HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Name _____

Student-Nr. _____

Erreichte Punktzahl 30

Zwischenprüfung ELT 2 – Lösung

Frühlingssemester 2018

Hinweise

- Um die Zulassung zur ELT 2 Modulprüfung zu erhalten, müssen als Testatbedingung mindestens 30% der maximal möglichen Punktzahl dieser Zwischenprüfung erreicht werden; für diese Prüfung sind dies somit mindestens 9 Punkte.
- Jede Teilaufgabe ist 3 Punkte wert. Es wird ausschliesslich mit ganzen Punkten teil-bewertet.
- Bei Verständnisfragen ist *kurz und präzise* zu antworten. Es ist für die Bewertung hilfreich wenn jeweils die wichtigsten Punkte unterstreicht werden.

1 Punktladungen und Metallplatte

Bei dieser Aufgabe geht es um die Grundsätze der Elektrostatik und um die korrekte Anwendung der Spiegelladungsmethode; die Anordnung vereinfacht sich dabei gemäss Abb. 1.

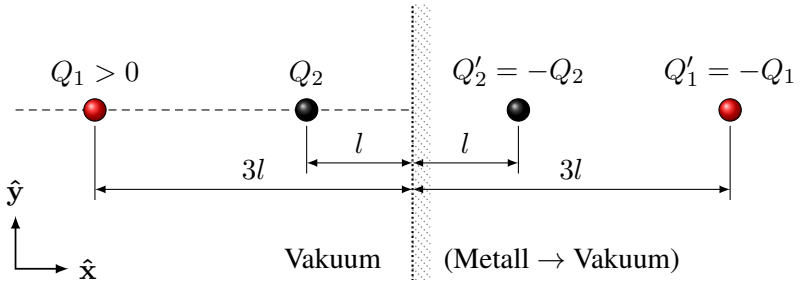


Abbildung 1 Anordnung von Punktladungen in der Nähe einer Metallplatte.

a) Die positive Ladung Q_1 zieht durch Coulombsche Kräfte negative Ladungsträger im Metall an und stösst dementsprechend positive Ladungsträger ab. Somit entsteht durch Influenz eine negative Oberflächenladungsdichte auf der Metalloberfläche. Da nun die negativen Ladungsträger näher bei Q_1 sind als die positiven, ist die Coulombsche Kraftwirkung (wie üblich, bei andersartigen Ladungen) anziehend, d.h. zur Metalloberfläche hin, in $\hat{\mathbf{x}}$-Richtung.

b) Die Auswirkungen der negativen Ladungsdichte auf der Metalloberfläche lassen gemäss Abb. 1 sich durch eine entsprechende Spiegelladung $Q_1' = -Q_1$ modellieren; dasselbe Spiegelungsprinzip muss nun auch auf Q_2 angewendet werden, $Q_2' = Q_2$. Somit ergibt sich eine Anordnung aus *vier* Punktladungen. Keine Kraftwirkung auf Q_1 bedeutet:

$$F_{12} + F_{12'} + F_{11'} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{(2l)^2} + \frac{-Q_2}{(4l)^2} + \frac{-Q_1}{(6l)^2}\right) = 0 \tag{1}$$

somit

$$Q_2\left(\frac{1}{4l^2} - \frac{1}{16l^2}\right) = \frac{Q_1}{36l^2} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{16l^2}{3}\frac{Q_1}{36l^2} = \underline{\underline{\frac{4}{27}\,Q_1}} \tag{2}$$

Es macht Sinn, dass $Q_2 > 0$ (ebenfalls positiv) aber $Q_2 < Q_1$ ist, da Q_1 „etwas abgestossen" werden, muss um die Kraft zur Metallplatte zu kompensieren.

c) Wiederum wird die Anordnung mit den vier Punktladungen betrachtet; um das elektrische Feld zu berechnen wird das Superpositionsprinzip angewendet:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_{2'} + \mathbf{E}_{1'} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_1\frac{\hat{\mathbf{x}}}{(3l)^2} + \frac{4Q_1}{27}\frac{\hat{\mathbf{x}}}{l^2} - \frac{4Q_1}{27}\frac{(-\hat{\mathbf{x}})}{l^2} - Q_1\frac{(-\hat{\mathbf{x}})}{(3l)^2}\right) \\ &= \frac{Q_1\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{9l^2} + \frac{8}{27l^2}\right) = \frac{Q_1\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\frac{6+8}{27} = \underline{\underline{\frac{7Q_1}{54\,\pi\varepsilon_0 l^2}\,\hat{\mathbf{x}}}}\end{aligned} \tag{3}$$

d) Die negative Ladungsdichte aus **a)** wird durch die Anwesenheit von Q_2 verstärkt. Da sie insgesamt durch die beiden gespiegelten Punktladungen Q_1' und Q_2' modelliert werden kann, muss es sich somit um eben genau

$$Q_{\text{influenziert}} = Q_1' + Q_2' = -\left(1 + \frac{4}{27}\right)Q_1 = \underline{\underline{-\frac{31}{27}\,Q_1}} \tag{4}$$

handeln. Wichtig ist dabei insbesondere auch das korrekte Vorzeichen.

2 Kondensator mit inhomogenem Dielektrikum

Bei dieser Aufgabe geht es um die Verbindungen der Konzepte der elektrischen Flussdichte und Ladungsdichte, der Permittivität und Kapazität sowie der Energiedichte des elektrischen Felds.

a) Die (ungebundene) Ladungsdichte steht anhand der Grenzbedingungen des elektrischen Felds in direktem Zusammenhang mit der elektrischen Flussdichte: $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2 + \rho_s$, für einen Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ von Region 2 auf Region 1. Hier ist $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}$ im Dielektrikum, während $\mathbf{D}_2 = 0$ innerhalb der metallischen Elektrode, somit $\rho_s = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}$. Für die negative Elektrode folgt (mit $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$):

$$\rho_s = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{D} = \hat{\mathbf{y}} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\varepsilon_r(x) \varepsilon_0 \frac{U}{d} (-\hat{\mathbf{y}}) \right) = -\underbrace{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}}}_{1} \varepsilon_r(x) \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \underline{\underline{-\left(2 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \frac{\varepsilon_0 U}{d}}} \tag{5}$$

Somit ist $\rho_s = \rho_s(x)$, d.h. eine Funktion von x, wie schon $\varepsilon_r(x)$.

b) Die Kapazität ist $C = Q/U$. Da die Spannung U gegeben ist, muss die Ladung Q gefunden werden. Diese wiederum ergibt sich durch Integration der Ladungsdichte:

$$Q = \int_A \rho_s \, ds = \int_0^z \int_{-l/2}^{l/2} \rho_s(x) \, dx \, dz \, . \tag{6}$$

Da in z-Richtung alles konstant ist, kann diese Integration durch eine Multiplikation mit z gelöst werden und es folgt weiter:

$$\begin{aligned} Q = z \int_{-l/2}^{l/2} \rho_s(x) \, dx &= z \int_{-l/2}^{l/2} \left(2 - \frac{x^2}{l^2/4}\right) \frac{\varepsilon_0 U}{d} \, dx = \frac{\varepsilon_0 U z}{d} \left[2x - \frac{1}{l^2/4} \frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 U z}{d} \left[\left(l - \frac{l}{6} \right) - \left(-l + \frac{l}{6} \right) \right] = \frac{\varepsilon_0 U z}{d} \left(2l - \frac{l}{3} \right) = \frac{5}{3} \frac{\varepsilon_0 U l z}{d} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Daraus ergibt sich die Kapazität zu:

$$\underline{\underline{C = \frac{Q}{U} = \frac{5}{3} \frac{\varepsilon_0 l z}{d}}} \tag{8}$$

Man beachte: Diese Kapazität hätte auch direkt via Integration von infinitesimal kleinen Teilkondensatoren erhalten werden können:

$$C = \int dC = \int_A \frac{\varepsilon}{d} \, ds = \int_0^z \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\varepsilon_r(x) \varepsilon_0}{d} \, dx \, dz = \frac{\varepsilon_0 z}{d} \int_{-l/2}^{l/2} \varepsilon_r(x) \, dx = \frac{5}{3} \frac{\varepsilon_0 l z}{d} \tag{9}$$

c) Bei der x-Achse handelt es sich um eine Äquipotentiallinie (bzw. bei jeder xz-Fläche um eine Äquipotentialfläche), deshalb weisen die Punkte A und B dieselben Potentiale (oder potentiellen Energien) auf und folglich wird weder Arbeit geleistet noch aufgewendet, $\Delta W = 0$. Äquivalente Aussage: Da das elektrische Feld entlang der ganzen Strecke senkrecht zum Weg ist, folgt gemäss $\Delta W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, dass keine Arbeit verrichtet wird.

d) Die elektrische Energiedichte ist generell $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$. Da das elektrische Feld im ganzen Kondensator konstant ist, $E = U/d$, ist die Energiedichte dort maximal, wo die relative Permittivität maximal ist: $\max_x \varepsilon_r(x) = 2$, bei $x = 0$. Somit folgt:

$$\max w_e = \frac{1}{2} 2\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0 U^2}{d^2}}} \tag{10}$$

3 Vermischte Fragen

Bemerkung zur Bewertung: Die Skizze ergibt einen Punkt, eine korrekte, klare Beschreibung (optimalerweise mit drei bis vier der unterstrichenen Teile bzw. Fachausdrücke) zwei weitere Punkte.

a) Insbesondere wenn der Abstand d zwischen den Kugeln nicht wesentlich grösser ist als deren Radien r (bzw. derer grösserer Radius, falls sie nicht gleich gross sind), werden sich die Oberflächenladungsdichten entsprechend den lokalen Coulombschen Kräften ungleich verteilen, d.h. der Ladungsschwerpunkt verlagert sich vom geometrischen Schwer- bzw. Bezugspunkt (Kugelzentrum), was in der Standardformulation des Coulombschen Gesetzes nicht berücksichtigt wird bzw. werden kann: die Kraftwirkung ist nicht mehr quadratisch zum Kehrwert des Abstands (der Kugelzentren).

Falls $d \gg r$ kann das Coulombsche Gesetz dennoch üblicherweise als gute Approximation angewendet werden. (Natürlich gilt es nicht für $d = 0$, aber die Kugeln können ohnehin nicht denselben Ort einnehmen; hier wurde explizit nach geladenen Metallkugeln gefragt.)

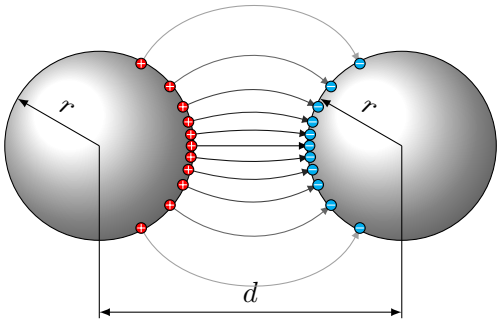


Abbildung 2 Illustration der ungleichmässigen Verteilungen der Oberflächenladungsdichten auf zwei geladenen Metallkugeln bei nicht sehr grossem Abstand, $d \not\gg r$.

b) Kleine metallische Objekte können von einem äusseren elektrischen Feld polarisiert werden, wobei kleine elektrische Dipole entstehen. Das bedeutet, lokal richten sich die positiven und negativen Ladungsträger (via Influenz) entsprechend dem äusserlich angelegen elektrischen Feld aus, können aber nicht weiter aus den metallischen Objekten abgetragen werden (da sich die Objekte in einem Isolator befinden) – somit verhalten sich diese Objekte ähnlich wie die gebundenen Ladungen in einem herkömmlichen Dielektrikum. Es ergibt sich durch die lokalen, mikroskopischen Dipole innerhalb des Materials insgesamt ein makroskopisches Gegenfeld; wiederum wie bei einem polarisierten Dielektrikum.

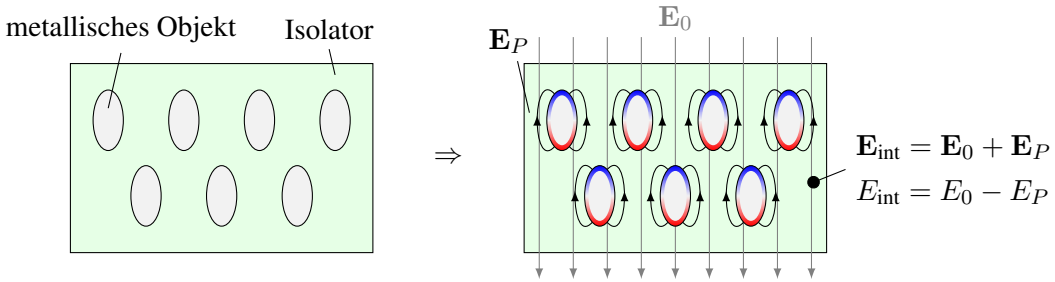


Abbildung 3 Illustration eines künstlichen Dielektrikums aus metallischen Objekten in einem Isolator, unpolarisiert und polarisiert, wobei das interne elektrische Feld sich aus der Überlagerung des äusseren Felds $\mathbf{E}_0$ und dem Gegenfeld $\mathbf{E}_P$ (Polarisationsfeld) zusammensetzt.