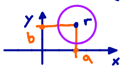
Bsp.: Symmetrisch zur X-Achse: $f(x,y)=f(x,-y)$: $x\cdot y^2$

Symmetrisch zur Y-Achse: $f(x,y)=f(-x,y)$: $x^2\cdot y$

Symmetrisch zur Winkelhalbierenden: $f(x,y)=f(-x,-y)$: $x^2\cdot y^2$

- Kreisgleichung: $r^2=x^2+y^2$ (Kreis mit MP am Ursprung und Radius r)

$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$

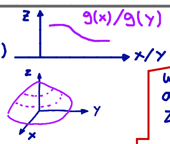


(Quadratisch Ergänzen)

Rotationsflächen

- gegeben: $z=g(x)$ oder $z=g(y)$
- gesucht: $f(x,y)$ rotiert um z

$\Rightarrow f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$



Bsp.: $f(x)=\sin(x) \Rightarrow f(x,y)=\sin(\sqrt{x^2+y^2})$

$f(x)=\frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$

Stetig:

Eine Funktion ist Stetig wenn man ohne den Stift abzuheben, deren Graph zeichnen kann.

Differenzierbar:

Eine Funktion ist differenzierbar wenn sie stetig ist und keine Knicke aufweist

Probleme: Betrag, Wurzeln, Stückweise Funktionen

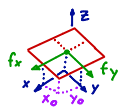
Partielle Ableitungen

$f(x,y)$: $\frac{df}{dx}=f_x$; $\frac{df}{dy}=f_y$ Bsp.: $f(x,y)=x^9+2y^2 \Rightarrow f_x=9x^8$; $f_y=4y$

$f(x,y)=2x^3\cdot\sin(2y) \Rightarrow f_x=6x^2\cdot\sin(2y)$; $f_y=2x^3\cdot 2\cos(2y)=4\cdot x^3\cos(2y)$

Partielle Ableitungen an der Stelle (a,b):

- Zuerst f_x und f_y ausrechnen, anschliessend Punkt (a,b) einsetzen. Resultat sollte eine Zahl geben!



Partielle Ableitungen Geometrisch:

$f_x(x_0,y_0)$: Steigung der Tangente am Flächenpunkt (x_0,y_0) in x-Richtung

$f_y(x_0,y_0)$: Steigung der Tangente am Flächenpunkt (x_0,y_0) in y-Richtung

$f_x=0$: Tangente ist horizontal ; $f_y=0$: Tangente ist vertikal

$f_x<0$: Fläche in x-Richtung abfallend; $f_x>0$: Fläche in x-Richtung steigend

$f_y<0$: Fläche in y-Richtung abfallend; $f_y>0$: Fläche in y-Richtung steigend

Näherungswert um Funktionswert

- 1. Tangentialebene in benachbarten Punkt bilden
  2. Näherungspunkte einsetzen:

Bsp.: $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot e^{-x}$; TE: $z=-x+2y-1$

Näherungswert: $(0{,}2|0{,}9)$: $z=-0{,}2+2\cdot 0.9-1=0.6 \Rightarrow$ Richtungswert $=0.696$

Tangentialebene parallel zur xy-Ebene

TE parallel zur xy-Ebene $\Rightarrow f_x=0$; $f_y=0$

Normalenvektor

Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene

$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\f_x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\f_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}$

Bsp.: Sattelfläche $z=f(x,y)=x\cdot y$ wird aus Richtung $\vec{s}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ bestrahlt. Schattengrenze auf Fläche: ? Normalenvektor steht senkrecht auf $\vec{s} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{s}=0$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}-y\\-x\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}\cdot\vec{s}=\begin{pmatrix}-y\\-x\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=y-x-3=0 \Leftrightarrow y=x+3$

Parameterdarstellung: $\begin{pmatrix}x\\x+3\\x(x+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y=x+3\\z=y\cdot x\end{pmatrix}$

Gradient

grad $f=(f_x,f_y)$ → grösste Steigung ; $-\text{grad}\,f=(-f_x,-f_y)$ → grösstes Gefälle

- der Gradient ist ein 2-dimensionaler Vektor in der xy-Ebene!
- der Gradient steht immer senkrecht auf der Tangente der Niveaulinie.

Bsp.: $f(x,y)=2+x^2+\frac{y^2}{4}$, $(x_0,y_0)=(1,2)$; grad $f=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))=(2,1)$

- Die Länge des Gradienten gibt die Steigung/das Gefälle an!

$|\text{grad}\,f|=\sqrt{x_{Koord}^2+y_{Koord}^2}$

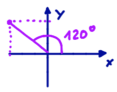
Bsp.: grad $f=(2,1) \Rightarrow |\text{grad}\,f|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

Richtungsableitungen / Einheitsvektor

Die Richtungsableitung ist die Ableitung einer Funktion in einer bestimmten Richtung!

Die Richtung muss normiert (Länge 1) mit dem Gradienten skalar verrechnet werden

Ist die Richtung mit einem Winkel gegeben, folgt: $\vec{r}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\\sin(\varphi)\end{pmatrix}$



	0	$\frac{\pi}{12}=15°$	$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{5\pi}{12}=75°$	$\frac{\pi}{2}=90°$
sin	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	1
cos	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\cdot 2}$	0

Bsp.: $f(x,y)=2+x^2+\frac{y^2}{4}$, $(x_0,y_0)=(1,2)$; grad $f=(2,1)$, Richtung $\vec{r}=(1,2)$

$\Rightarrow f_{\vec{r}}=\underbrace{\text{grad}\,f(x_0,y_0)\bullet\vec{r}}_{\text{Skalarprodukt}}$ (mit Länge 1) $=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(-4,3)$, Richtung $\vec{r}=120°$; grad $f=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

$\Rightarrow f_{\vec{r}}=\underbrace{\text{grad}(x_0,y_0)\bullet\begin{pmatrix}\cos(120°)\\\sin(120°)\end{pmatrix}}_{\text{Skalarprodukt}}=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})\bullet(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{5}+\frac{3\sqrt{3}}{10}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

Richtungsvektor der Richtungsableitung

Ein Richtungsvektor hat immer die gleiche x- und y-Richtung wie bei der Richtungsableitung und als z-wert das Ergebnis der Richtungsableitung.

Bsp.: $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy$; Richtung $\vec{r}(3,1)$ an der Stelle (1,2); grad $f=(3,1)$

$f_{\vec{r}}=3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$; Richtungsvektor: $\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{1}{\sqrt{10}}\\\sqrt{10}\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}3\\1\\10\end{pmatrix}$

Totales Differential:

Das Differential der Funktion f an der Stelle (x_0,y_0) liefert für kleine Änderungen Δx und Δy eine gute Näherung für die tatsächliche Änderung des Funktionswertes

$\Delta f=f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0)\approx df(x_0,y_0,dx,dy)=f_x(x_0,y_0)\cdot dx+f_y(x_0,y_0)\cdot dy$

Bsp.: Näherungswert von $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ bei $f(2{,}03|-1.98)$

$f_x(x_0,y_0)\cdot dx=f_x(2,-2)\cdot 0.03=4\cdot 0.03=0{,}12$

$f_x(x_0,y_0)\cdot dx=f_y(2,-2)\cdot 0.02=4\cdot 0.02=0.08$

$f_x(x_0,y_0)=f(2,-2)=1$ $\Delta f_0=1+0.12+0.08=\underline{1.2}$

Kettenregel:

Verkettete Funktionen müssen von aussen nach innen abgeleitet werden!

Bsp.: $g(t)=f(x(t),y(t))$ ges.: Ableitung nach t

$g'(t)=f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$

Impliziertes Differenzieren:

Beim Ableiten einer implizierten Gleichung $F(x,y)=0$ in den Variabeln x und y noch x erhält man $y'(x)$ mit der algemeinen Kettenregel in der Form:

$y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$

Bsp.: Berechne Tangentensteigung der Ellipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, im Punkt (6,4):

$F(x,y)=\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}-1$;

$F_x(x,y)=\frac{x}{50}=\frac{6}{50}$;

$F_y(x,y)=\frac{2y}{25}=\frac{8}{25}$

$y'(6)=-\frac{\frac{3}{25}}{\frac{8}{25}}=-\frac{3}{25}\cdot\frac{25}{8}=\underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$

Höhere partielle Ableitungen

Die partielle Ableitung der partiellen Ableitung bezeichnet man als zweite partielle Ableitung. Durch widerholtes Differenzieren erhält man sogenannte partielle Ableitungen höherer Ordnung. Wird nach x und nach y differenziert, heisst diese Ableitung auch gemischte Partielle Ableitung.

Bsp.: $f(x,y) = x^2+y^2$; $f_x = 2x$; $f_y = 2y$; $f_{xx} = 2$; $f_{yy} = 2$; $f_{xy} = 0$

Satz von Schwarz

Gemischte Ableitungen höherer Ordnung einer Funktion $f(x,y)$ sind um der Reihenfolge der Differenziationsvariabeln unabhängig, falls sie Stetig sind.

$$f_{xy} = f_{yx} \quad ; \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

Bsp.: $f(x,y) = x^6 \cdot \sin(y) \cdot e^{y^2} \cdot \cos(y) + \sin\left(x^{e^x+1} \cdot \sin(x)\right)$

ges.: $f_{xxxxyxxxx} = f_{yxxxxxxxx}$

da $f_y(x,y)$ etwas mit $x^6 \ldots$ ist und anschliessend 8 mal nach x abgeleitet wird, folgt $\Longrightarrow f_{xxxxyxxxx} = 0$ $\boxed{f_x = f_y \Rightarrow f_{xx} = f_{yy}}$

Hesse - Matrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix};$$

Determinante:

$$D(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

Extremwerte:

Notwendige Bedingungen für einen Extremwert:

$f_x(x_0,y_0) = 0$

$f_y(x_0,y_0) = 0$

$f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0 \Longrightarrow \operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0)$

Hinreichende Bedingungen für einen Extremwert:

- $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0)$
- $D(x_0,y_0) > 0$

lokales Minimum wenn: $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$

lokales Maximum wenn: $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$

Sattelpunkt:

- $D(x_0,y_0) < 0 \longrightarrow$ Sattelpunkt!

$D = 0$! :

Ist die Determinante 0 so muss von Hand untersucht werden, ob es sich um ein lokales Minimum, Maximum, Sattelpunkt oder entrakter Punkt handelt.

Wichtig ist Den Randbereich zu Untersuchen!

Extremwerte Mit Nebenbedingungen: (Lagrange)

Mit 1 Nebenbedingung: (λ weder positiv noch negativ)

An Extremwerten ist der grad f kollinear zum grad g. Das bedeutet $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$

Wir bilden die neue Funktion: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot (g(x,y) - c)$

$\Rightarrow$ Gleichungssystem Nullsetzen und lösen: $\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g(x,y) = c \end{array} \right|$$

Bsp.: $f(x,y) = xy$, Nebenbedingung: $g(x,y) = x^2+y^2-1$

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda \cdot (x^2+y^2-1)$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \right| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = y \end{array} \right| \Rightarrow 4 \text{ Extremalstellen: } \overset{①}{\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \overset{②}{\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \overset{③}{\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \overset{④}{\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Einsetzen in f: ① $= \frac{1}{2}$, ② $= -\frac{1}{2}$, ③ $= -\frac{1}{2}$, ④ $= \frac{1}{2}$

Mit 2 Nebenbedingungen:

Die Lagrangefunktion für $f(x,y,z)$ und $NB1 = g(x,y,z) = c \mid NB2 = h(x,y,z) = d$ lautet: $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - c) - \mu(h(x,y,z) - d)$

$\Rightarrow$ Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} f_x = \lambda \cdot g_x + \mu \cdot h_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y + \mu \cdot h_y \\ f_z = \lambda \cdot g_z + \mu \cdot h_z \\ g(x,y,z) = c \\ h(x,y,z) = d \end{array} \right|$$

Vorgehen:

- Analog zu oben mit einer Nebenbedingung
- Gs lösen, Punkte einsetzen in $f(x,y,z) \Rightarrow$ gibt einen Wert
- → ist Wert Positiv $\Rightarrow$ Steigung Positiv = Punkt ist Minimum
- → ist Wert Negativ $\Rightarrow$ Steigung Negativ = Punkt ist Maximum
- Parameter (λ, μ) eliminieren

Ausgleichsrechnung:

Bei der Methode der kleinsten Fehlerquadrate minimiert man die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den Messwerten y_k und den Funktionswerte an den Messtellen $f(x_k)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$d = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2 \longrightarrow \min$$

Vandermondesche Matrix (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

Die Vandermondesche Matrix zu gegebenen werten $x_1, \ldots, x_n$ und zu gegebenem Grad m besteht aus Potenzen dieser Werte.

Anzahl c-Werte = Az spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}$$

Um die Methode der kleinsten Fehlerquadrate anwenden zu können bestimmt man die Matrix A und die beiden Vektoren c und y

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ausführlicher Weg:

Mit den drei Operanden kann das GLS hergeleitet werden

$$A^T \cdot A = A^T \cdot y; \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = A^T \cdot A; \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A^T \cdot y$$

$$GLS: A^T \cdot A \cdot c = A^T \cdot y$$

Schneller Weg über Bschiss-Tabelle:

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k \cdot y_k$	x_k^3	$x_k^2 \cdot y_k$	$\cdots$
1	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 \cdot y_1$	x_1^3	$x_1^2 \cdot y_1$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
1	x_n	y_n	x_n^2	$x_n \cdot y_n$	x_n^3	$x_n^2 \cdot y_n$	$\cdots$
Σ n	Σx_k	Σy_k	Σx_k^2	$\Sigma x_k \cdot y_k$	Σx_k^3	$\Sigma x_k^2 \cdot y_k$	$\cdots$

$A^T \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \cdots \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \cdots \\ \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \Sigma x_k^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$A^T \cdot y$:

$$\begin{pmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k \cdot y_k \\ \Sigma x_k^2 \cdot y_k \end{pmatrix}$$

Bsp.: Messpunkte: $(0,-1), (1,2), (2,4), (3,6), (4,9)$

Ansatz gegeben: $\boxed{y = f(x) = c_1 x + c_0}$ Gerade

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Tabelle:

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k \cdot y_k$
1	0	-1	0	0
1	1	2	1	2
1	2	4	4	8
1	3	6	9	18
1	4	9	16	36
5	10	20	30	64

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \quad A^T y = \begin{pmatrix} 20 \\ 64 \end{pmatrix} \overset{GLS}{\Longrightarrow} A^T A \cdot c = A^T \cdot y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 64 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5c_0 + 10c_1 = 20 \\ 10c_0 + 30c_1 = 64 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow$ Ausrechnen und c-werte in $f(x)$

Bsp.: Messpunkte: $(-2,3), (-1,0), (0,0), (1,1), (2,2)$

Ansatz gegeben: $\boxed{y = f(x) = c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0}$ Parabel 2. Grades

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k \cdot y_k$	x_k^3	$x_k^2 \cdot y_k$	x_k^4
1	-2	3	4	-6	-8	12	16
1	-1	0	1	0	-1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	4	4	8	8	16
5	0	6	10	-1	0	21	34

$$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \quad A^T y = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\overset{GLS}{\Longrightarrow} A^T A \cdot c = A^T \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5c_0 + 10c_2 = 6 \\ 10c_1 = -1 \\ 10c_0 + 34c_2 = 21 \end{array} \right|$$

Ausrechnen und c-werte in $f(x)$

Ausgleichsrechnung ohne Matrizen

1. Def Modellfunktion: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = a \cdot e^{bx}$
2. Berechnen der Fehlerfunktion $S(a,b)$

   $S(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (a \cdot x_k + b - y_k)^2$
3. Minimieren der Fehlerfunktion $s(a,b)$

   $S_a = 0$; $S_b = 0$
4. Berechnen der Parameter a und b (lösen der GLS)
5. evtl überprüfen der Fehlerfunktion $s(a,b)$

   $S_{aa} > 0$; $S_{aa} \cdot S_{bb} - S_{ab}^2 > 0$

Bsp.: Ein Massepunkt bewegt sich mit gleichförmiger Geschw. von Beobachter weg. Der Beob. misst am Anfang einen Abstand von 100m, nach 5s $\Rightarrow$ 250m und nach 10 sek 350m. Schätzen sie den Anfangsabstand s_0 und die geschw. V.

$s(t) = s_0 + v \cdot t \rightarrow$ unbekannt sind s_0 und $v \Rightarrow S(s_0, v)$

$S(s_0,v) = (s_0 + v \cdot 0 - 100)^2 + (s_0 + v \cdot 5 - 250)^2 + (s_0 + v \cdot 10 - 350)^2 = 0$

$S_{s_0} = 2(s_0 - 100) + 2s_0 + 5v - 250 + 2(s_0 + 10v - 350) = 0$

$S_v = 10(s_0 + 5v - 250) + 20(50 + 10v - 350) = 0$

Tangentialebene

Eine Ebene durch Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ mit Steigungen $f_x(x_0,y_0)$ und $f_y(x_0,y_0)$ heisst Tangentialebene.

Koordinatengleichung:

TE: $z = g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$

Parametergleichung:

$$E: \vec{x}(s,t) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektoren}}$$

Bsp.: $f(x,y) = x^2 + y^2$, Stelle $(0,1)$: $1 + 0 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1) = -1 + 2y$

$\Longrightarrow \underline{\underline{2y - z - 1 = 0}}$

Lineare und nicht Lineare Ausgleichsrechnung

Die methode der kleinsten Quadrate kann genau gleich eingesetzt werden. Einzig muss das x entsprechend dem Ansatz verrechnet werden!

Exponentiell

Bsp.: Messpunkte: $(0,-3), (1,6), (2,7)$ mit $\boxed{y=f(x,y)=c_1+c_2\cdot 3^x}$

	3^{x_n}	y_k	$(3^{x_n})^2$	$3^{x_n}\cdot y_k$
1	1	-3	1	-3
1	3	6	9	18
1	9	7	81	63
3	13	10	91	78

$A^T\cdot A = \begin{pmatrix}3 & 13\\ 13 & 91\end{pmatrix}$

$A^T\cdot y = \begin{pmatrix}10\\ 78\end{pmatrix}$

mit $A^T\cdot A\cdot c = A^T\cdot y : \begin{pmatrix}3 & 13\\ 13 & 91\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ 78\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 3\cdot c_1 + 13\cdot c_2 = 10\\ 13\cdot c_1 + 91\cdot c_2 = 78\end{array}\right|$

Winkelfunktion

Bsp: Messpunkte: $(-\pi,0), (-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}), (0,1), (\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}), (\pi,0)$, $\boxed{y=f(x,y)=c_1+c_2\cdot\cos(x)}$

	$\cos(x_k)$	y_k	$(\cos(x_k))^2$	$\cos(x_k)\cdot y_k$
1	-1	0	1	0
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	1	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	-1	0	1	0
5	-1	2	3	1

$A^T\cdot A = \begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$A^T\cdot y = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

mit $A^T\cdot A\cdot c = A^T\cdot y : \begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 5\cdot c_1 - 1\cdot c_2 = 2\\ -1\cdot c_1 + 3\cdot c_2 = 1\end{array}\right|$

Ausrechnen und c-werte in $f(x)$

Nicht lineare Ausgleichsrechnung

logarithmen

Bsp.: Messpunkte: $(0,1), (1,2), (3,4)$ mit $\boxed{y=f(x,y)=c_1\cdot e^{c_2\cdot x}}$

=> logarithmen: $\ln(y) = \ln(c_1) + c_2\cdot x = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\cdot x$

	x_k	$\ln(y_k)$	x_k^2	$x_k\cdot\ln(y_k)$
1	0	0	0	0
1	1	$\ln(2)$	1	$\ln(2)$
1	3	$\ln(4)=2\ln(2)$	9	$6\cdot\ln(2)$
3	4	$3\cdot\ln(2)$	10	$7\cdot\ln(2)$

$A^T\cdot A = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}$

$A^T\cdot y = \begin{pmatrix}3\ln(2)\\ 7\ln(2)\end{pmatrix}$

mit $A^T\cdot A\cdot c = A^T\cdot y : \begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\ln(2)\\ 7\ln(2)\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 3\cdot\tilde{c}_1 + 4\cdot\tilde{c}_2 = 3\ln(2)\\ 4\cdot\tilde{c}_1 + 10\cdot\tilde{c}_2 = 7\ln(2)\end{array}\right|$

Ausrechnen und c-werte in $f(x)$

Vektorwertige Funktionen

Unter einer vektorwertigen Funktion f mit zwei Variabeln versteht man eine Abbildung, die jedem Zahlenpaar (x,y) genau einen Vektor $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ Zuordnet: $(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix} = f(x,y)$

Eine vektorwertige Funktion f hat an der Stelle (x_0,y_0) eine Nullstelle, falls beide Komponenten dort eine Nullstelle haben.

Jacobi-Matrix:

Unter der Ableitung einer vektorwertigen Funktion f versteht man die von x und y abhängige Jacobi-Matrix:

$J(x,y) = \begin{pmatrix}f_{1,x} & f_{1,y}\\ f_{2,x} & f_{2,y}\end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix Inversieren:

$\Rightarrow J^{-1}\cdot J = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_{1x} & f_{1y}\\ f_{2x} & f_{2y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

↳ wird aus 2 gl. aufgestellt: $f_1 = 2x$, $f_2 = 3y$

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a\cdot f_{1x} + b\cdot f_{2x} = 1\\ a\cdot f_{1y} + b\cdot f_{2y} = 0\end{array}\right| ; \left|\begin{array}{l} c\cdot f_{1x} + d\cdot f_{2x} = 0\\ c\cdot f_{1y} + d\cdot f_{2y} = 1\end{array}\right|$

Bsp.: $J = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2a + 3b = 1\\ 1a + 4b = 0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = -\frac{1}{5}\\ a = \frac{4}{5}\end{array}\right|$; $\left|\begin{array}{l} 2c + 3d = 0\\ 1c + 4d = 1\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} d = \frac{2}{5}\\ c = -\frac{3}{5}\end{array}\right| \Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

Fallkurven, Fallinien, Feldlinien

Die Kurven auf Fläche $z=f(x,y)$ im Raum, welche stets in Richtung des Steilsten Gefälles auf der Fläche verlaufen, heissen Fallkurven. Die Projektionen der Fallkurven in die xy-Ebene heissen Falllinien und sind gerade die Orthogonaltraj der Niveaulinie von f. Die Falllinien sind zugleich auch ohne Feldlinien des

Mehrdimensionales Newton-Verfahren

Mit dem MDNV kann man eine Nullstelle einer vektorwertigen Funktion f näherungsweise berechnen:

gegeben: $f(x,y) = \begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}$; Punkt: $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$

1) $J_f = \begin{pmatrix}f_{1x}(x,y) & f_{1y}(x,y)\\ f_{2x}(x,y) & f_{2y}(x,y)\end{pmatrix}$

2) $J_f(x_0,y_0)$ berechnen

3) $J_f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}f_1(x_0,y_0)\\ f_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

4) LGS lösen

5) $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0+\Delta x\\ y_0+\Delta y\end{pmatrix}$

6) Nullstellen = Schnittpunkte von f_1 und f_2

Gradientenverfahren:

Mit dem Gradientenverfahren kann man ein Minimum einer Funktion f in mehreren Variabeln näherungsweise berechnen:

1. Finde einen geeigneten Startwert $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$.
2. Berechne Näherungswerte: $(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1), (\tilde{x}_2,\tilde{y}_2), \ldots$ mit der Iterations-vorschrift: $\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1}\\ \tilde{y}_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_k\\ \tilde{y}_k\end{pmatrix} - t\cdot\operatorname{grad} f(\tilde{x}_k,\tilde{y}_k)$, $k=1,2\ldots$

Halbiere dabei ausgehend von $t=1$ den Parameter t in jedem Schritt so lange bis: $f(\tilde{x}_{k+1},\tilde{y}_{k+1}) < f(\tilde{x}_k,\tilde{y}_k)$

Bsp.: $f(x,y) = x^2+2y^2$; Startvektor $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$; $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix}2x\\ 4y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}$; $f(-1,-3) = 19$; $f(1,1) = 3$ ↯

$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$; $f(0,-1) = 2$; $f(1,1) = 3$ ✓

$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}0\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$; $f(0,3) = 18$; $f(0,-1) = 2$ ↯

$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$; $f(0,1) = 2$; $f(0,-1) = 2$ ↯

$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$; $f(0,0) = 0$; $f(0,-1) = 2$ ✓

Tiefpunkt gefunden! Durch überlegen wäre man auf den gleichen wert gekommen

Parameterdarstellung

Eine Fläche F im 3D-Raum kann durch eine vektorwertige Funktion x zwei Parameter u und v beschrieben werden: $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ (u,v) \longmapsto x(u,v) = \begin{pmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix}$

Hält man einen Parameter Konstant, wird eine Gitter- oder Parameterlinie beschrieben.

- Tangentialvektor $x_u = \begin{pmatrix}x_u(u,v)\\ y_u(u,v)\\ z_u(u,v)\end{pmatrix}$
- Tangentialvektor $x_v = \begin{pmatrix}x_v(u,v)\\ y_v(u,v)\\ z_v(u,v)\end{pmatrix}$
- Jakobi-Matrix $J_x(u,v) = \begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{pmatrix}$

Orthagonaltrajektorien

Die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien von f sind Kurven $y(s)$ in der Ebene, die alle Niveaulinien von f überall rechtwinklig schneiden.

- DGL der Ortagonaltrajektorien der Niveaulinien von $\boxed{f = y'(x) = \frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}}$
- DGL der Niveaulinien von $f: y'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$
- Am Schluss nach y Umformen

$\left(y'(x) = \frac{dy}{dx}\right)$

Bsp.: geg: Funktion f mit $f(x,y) = -x+y^2$

a) Gleichung & DGL der Niveaulinien von f:

$\longrightarrow -x^2+y^2 = c \Leftrightarrow x = y^2-c$; DGL: $y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{-1}{2y} = \frac{1}{2y}$

b) DGL der Orthagonaltrajektorien der Niveaulinien von f:

$\longrightarrow y' = -2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -2\,dx \Leftrightarrow \ln(|y|) = -2x+c$; $c\in\mathbb{R}$

c) die Gleichung der Orthagonaltrajektorien der Niveaulinien von f:

$\longrightarrow y' = -2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \Leftrightarrow \frac{1}{y}\cdot dy = -2\cdot dx \Leftrightarrow \ln(|y|) = -2x+c$; $c\in\mathbb{R}$

Ableitungen

$f(x) =$	$f'(x) =$
c	0
x	1
$a \cdot x$	a
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$a \cdot x^n$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$x^2 + x$	$2x + 1$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
$g(f(x))$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$; $\frac{-1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x)$; $\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

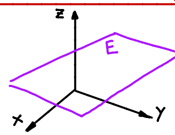
$\int 1\, dx$	$x + C$
$\int x^a\, dx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\int \frac{1}{x}\, dx$	$\ln(\lvert x \rvert) + C$
$\int e^x\, dx$	$e^x + C$
$\int a^x\, dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int \sin(x)\, dx$	$-\cos(x) + C$
$\int \cos(x)\, dx$	$\sin(x) + C$

Goniometrie

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\cos(y)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$
$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Verschiedene Figuren

Ebene:

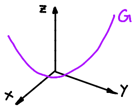


$$X(u,v) = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}}_{\text{Richtungsvektoren}} = \begin{pmatrix} p_1 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ p_2 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ p_3 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

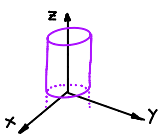
$$f(x,y) = s \cdot x + t \cdot y$$

Graph:

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$



Zylinder:



Um X-Achse:

$$X(\varphi, x) = \begin{pmatrix} x \\ r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Um Y-Achse:

$$X(\varphi, y) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ y \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

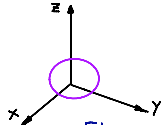
Um Z-Achse:

$$X(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Nicht um Ursprung:

$$X(\varphi, z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Mittelpunkt}} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + r \cdot \cos(\varphi) \\ 3 + r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Kreis



MP im Ursprung:

xy-Ebene: $X(\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ xz-Ebene: $X(\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ yz-Ebene: $X(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Nicht im Ursprung:

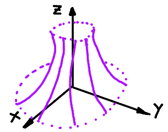
$$x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r \cdot \cos(\varphi) \\ 2 + r \cdot \sin(\varphi) \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$$

Rotationsfläche:

Kurve: $r(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

rotiert um z-Achse

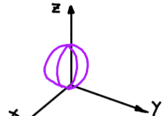


$$X(z, \varphi) = \begin{pmatrix} r(z) \cdot \cos(\varphi) \\ r(z) \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Rotation um Z-Achse:

- Radius bei x und y gleich!
- bei x mit $\cos(\varphi)$ multiplizieren
- bei y mit $\sin(\varphi)$ multiplizieren

Kugel:



MP:

Im Ursprung:

$$x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Nicht im Ursprung:

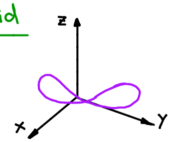
$$x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Form Kugelkoordinaten: (r, φ, ϑ), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

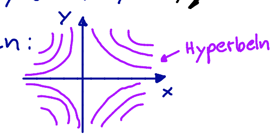
Hyperbolisches Paraboloid

Mit Sattelpunkt bei $x = 0$, $y = 0$

$f(x,y) = x \cdot y$ oder $x^2 \cdot y^2$



Niveaulinien:

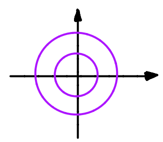


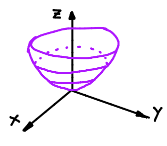
Rotationsparaboloid:

Mit Scheitelpunkt $(0,0,0)$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Niveaulinien:

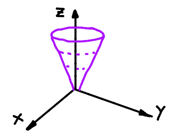




Kreiskegel:

Mit Scheitelpunkt $(0,0,0)$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

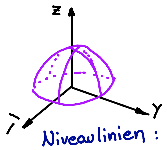


Halbkugeln:

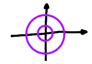
Mit Scheitelpunkt $(0, 0, \boxed{1})$

Radius

$$f(x,y) = \sqrt{\boxed{1} - x^2 - y^2}$$

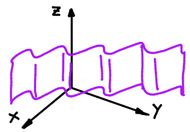


Niveaulinien:



Wellenfunktion:

$$f(x,y) = \sin(x + y)$$

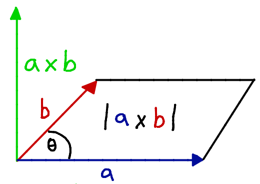


Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



Vektor $a \times b$ steht senkrecht auf Vektor a und b

Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \cdot b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

Matrixkalkül

A, B = Matrix

c = Wert

Regeln

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$$
$$A^{T^T} = A$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiele

$$\frac{x^T \cdot A \cdot B}{dx} = B^T \cdot A^T$$

$$\frac{(A \cdot B)^T x}{dx} = A^T \cdot B^T$$

Fallkurve:

Anleitung:

1) $\underline{\text{grad} f}$ berechnen

   f_x, f_y

2) $y'(x) = \frac{f_y}{f_x} = \frac{dy}{dx}$
3) Separieren, Integrieren
4) nach y auflösen
5) Punkt einsetzen um Integrationskonstante C zu berechnen
6) Auftreffpunkt: $(x, y, f(x,y))$

   ↳ auf x,y-Ebene

   $\Rightarrow z = 0 = f(x,y)$

7) welche Lösung ergibt Sinn?
8) Auftreffpunkt berechnen

Tangentialebene 2c/2d

Näherungwert

Neue Stelle (x_1, y_1) in Ebene einsetzen

$z = x - 3y - 1 \rightarrow x_1 - 3y_1 - 1 = \underline{\underline{z_1}}$

Punkt finden:

x_0, y_0	$f(x,y)$	$x_1 = 11$ $y_1 = 999$
$10, 1000$	$\sqrt{x^3 y}$	$\sqrt{11^3 \cdot 999}$

Punkt mit Funktion gemeinsam

$f(x,y) = z$

$\ln(x - 3y) = x - 3y - 1$

Parallel zu xy

$f_x = 0$

$f_y = 0$

| grad von Funktion nehmen

Einheitsvektor $\vec{r} = 0$

$$\begin{matrix} f_x(x_0, y_0) = \\ f_y(x_0, y_0) = \end{matrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}} \; \& \; \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}}$$

Nicht definierte Stellen

Wenn die Partielle Ableitungen nicht existieren: $f(x,y) = 0$

z.B.: $\lvert x^2 - y^2 \rvert \rightarrow$ bei: $\pm x^2 = y$