HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

Name _____

Student-Nr. _____

Erreichte Punktzahl 30

Zwischenprüfung ELT 2

Frühlingssemester 2019

Musterlösung

Hinweise

- Um die Zulassung zur ELT 2 Modulprüfung zu erhalten, müssen als Testatbedingung mindestens 30% der maximal möglichen Punktzahl dieser Zwischenprüfung erreicht werden; für diese Prüfung sind dies somit mindestens 9 Punkte. Jede Teilaufgabe ist 3 Punkte wert.
- Es gibt keine Note und das Resultat zählt nicht für die Modulschlussprüfung.
- Die Zwischenprüfung wird ausserhalb des üblichen Unterrichts durchgeführt. Sie wird am Mittwoch 10. April 2019, um spätestens 19:00, auf dem Skriptserver abgelegt und muss abgegeben werden bis *spätestens*

  Mittwoch, 17. April 2019, zu Beginn der Vorlesung (10:10)

- Die Abgabe kann in Papierform oder via Email in PDF-Form erfolgen.
  - Papierform: Die *zusammengehefteten* Seiten können direkt im Unterricht abgegeben werden. Eine vorzeitige Abgabe ist via Dozentenfach („Briefkasten“) in der Nähe des Empfangs der Hochschuldienste möglich.
  - PDF-Form: Das PDF muss mit gängiger Adobe Reader PDF-Software lesbar sein. Wie in Papierform ist der Student für die Lesbarkeit der Prüfung verantwortlich.
- Die Aufgaben sind im dafür vorgesehenen Platz zu lösen. Der Student muss sicher stellen, dass der Lösungsweg klar ersichtlich ist; insbesondere werden Lösungen ohne Begründung oder Lösungsweg nicht honoriert.
- Bei Verständnisfragen ist *kurz und präzise* zu antworten. Es ist für die Bewertung hilfreich wenn jeweils die wichtigsten Punkte unterstreicht werden.
- Es werden keine zusätzlichen Informationen, Hilfestellungen oder Erklärungen abgegeben; notieren Sie Unklarheiten und machen Sie gegebenfalls begründete Annahmen.

1 Punktladungen, Kräfte und elektrostatische Felder

Punktladungen $Q_\mathsf{A} = 30\,\mu\mathrm{C}$ @ $\mathsf{A} = (1, 2)$ und $Q_\mathsf{B} = -20\,\mu\mathrm{C}$ @ $\mathsf{B} = (3, 0)$.

a) Auf die Ladung B wirkt die Coulombsche Kraft, welche sich zwischen ihr und Ladung A einstellt. Sie kann direkt wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \frac{Q_\mathsf{A} Q_\mathsf{B}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} &= \frac{30\,\mu\mathrm{C}\cdot(-20\,\mu\mathrm{C})}{4\pi\cdot 8.85\,(\mu\mathrm{C})^2/(\mathrm{N\,m^2})\cdot(2^2+2^2)\,\mathrm{m}^2}\,\frac{2\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}}{|2\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}|} \\ &\approx -0.6744\,\frac{\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{N} = \underline{\underline{0.67\,\frac{-\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{N}}} \quad (1)\end{aligned}$$

b) Da die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, ist die potentielle Gesamtenergie die Energie, welche nötig wäre um das System in Ruhe zu bringen (anstatt die Energie, welche vom System entzogen werden könnte, bis es in Ruhe ist[1]). Solange die Ladung B in der Nähe der Ladung A ist, wird sie von dieser angezogen; sie muss also von dieser in die Unendlichkeit fortbewegt werden, damit das System zur Ruhe kommt. Die dazu korrespondierende Arbeit entspricht der potentiellen elektrischen Energie, welche die Ladung B im elektrischen Potential der Ladung A aufweist (oder umgekehrt). Somit folgt:

$$\begin{aligned}W = \varphi_\mathsf{A} Q_\mathsf{B} = \frac{Q_\mathsf{A}}{4\pi\varepsilon_0 R}\,Q_\mathsf{B} &= \frac{30\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\cdot 8.85\,\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{MV\,m}}\cdot 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}\cdot(-20\,\mu\mathrm{A\,s}) \\ &\approx -1.9074\,\mathrm{V\,A\,s} = \underline{\underline{-1.91\,\mathrm{J}}} \quad (2)\end{aligned}$$

c) Die gesamte elektrische Feldstärke ergibt sich überall (in diesem linearen Medium) aus der Superposition aller Teil-Feldstärken; $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\mathsf{A} + \mathbf{E}_\mathsf{B}$. Für die einzelnen Ladungen folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mathsf{A} = \frac{Q_\mathsf{A}}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathsf{A}^2}\,(-\hat{\mathbf{r}}_\mathsf{A}) &= \frac{Q_\mathsf{A}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-\mathbf{r}_\mathsf{A}}{|\mathbf{r}_\mathsf{A}|^3} \\ &= \frac{30\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-(\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}})}{|\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}|^3} = \frac{30\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-(\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}})}{5^{3/2}} \approx -\frac{2.68\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{5.37\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{y}} \quad (3)\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_\mathsf{B} = \frac{Q_\mathsf{B}}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathsf{B}^2}\,(-\hat{\mathbf{r}}_\mathsf{B}) = \frac{Q_\mathsf{B}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-\mathbf{r}_\mathsf{B}}{|\mathbf{r}_\mathsf{B}|^3} = \frac{-20\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-3\hat{\mathbf{x}}}{|3\hat{\mathbf{x}}|^3} = \frac{-20\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-3\hat{\mathbf{x}}}{3^3} \approx \frac{2.22\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{x}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = \mathbf{E}_\mathsf{A} + \mathbf{E}_\mathsf{B} &\approx \frac{1\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,(-2.68\hat{\mathbf{x}} - 5.37\hat{\mathbf{y}} + 2.22\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1\,\mu\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\,(-0.46\hat{\mathbf{x}} - 5.37\hat{\mathbf{y}}) = (-4.13\hat{\mathbf{x}} - 48.2\hat{\mathbf{y}})\ \mathrm{kV/m} \\ &= \sqrt{4.13^2+48.2^2}\,\frac{(-4.13\hat{\mathbf{x}}-48.2\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{4.13^2+48.2^2}}\,\mathrm{kV/m} = 48.4\,\frac{(-4.13\hat{\mathbf{x}}-48.2\hat{\mathbf{y}})}{48.4}\,\mathrm{kV/m} \\ &= \underline{\underline{\underbrace{48.4\,\mathrm{kV/m}}_{E}\,\underbrace{(-0.086\hat{\mathbf{x}} - 0.996\hat{\mathbf{y}})}_{\hat{\mathbf{E}}}}} \quad (5)\end{aligned}$$

[1] Die beiden Ladungen dürfen nicht aufeinander gebracht werden, da für ganz kleine Distanzen $R \to 0$ das Coulombsche Gesetzt nicht gilt.

d) Die Arbeit, welcher das Hineinbringen eines Elektrons aus dem Unendlichen zum Koordinatenursprung entspricht, ist die potentielle elektrische Energie, die das Elektron an diesem Punkt aufweist, wenn es dem elektrischen Potential der beiden fixen Ladungen ausgesetzt wird. Die einzelnen Potentiale superponieren zum Gesamtpotential, somit ergibt sich zusammen mit der negativen Elementarladung des Elektrons $q_e = -e$:

$$\begin{aligned}\Delta W = W &= (\varphi_\mathsf{A} + \varphi_\mathsf{B})(-e) = -\left(\frac{Q_\mathsf{A}}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathsf{A}} + \frac{Q_\mathsf{B}}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathsf{B}}\right) e \\ &= -\left(\frac{30\,\mu\mathrm{C}}{4\pi \cdot 8.854\,\frac{(\mu\mathrm{C})^2}{\mathrm{J\,m}} \cdot \sqrt{5}\,\mathrm{m}} + \frac{-20\,\mu\mathrm{C}}{4\pi \cdot 8.854\,\frac{(\mu\mathrm{C})^2}{\mathrm{J\,m}} \cdot 3\,\mathrm{m}}\right) \cdot 1.602 \times 10^{-13}\,\mu\mathrm{C} \\ &\approx (120.6 - 59.9)\,\mathrm{kV} \cdot 1.602 \times 10^{-13}\,\mu\mathrm{C} = \underline{\underline{-9.72\,\mathrm{nJ}}} \quad (6)\end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier, dass die Energie $|W| = |\Delta W|$ nicht von aussen aufgewendet werden muss, sondern vom elektrischen Feld geleistet wird. Dies ist auch dadurch ersichtlich, dass sich die positive, grössere Ladung Q_A näher am Koordinatenursprung befindet als die negative Ladung Q_B; somit überwiegt die anziehende Kraft über die abstossende Kraft.

2 Kondensator mit inhomogenem Dielektrikum

Ein Plattenkondensator (mit quadratischer Plattenfläche $A = l^2$ und Plattenabstand d, wobei $l \gg d$) ist mit einem inhomogenen Dielektrikum gefüllt, wie in Abb. 1 skizziert. Die relative Permittivität des Dielektrikums verhält sich gegenüber der x-Koordinate gemäss

$$\varepsilon_r(x) = 1 + \left(\frac{x}{l/2} - 1\right)^2 ,$$

d.h. sie wird gegen aussen in der x-Dimension grösser; in alle anderen Dimensionen ist sie konstant.

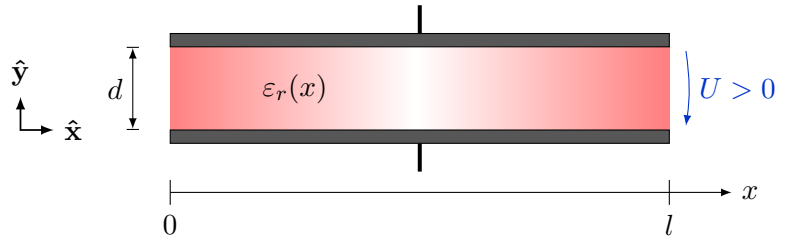


Abbildung 1 Ein Kondensator mit inhomogenem Dielektrikum.

a) Die lokale freie Ladungsdichte auf einer Metalloberfläche ergibt sich durch die dortige elektrische Flussdichte $\mathbf{D}$ via deren Grenzbedingung $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \rho_s$. Dazu muss der Normalenvektor geeignet gewäht werden: von der Metall- auf die Nichtmetall-Region, somit $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$. Das elektrische Feld ist im gesamten Kondensator gleich homogen $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{y}}U/d$. Somit folgt mit der Materialgleichung $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r(x)\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}\rho_s = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{D} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \big(\varepsilon_0\varepsilon_r(x)\mathbf{E}\big) = \varepsilon_0\varepsilon_r(x)\, \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{E} \\ = \varepsilon_0\varepsilon_r(x)\, \hat{\mathbf{y}} \cdot (-\hat{\mathbf{y}})\, \frac{U}{d} = \underline{\underline{-\left(1 + \left(\frac{x}{l/2} - 1\right)^2\right) \frac{\varepsilon_0 U}{d}}} \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Kontrolle: Da die Ladungsdichte auf der negativen Elektrode gefragt ist, muss diese zu einer negativen Ladung führen, was diese Lösung erfüllt.

b) Da d innerhalb der Integrale als infinitesimales Integrationselement verwendet wird, wird zunächst die Substitution $d \mapsto y$ verwendet und am Ende wieder rücksubstituiert. Es gibt dann zwei Wege:

- Direkte Adaption der Plattenkondensatorformel

$$\begin{aligned} C = \int_A \frac{\varepsilon\, ds}{y} = \int_0^l \frac{\varepsilon(x) l}{y}\, dx = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \int_0^l \varepsilon_r(x)\, dx = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \int_0^l \left(1 + \left(\frac{x}{l/2} - 1\right)^2\right) dx \\ = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \int_0^l \left(1 + \left(1 - \frac{4x}{l} + \frac{4x^2}{l^2}\right)\right) dx = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \left[2x - \frac{2x^2}{l} + \frac{4x^3}{3l^2}\right]_0^l \\ = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \left(2l - \frac{2l^2}{l} + \frac{4l^3}{3l^2}\right) = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \left(2l - 2l + \frac{4l}{3}\right) = \frac{\varepsilon_0 l}{y} \cdot \frac{4l}{3} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{y} \xrightarrow{y \mapsto d} \underline{\underline{\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}}} \end{aligned}$$

(8)

- Integration der Ladungsdichte

$$Q = \int_A \rho_s \, ds = l \int_0^l \left(1 + \left(\frac{x}{l/2} - 1\right)^2\right) \frac{\varepsilon_0 U}{y} \, dx$$
$$= l \frac{\varepsilon_0 U}{y} \int_0^l \left(1 + \left(\frac{x}{l/2} - 1\right)^2\right) \, dx = \frac{\varepsilon_0 l U}{y} \cdot \frac{4l}{3} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{y} U \quad (9)$$

  und anschliessender Normalisierung durch die Spannung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{y} U}{U} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{y} \xrightarrow{y \mapsto d} \underline{\underline{\frac{4}{3} \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}}} \quad (10)$$

  Natürlich müssen beide Wege zur selben Lösung führen. Die Kapazität des Kondensators *mit* Dielektrikum muss zudem grösser sein als diejenige des zugrunde liegenden Kondensators ohne Dielektrikum: $C \geq \varepsilon_0 l^2 / d$.

c) Erläutern Sie die Kraftwirkungen auf die Platten und das Dielektrikum wenn dieser Kondensator geladen ist.

- Die beiden Platten sind entgegengesetzt geladen, somit ziehen sie sich an und "quetschen" das Dielektrikum ein; es gibt also einen Druck aufs Dielektrikum.
- Das elektrische Feld ist im ganzen Kondensator homogen (und weist auf eine ebenfalls homogene gesamte Ladungsdichte hin), somit ist auch die Kraft (näherungsweise) gleichmässig.
- Das Dielektrikum würde in den Kondensator hineingezogen; da es sich bereits in der Mitte befindet, wirkt keine seitliche Kraft darauf. Da die gebundenen Ladungen auf den Oberflächen zu den Elektroden hin andersartig sind als die Ladungen der Elektroden selbst, werden auf beiden Seiten jeweils die Elektroden vom Dielektrikum angezogen und umgekehrt.

d) Die gespeicherte Energie im Kondensator ist proportional zum Quadrat der anliegenden Spannung, mit der Kapazität als Proportionalitätsfaktor:

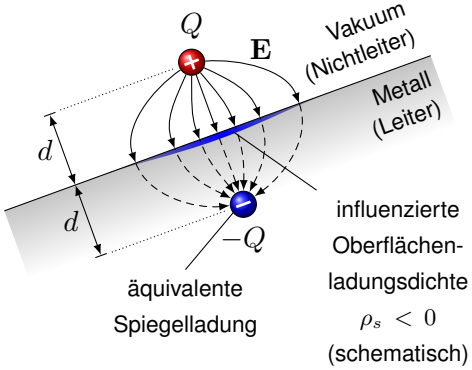
$$\underline{\underline{W_C = \frac{1}{2} C U^2}}$$

Somit ergeben sich für beliebig grosse Energien zwei Probleme:

- Die anliegende Spannung und folglich das elektrische Feld im Kondensator müssten ebenfalls beliebig gross sein können, was jedoch von der endlichen Spannungsfestigkeit des Dielektrikums begrenzt wird. Wird diese Überschritten kann es zu Durchschlägen, Kurzschlüssen und Zerstörung des Dielektrikums führen.
- Die Kapazität ist für polarisierbare Dielektrika genau genommen keine Konstante, denn die Polarisierbarkeit nimmt mit steigendem elektrischen Feld ab ($\varepsilon = \varepsilon(E)$), somit nimmt auch die Kapazität ab. Dennoch ist das absolute Limit auch dann die Spannungsfestigkeit.
- Die einige weitere Möglichkeit wäre eine unendlich grosse Kapazität — dies ist jedoch aus geometrischen Gründen nicht möglich: Entweder müsste der Elektrodenabstand sehr klein sein, wobei wiederum Probleme mit der endlichen Spannungsfestigkeit auftreten, oder die Elektrodenfläche müsste beliebig gross sein können, was ebenfalls keinen Sinn macht.

3 Vermischte Fragen

a)



- Die *Spiegelladungsmethode* basiert auf dem Konzept von Äquipotentiallinien- bzw. flächen, auf welchen die elektrischen Feldvektoren senkrecht auftreffen oder austreten. Formal ausgedrückt, handelt es sich um ein vereinfachtes Verfahren um elektrostatische Randwertprobleme zu lösen; diese Ränder sind eben diese Äquipotentialflächen, insbesondere die Spiegelfläche und "die Unendlichkeit".
- Wird eine Punktladung in die Nähe eines Leiters gebracht, wird an dessen Oberfläche durch Influenz eine Ladungsdichte herangezogen. Im Fall einer einzelnen (unendlich grossen) Leiterfläche ist diese nicht homogen, aber entspricht insgesamt ("auf-integriert") der Ladung der Punktladung mit entgegengesetztem Vorzeichen.
- Da die elektrischen Feldlinien der Punktladung senkrecht auf der Leiterfläche auftreffen oder austreten müssen ($E_t = 0$), können diese an der Leiteroberfläche (dem "Spiegel") gespiegelt und die Pfeilrichtung umgekehrt werden, wobei ein Bild wie von einer zweiten Punktladung resultiert. Diese Ladung wird Spiegelladung genannt, liegt im selben Abstand zur Oberfläche wie die erste Ladung und weist dieselbe Ladung, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen, auf.
- Diese beiden Bilder sind im Bereich ausserhalb des Leiters (bzw. auf der Seite der ersten Punktladung) identisch; dort können so Berechnungen von Kräften, Potentialen, Feldstärken etc. zu Betrachtungen von mehreren Punktladungen vereinfacht werden. Im Leiter bzw. auf der anderen Seite des Leiters sind die Bilder jedoch nicht identisch.

b) Kleine metallische Objekte können von einem äusseren elektrischen Feld polarisiert werden, wobei kleine elektrische Dipole entstehen. Das bedeutet, lokal richten sich die positiven und negativen Ladungsträger (via Influenz) entsprechend dem äusserlich angelegen elektrischen Feld aus, können aber nicht weiter aus den metallischen Objekten abgetragen werden (da sich die Objekte in einem Isolator befinden) – somit verhalten sich diese Objekte ähnlich wie die gebundenen Ladungen in einem herkömmlichen Dielektrikum. Es ergibt sich durch die lokalen, mikroskopischen Dipole innerhalb des Materials insgesamt ein makroskopisches Gegenfeld; wiederum wie bei einem polarisierten Dielektrikum.

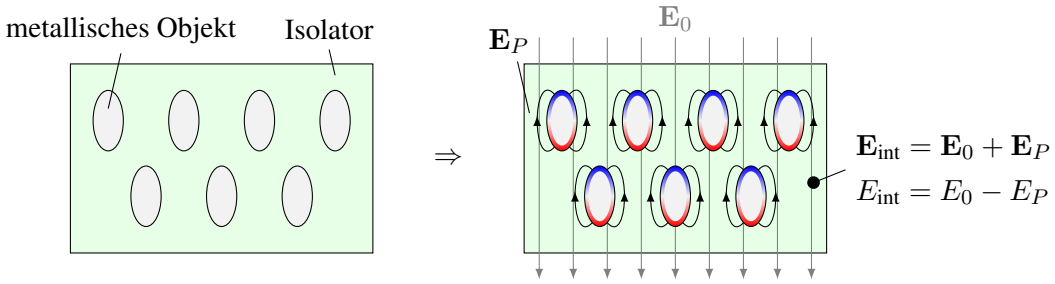


Abbildung 2 Illustration eines künstlichen Dielektrikums aus metallischen Objekten in einem Isolator, unpolarisiert (a) und polarisiert (b).