1 Operationsverstärker

1.1 Die goldenen Regeln des Operationsverstärkers

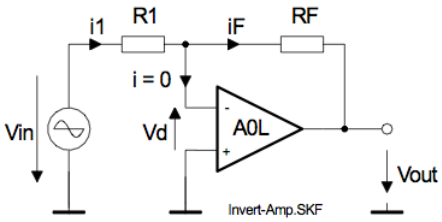
Der Eingangsstrom ist immer 0! Der Ausgang wird immer so geregelt, dass die Eingänge das gleiche Potential haben!

1.2 Opamp Schaltungen

1.2.1 Invertierender Verstärker

Beim invertierenden Verstärker ist die Ausgangsspannung gegenphasig zur Eingangsspannung.

Closed-Loop Spannung:	$A_{CL} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$
	$v_{out} = -v_{in} \cdot \frac{R_F}{R_1}$
$i_1 = \frac{v_{in}+v_d}{R_1}$	$i_F = -\frac{v_{out}+v_d}{R_F}$
Ausgangswiderstand:	$r_{out} = 0\Omega$
Eingangswiderstand:	$r_{in} = R_1$
OP mit Offset: ($v_{os} = v_d$)	$v_{out} = \frac{R_1+R_F}{R_1} \cdot (v_{AGND} + v_{os}) - \frac{R_F}{R_1} \cdot v_{in}$
Für $A_{OL} \neq\gg A_{CL}$:	$v_{out} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_1+R_F}+\frac{1}{A_{OL}}} \cdot \left((v_{AGND} + v_{os}) - \frac{R_F}{R_1+R_F} \cdot v_{in}\right)$

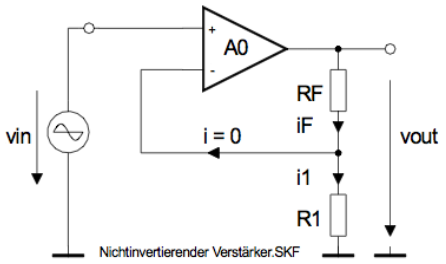


1.2.2 Nichtinvertierender Verstärker

Beim nichtinvertierenden Verstärker ist die Ausgangsspannung gleichphasig zur Eingangsspannung.

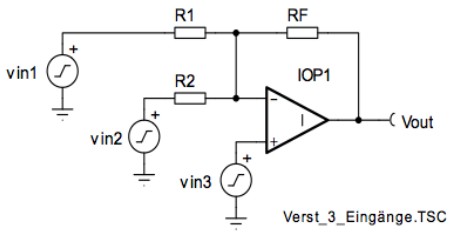
Closed-Loop Gain:	$A_{CL} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R_F}{R_1} + 1$
	$v_{out} = v_{in} \cdot (\frac{R_F}{R_1} + 1)$
$i_1 = \frac{v_{in}-v_d}{R_1}$	$i_F = \frac{v_{out}}{R_F+R_1}$
Ausgangswiderstand:	$r_{out} = 0\Omega$
Eingangswiderstand:	$r_{in} = \infty$
OP mit Offset:	$v_{out} \cong \frac{R_1+R_F}{R_1} \cdot (v_{in} + v_{os})$
Für $A_{OL} \neq\gg A_{CL}$:	$v_{out} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_1+R_F}+\frac{1}{A_{OL}}} \cdot (v_{in} + v_{os})$

Für $R_1 \to \infty$ und $R_F \to 0$ wird der Operationsverstärker zu einem Buffer.



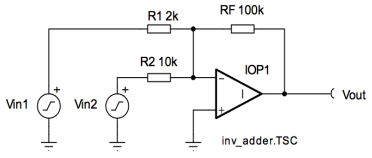
1.2.3 Verstärker mit mehreren Eingängen

$$A_{CL1} = -\frac{R_F}{R_1}$$
$$A_{CL2} = -\frac{R_F}{R_2}$$
$$A_{CL3} = \frac{R_F+(R_1//R_2)}{(R_1//R_2)}$$
$$v_{out} = A_{CL1}v_1 + A_{CL2}v_2 + A_{CL3}v_3 = -\frac{R_F}{R_1}v_1 - \frac{R_F}{R_2}v_2 + \frac{R_F+(R_1//R_2)}{(R_1//R_2)}v_3$$



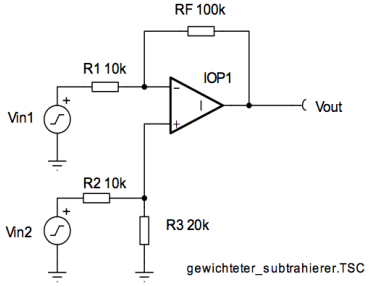
1.2.4 Invertierender Addierer

$$V_{out} = A_{CL1}V_{IN1} + A_{CL2}V_{IN2} + \ldots$$
$$V_{out} = -\frac{R_F}{R_1}V_{IN1} - \frac{R_F}{R_2}V_{IN2} + \ldots$$
$$A_{CL1} = -\frac{R_F}{R_1}$$
$$A_{CL2} = -\frac{R_F}{R_2}$$



1.2.5 Gewichteter Subtrahierer

$$A_{CL1} = -\frac{R_F}{R_1}$$
$$A_{CL2} = \frac{R_3}{R_3+R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)$$
$$v_{out} = \frac{R_3}{R_3+R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)v_{in2} - \frac{R_F}{R_1}v_{in1}$$

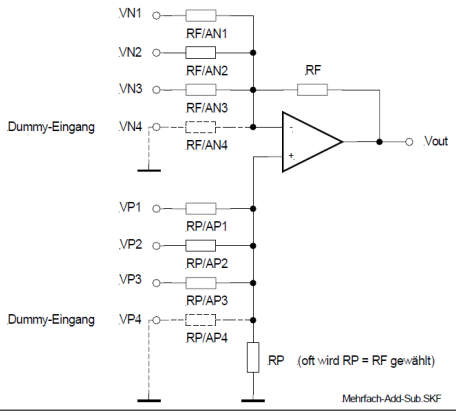


 BY-NC-SA

1.2.6 Mehrfach-Addierer-Subtrahierer

1. Man wählt R_F
2. Man wählt R_P, wobei oft $R_P = R_F$ gesetzt wird. (optional)
3. $R_n = \frac{R_F}{|A_n|}$ oder $R_n = \frac{R_P}{|A_n|}$
4. Verstärkungsbedingung: $A_{N1} + \ldots + A_{Nn} = A_{P1} + \ldots + A_{Pn}$

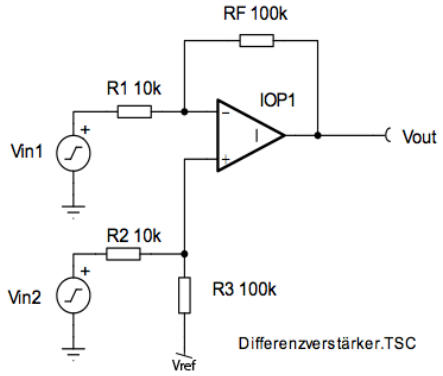
Falls unerfüllt, muss ein Dummyeingang hinzugefügt werden!



1.2.7 Differenzverstärker

Generell:
$v_{out} = \frac{R_1+R_F}{R_1} \cdot (\frac{R_2}{R_2+R_3} \cdot v_{ref} + \frac{R_3}{R_2+R_3} \cdot v_{in2}) - \frac{R_F}{R_1} \cdot v_{in1}$

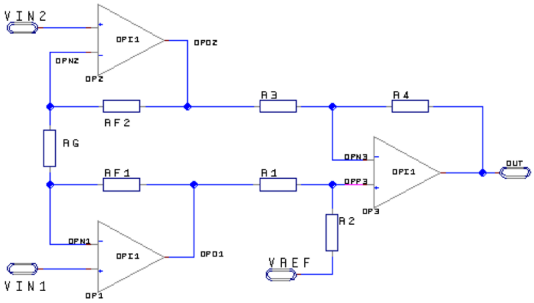
Für $\frac{R_F}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$ und $v_{ref} = 0V$:
$A_{diff} = \frac{v_{out}}{(v_{in2}-v_{in1})} = \frac{R_F}{R_1}$
$v_{out} = \frac{R_F}{R_1} \cdot (v_{in2} - v_{in1})$



1.2.8 Instrumentenverstärker

1. Stufe: Invertierender Verstärker
$\Delta V_{opo} = V_{opo1} - V_{opo2} = (1 + \frac{R_{F1}+R_{F2}}{R_G}) \cdot (V_{in2} - V_{in1})$
2. Stufe: Differenzverstärker (Bedingung: $\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$)
$V_{out} = V_{ref} + \frac{R_4}{R_3} \cdot (1 + \frac{R_{F1}+R_{F2}}{R_G}) \cdot (V_{in2} - V_{in1})$

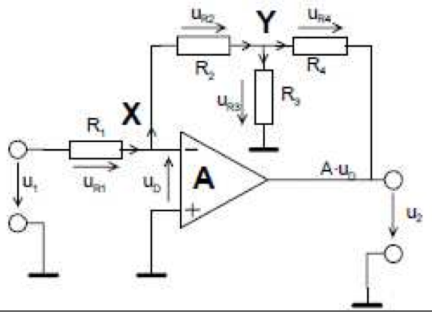
- zur Verstärkung sehr kleiner Differenzspannungen (z.B. Brückensensoren)
- Oft als fertige Bauteile mit externem R_G und Verstärkungen bis 1000.



1.2.9 T-Glied in Rückkopplung

Für $A \to \infty$ (idealer OP) gilt:
$v_u = -\frac{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3}$

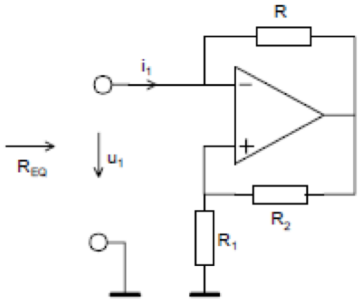
$\Longrightarrow$ hohe Verstärkung mit kleinen Wertunterschieden - z.B.$R_1 = R_3 = 1k\Omega$ und $R_2 = R_4 = 10k\Omega$ ergibt $v_u = -120$ (Vergleich: $v_u = -10$ bei inv. Verstärker)



1.2.10 Negative Impedance Converter

Der Negative Impedance Converter (NIC) stellt einen negativen reellen Widerstand dar. Verwendung: Kompensation parasitärer reeller Widerstände. Nachteil: Masse-Bezug des negativen Widerstands.

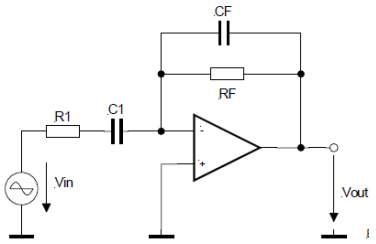
$R_{EQ} = -R \cdot \frac{R_1}{R_2}$



 BY-NC-SA

1.2.11 Differentiator

Beim Differentiator gilt:
$v_{out} = v_N - i_1 \cdot R_F$, wobei $v_N = 0$ und $i_1 = C_1 \cdot \frac{dv_C}{dt}$
Somit folgt:
$v_{out} = -R_F C_1 \frac{dv_{in}}{dt}$

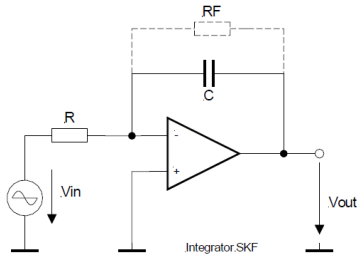


Die Elemente C_F und R_1 sind nicht nötig, doch sie beheben eine eine Reihe Probleme des elementaren Differentiators und fügen eine **Bandpass**-Charakteristik ein.
- Weniger Schwingneigung
- Höherer Eingangswiderstand

$\omega_1 = \frac{1}{R_1 \cdot C_1}$
$\omega_2 = \frac{1}{R_F \cdot C_F}$

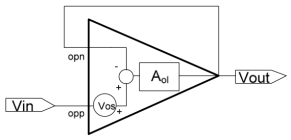
1.2.12 Integrator

$v_{out} = -\frac{1}{C}\int i_C dt + v_0$ $v_{out} = -\frac{1}{RC}\int v_{in} dt + v_0$
$\frac{dv_{out}}{dt} = -\frac{v_{in}}{RC}$
Der Widerstand R_F erzeugt eine **Tiefpass**-Charakteristik.
Ein "ResetSchalter über C kann Verhindern, dass der Integrator an den Anschlag läuft.



1.2.13 Buffer

grosser Eingangswiderstand, kleiner Ausgangswiderstand
Es gilt: $v_{out} = \frac{A_{OL}}{1+A_{OL}}(v_{in} + v_{os})$
$v_{out} = v_{in} + v_{os}$ für grosse A_{ol}



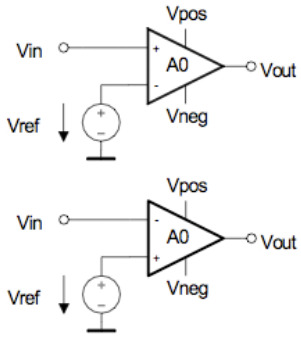
1.2.14 Komparatorschaltung

Nicht-invertierender Komparator

$V_{in} > V_{ref} \pm V_{os}$	$V_{out} = V_{out_{max}} = V_{pos} - V_{rail}$
$V_{in} < V_{ref} \pm V_{os}$	$V_{out} = V_{out_{min}} = V_{neg} + V_{rail}$

Invertierender Komparator

$V_{in} > V_{ref} \pm V_{os}$	$V_{out} = V_{out_{min}} = V_{neg} + V_{rail}$
$V_{in} < V_{ref} \pm V_{os}$	$V_{out} = V_{out_{max}} = V_{pos} - V_{rail}$



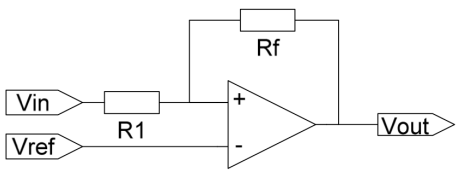
1.3 Schmitt-Trigger

1.3.1 Nicht invertierender Schmitt-Trigger

obere Schaltschwelle $V_{T+} = V_{ref} \cdot \frac{R_1+R_f}{R_f} - V_{out_{min}} \cdot \frac{R_1}{R_f}$

untere Schaltschwelle $V_{T-} = V_{ref} \cdot \frac{R_1+R_f}{R_f} - V_{out_{max}} \cdot \frac{R_1}{R_f}$

Hysteresespannung $V_H = V_{T+} - V_{T-} = (V_{out_{max}} - V_{out_{min}}) \cdot \frac{R_1}{R_f}$

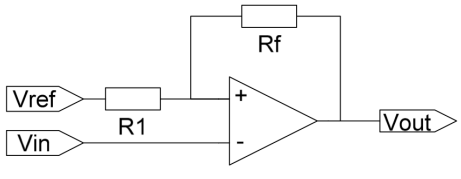


1.3.2 Invertierender Schmitt-Trigger

obere Schaltschwelle $V_{T+} = \frac{V_{ref} \cdot R_f + V_{out_{max}} \cdot R_1}{R_1 + R_f}$

untere Schaltschwelle $V_{T-} = \frac{V_{ref} \cdot R_f + V_{out_{min}} \cdot R_1}{R_1 + R_f}$

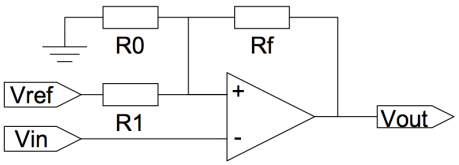
Hysteresespannung $V_H = V_{T+} - V_{T-} = (V_{out_{max}} - V_{out_{min}}) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_f}$



 BY-NC-SA

1.3.3 Invertierender Schmitt-Trigger mit freien Schwellen

Schaltschwelle $\boxed{V_{opp} = V_{ref} \cdot \frac{(R_f // R_0)}{R_1 + (R_f // R_0)} + V_{out} \cdot \frac{(R_1 // R_0)}{R_f + (R_1 // R_0)}}$



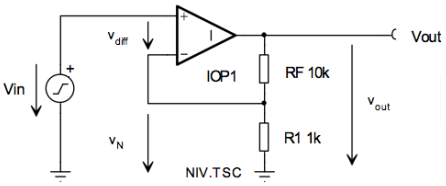
Dimensionierung des Schmitt-Triggers: (Gegeben: V_{ref}, V_{T+}, V_{T-})
1. $V_{out_{max}}$ und $V_{out_{min}}$ ermitteln aus Datenblatt (meistens V_{DD}, GND)
2. R_f wählen: typisch $100k\Omega$
3. Widerstände R_1 und R_0 dimensionieren

1.4 Fehlereinflüsse des Opamp

1.4.1 Verstärkungsfehler bei endlicher Closed-Loop-Verstärkung

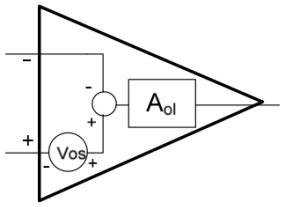
beim nichtinvertierenden Verstärker $A_{CL\ ideal} = \frac{R_F}{R_1} + 1$
beim invertierenden Verstärker $A_{CL\ ideal} = -\frac{R_F}{R_1}$

Beim invertierenden Verstärker ist eine kleine Korrektur anzubringen:
$\frac{1}{A_{CL\ real}} = \frac{1}{A_{CL\ real}} + \frac{1}{nA_{OL}}$



1.4.2 Offsetspannungsfehler

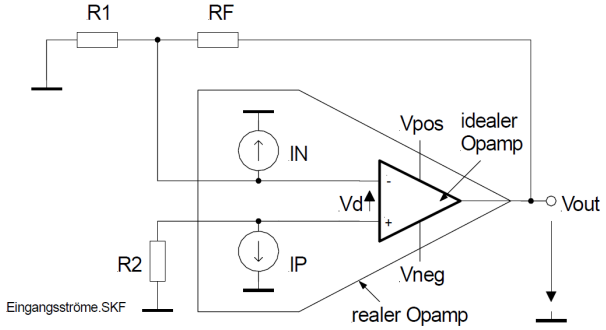
Im Closed-Loop-Betrieb ist die Ausgangs-Fehlerspannung: $V_{out} = V_{OS}\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)$
allgemein: $V_{out} = V_{OS} \cdot {A_{CL}}^{+}$
Im Open-Loop-Betrieb ist die Ausgangs-Fehlerspannung: $V_{out} = V_{OS} \cdot {A_{CL}}^{+}$
Typische Offsetspannung: $V_{OS} \approx 0.5 \ldots 5\ mV$



1.4.3 Eingangsstromfehler

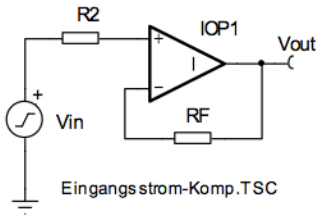
Wenn die Opamp-Eingangsströme gleich gross sind ($I_N = I_P$) und die Gleichstromwiderstände, die von jedem Opamp-Eingang nach Masse führen, ebenfalls gleich gross gewählt werden, heben sich die Ausgangsspannungsfehler, die durch I_N und I_P erzeugt werden, gegenseitig auf.

Allgemeine Formel für den Eingangsstromfehler: $V_{out\ E} = I_N R_F - R_2 I_P \left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)$
Widerstandsbedingung für Eingangsstromkompensation: $R_2 = \frac{R_F R_1}{R_F + R_1} = R_F // R_1$
Typischer Eingangsstromfehler: $I_E = \frac{I_P + I_N}{2} \approx 20 \ldots 200\ nA$



 BY-NC-SA

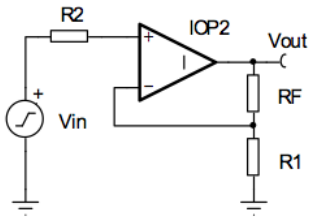
1.4.4 Eingangsstromkompensation ohne AC-Zweige



Spannungsfolger

R_2 sei ein gegebener Quellen-Widerstand
R_F **muss eingefügt werden**

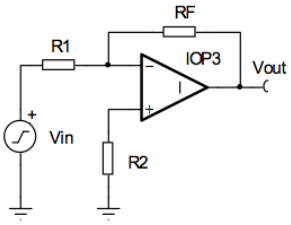
$R_F = R_2$



Nichtinvertierender Verstärker

Hier sei der Quellenwiderstand vernachlässigbar.
R_2 **muss eingefügt werden**

$R_2 = R_F // R_1$



Invertierender Verstärker

R_2 **muss eingefügt werden**

$R_2 = R_F // R_1$

Ausgangsspannungsfehler auf Grund des **Offsetstromes** (nur bei Kompensation(!)): $\boxed{V_{out\ E} = |I_{OS}| \cdot R_F}$

1.4.5 Power Supply Rejection Ratio PSRR

Schwankungen der Speisespannungen können zu Offset am Ausgang führen. Der PSRR beschreibt Unterdrückung solcher Beeinflussungen. Meist kein Problem dank Stützkondensatoren. Allenfalls Probleme bei hohen Frequenzen.
$PSRR_{lin} = \frac{dV_{supply}}{dV_{os}}$

1.4.6 Common Mode Rejection Ratio CMRR

Schwankungen der Eingangsspannungen können am Ausgang einen Offset verursachen. Bei invertierenden Verstärkern irrelevant, da $V_{opn} = \text{konst} = V_{AGND}$.
$CMRR_{lin} = \frac{dV_{CM}}{dV_{os}}$ mit $V_{CM} = V_{opp} = V_{opn}$

1.4.7 Zusammenfassung aller Fehlereinflüsse

$$V_{out\ E\ total} = A_{CL+} \cdot \left[|V_{OS}| + \frac{|V_{CM}|}{CMRR} + \frac{|\Delta V_{Supply}|}{PSRR} \right] + |I_{OS}|\, R_F$$

1.5 Dynamische Eigenschaften des Opamp

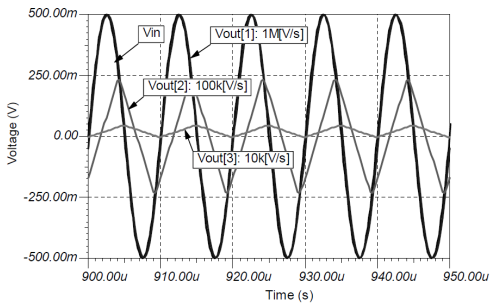
dB-Verstärkung: $A_{dB} = 20 \cdot log A_{lin}$
lineare Verstärkung: $A_{lin} = 10^{\frac{A_{dB}}{20}}$

Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBP (Gain-Bandwidth-Product)

Bandbreite des gegengekoppelten *nichtinvertierenden* Verstärkers: $f_{CL+} = \frac{GBP}{A_{CL\ lin}}$
Bandbreite des gegengekoppelten *invertierenden* Verstärkers: $f_{CL} = \frac{GBP}{|A_{CL\ lin}|+1}$

Für jeden Punkt auf der mit -20dB abfallenden Frequenzgang-Gerade ist das Produkt aus Verstärkung und zugehöriger Frequenz konstant gleich GBP, d.h. $A_{lin} \cdot f = GBP = konst$

1.5.1 Slew-Rate



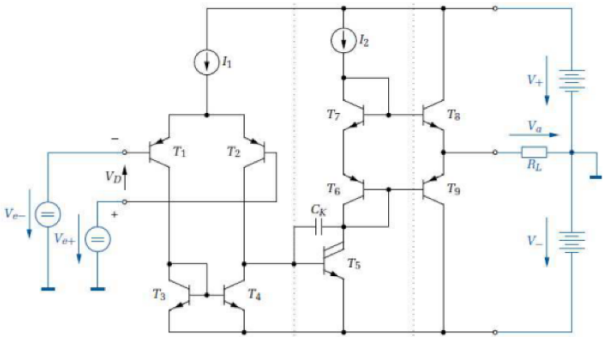
min. SR bei einem Sprungsignal $SR \geqslant \frac{0.8 V_{step}}{t_{anstieg}}$
min. SR bei einem Sinussignal $SR \geqslant V_{amplitude}\omega = V_{amplitude} 2\pi f$
typische Slew-Rate: $SR \approx 0.5 \ldots 50 \frac{V}{\mu s}$

Anstiegszeit des Ausgangs:

$t_{rout} = \sqrt{t_{rin}^2 + t_{rAmp}^2}$
t_{rin} = Anstiegszeit des Eingangssignals
t_{rout} = Anstiegszeit des Ausgangssignals
$t_{rAmp} = \frac{0.35}{f_{bw}}$ = Eigenanstiegszeit des Verstärkers
f_{bw} = Kleinsignalbandbreite des Verstärkers

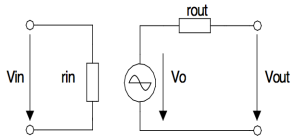
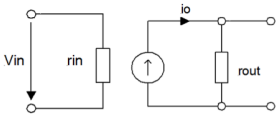
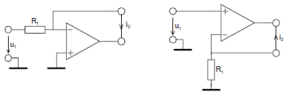
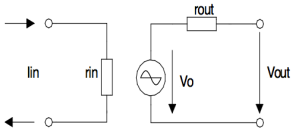
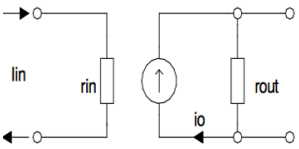
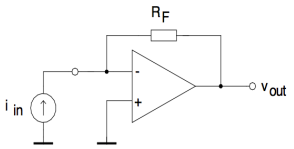
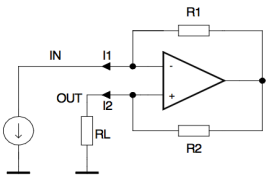
 BY-NC-SA

1.6 Aufbau mit Transistoren



- T_1, T_2: Differenzverstärker
- T_3, T_4: Stromspiegel-Last
- T_5: Darlington-Transistor
- T_6, T_7: Dioden als Level-Shifter
- T_8, T_9: Klasse AB Ausgangsstufe
- I_1, I_2: Stromquellen, realisiert mit Stromspiegeln
- C_k: Kompensations-C, verhindert Oszillation

1.7 Gesteuerte Quellen

Steuergrösse	Ausgangsgrösse	
	V	I
V	Spannungsgesteuerte Spannungsquelle **VCVS** Voltage Controlled Voltage Source	Spannungsgesteuerte Stromquelle **VCCS** Voltage Controlled Current Source
		
	$v_{out} = v_{in} \cdot A_v$ A_v: Spannungsverstärkung	$i_{out} = v_{in} \cdot g_m$ g_m: Transkonduktanz
	Normaler OP-Amp Verstärker	 $I_2 = \frac{V_1}{R_1}$ bzw. $I_2 = -\frac{V_1}{R_1}$
I	Stromgesteuerte Spannungsquelle **CCVS** Current Controlled Voltage Source	Stromgesteuerte Stromquelle **CCCS** Current Controlled Current Source
		
	$v_{out} = i_{in} \cdot r_m$ r_m: Transimpedanz	$i_{out} = i_{in \cdot A_i}$ A_i: Stromverstärkung
	 $v_{out} = -i_{in} \cdot r_F$	 $A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$

 BY-NC-SA

2 Grundlagen Halbleiter

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = n \cdot q \cdot \mu$$
$$\kappa = n_i \cdot q \cdot (\mu_n - \mu_p)$$
$$n_i^2 = n_0 \cdot p_0$$
$$\rho(T) = \rho(T_0) \cdot (1 + \alpha(T - T_0))$$

κ	$[m/\Omega mm^2]$	spezifische Leitfähigkeit
ρ	$[\Omega mm^2/m]$	spezifischer Widerstand
n	$[cm^{-3}]$	Ladungsträgerdichte
n_i	$[cm^{-3}]$	Eigenleitungsdichte
n_0	$[cm^{-3}]$	Elektronendichte
p_0	$[cm^{-3}]$	Löcher-Dichte
q	$[As]$	Elementarladung $q = 1,6 \cdot 10^{-19} As$
μ	$[cm^2/Vs]$	Beweglichkeit der Ladungsträger
l	$[m]$	Länge
A	$[mm^2]$	Fläche
α	$[K^{-1}]$	Temperaturkoeffizient
T	$[K]$	Temperatur

2.1 Silizium

Si-Atom hat 4 Valenzelektronen auf äusserster Schale. Energetisch optimal wäre eine voll besetzte Schale mit 8 Valenzelektronen. Deshalb bildet Silizium ein Kristallgitter, in dem sich zwei benachbarte Si-Atome je ein Valenzelektron.

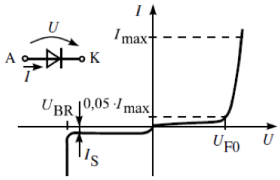
2.2 Dotierung

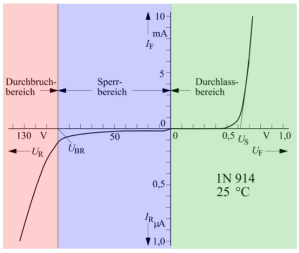
N-Dotiert: höherwertiges Atom mit 5 VE (Donator)
P-Dotiert: tieferwertiges Atom mit 3 VE (Akzeptor)

Starke Dotierung: N^+, P^+
Schwache Dotierung: $N'-$, P^-

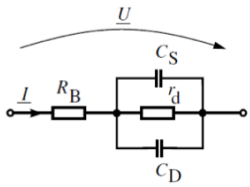
3 Dioden

Sperrstromdichte v. Si-Dioden: $10^{-11} \frac{A}{cm^2}$



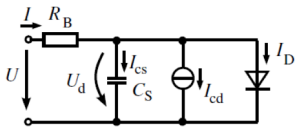


3.1 Kleinsignal-ESB



R_B: Bahnwiderstand (inkl. Zuleitung, Kontaktierung)
r_d: differentieller Widerstand des pn-Übergangs
C_D: Diffusionskapazität (bei pos. Diodenspannung)
C_S: Sperrschichtkapazität (bei neg. Diodenspannung)
$r_d = \frac{dU}{dI}$ (Tangentensteigung im AP)

3.2 Grosssignal-ESB



Gleichstromwiderstand $R_D = \frac{U_0}{I_0}$ (im AP)
$I = I_S \cdot (e^{\frac{U}{m \cdot U_T}} - 1)$
I_S: Sättigungssperrstrom (Bereich: pA)
m: Emissionskoeffizient (meistens: $m = 1$)
$U_T = \frac{kT}{q} \approx 26mV$
beim Umschalten bewirken die Kapazitäten C_S und C_D eine Verzögerung

3.3 Temperaturverhalten

Faustregel: Durchflusspannung U_{F0} ändert um $-2\frac{mV}{K}$! Der Sperrstrom verdoppelt sich je Temperaturunterschied à $10K$

Thermospannung U_T:

$$U_T = \frac{k_B \cdot T}{q}$$
$$U_{T_{23°C}} = 25,5mV$$

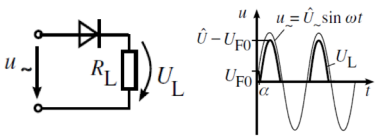
$k_B = 1,38065 \cdot 10^{-23} J/K$ Boltzmann-Konstante
$q = 1,60218 \cdot 10^{-19} As$ Elementarladung

 BY-NC-SA

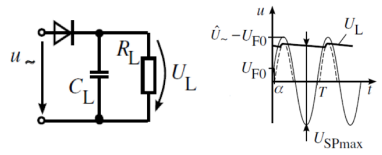
3.4 Spezielle Dioden und Anwendungen

3.4.1 Gleichrichter-Diode

Einweg-Gleichrichter

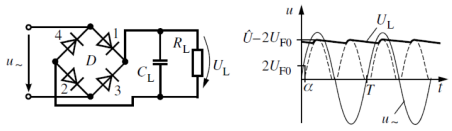


Gleichrichter mit Glättung



Bedingung: $\tau = R_L \cdot C_L \gg T$

Brücken-Gleichrichter



3.4.2 PIN-Diode

Für höhere Spannungsfestigkeit wird eigenleitende Halbleiterzone, die sog. Intrinsic-Zone zwischen p- und n-dotierte Zone gelegt. Die Intrinsic-Zone ist im Sperrbetrieb sehr hochohmig und reduziert somit die el. Feldstärke auf ein akzeptables Mass.

3.4.3 Kapazitätsdiode

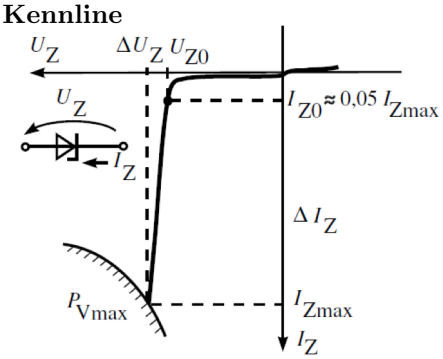
Kapazitätsdioden (Varicaps) werden in Sperrichtung betrieben. Die Kapazität hängt dabei von der Spannung U_{SP} ab. Anwendung: Einstellen der Schwingfrequenz in Oszillatoren

3.4.4 Tunneldiode

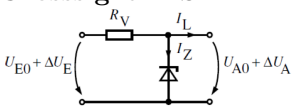
Tunneldioden besitzen eine sehr hohe Störstellenkonzentration und einen steilen Dotierungsverlauf.

3.4.5 Zener-Diode

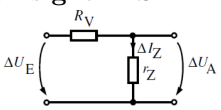
Kennline



Grosssignal-ESB:



Kleinsignal-ESB:



Anstieg der Durchbruchkennlinie bei spezieller Dotierung. Anwendung: Spannungsbegrenzung und -stabilisierung

Temperaturkoeffizient abhängig von Zenerspannung. 0 bei $5.6V$ - darüber: negativer Temperaturkoeffizient

3.4.6 Schottky-Diode

Anstatt der p-Zone hat die Schottky-Diode eine Metall-Zone. Weil vom Metall keine Löcher in den Halbleiter diffundieren, gibt es keine Diffusionskapazität und die Diode bekommt ein sehr schnelles Schaltverhalten und eine kleine Durchflussspannung $U_{F0} \approx 0,3V$.

3.4.7 Leuchtdiode

Leuchtdioden werden aus verschiedenen Substraten (Halbleitern) hergestellt, z.B. GaAs (Gallium-Arsenid), InGaN (Indium-Gallium-Nitrid) um verschiedene Farben (Wellenlängen) zu produzieren. Typisch sind:

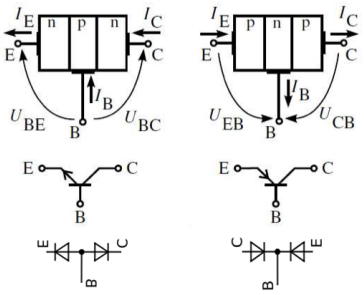
infrarot	$900nm$	GaAs	$1,0 - 1,5V$
rot	$635nm$	GaAsP	$1,6 - 2.2V$
grün	$565nm$	GaP	$2,0 - 2,4V$
blau	$490nm$	InGaN	$3,2 - 4,0V$

3.4.8 Photodiode

Photodioden werden in Sperr-Richtung angeschlossen. Der Sperrstrom erhöht sich bei Lichteinfall. Meistens werden Photodioden mit einen OP-Verstärker (als Transimpedanzverstärker) benutzt.

 BY-NC-SA

4 Bipolartransistoren



Links: NPN-Transistor
Rechts: PNP-Transistor

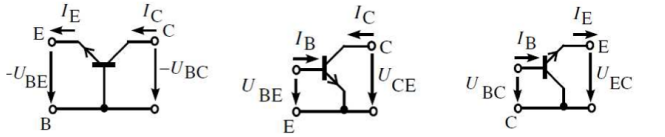
Die Schichten sind ungleich dick (Basis sehr dünn) und unterschiedlich dotiert. Sobald die BE-Diode Leitet, werden Elektronen vom Kollektor zur Basis gezogen und fliessen dann weiter zum Emitter. So steuert der Basisstrom I_B den Kollektorstrom I_C.

4.1 Betriebszustände

Normalbetrieb (Verstärker)	$V_{BE} > 0, V_{BC} < 0$
Sättigung (Schalter EIN)	$V_{BE} > 0, V_{BC} > 0$
Sperrbetrieb (Schalter AUS)	$V_{BE} < 0, V_{BC} < 0$
Inversbetrieb (k. Anwendung)	$V_{BE} < 0, V_{BC} > 0$

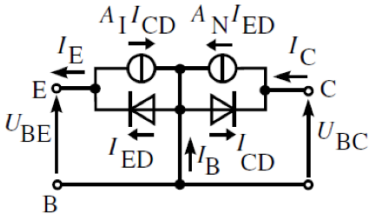
4.2 Stromverstärkungs-Faktoren

Basisschaltung | Emitterschaltung | Kollektorschaltung



$A_N = \frac{I_C}{I_E}$ $B_N = \frac{I_C}{I_B} = \frac{A_N}{1-A_N}$ $C_N = \frac{I_E}{I_B} = \frac{1}{1-A_N}$

4.3 Ebers-Moll-Modell



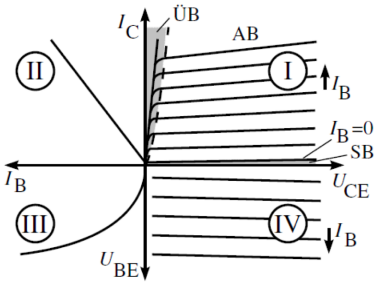
Kollektorstrom: $\boxed{I_C = A_N I_{E_{sat}} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right) - I_{C_{sat}} \left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1\right)}$

Emitterstrom: $\boxed{I_E = I_{E_{sat}} \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right) - A_I I_{C_{sat}} \left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1\right)}$

Basisstrom: $\boxed{I_B = I_E - I_C}$

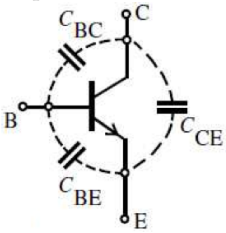
4.4 Kennlinien & Formeln

Ausgangskennlinie (I)
typ.: $U_{CE_{sat}} = 0.3V$ und Ausgangswiderstand $r_{CE} \approx \frac{U_{Early}}{I_{C0}}$
Stromübertragungskennlinie (II)
Kollektorstrom: $I_C = B_N \cdot I_B + I_{CE0} \approx B_N \cdot I_B$
Eingangskennlinie (III)
Basisstrom: $I_B = I_{B_{sat}} \cdot (e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1)$
Kleinsignalwiderstand: $r_{BE} = \frac{m \cdot U_T}{I_{B0}}$ mit I_{B0}: Arbeitspunktstrom
Spannungsrückwirkungskennlinie (IV)
$U_{BE} = \eta \cdot U_{CE}$ mit $\eta \approx 0.1\%$ (kann meist vernachlässigt werden!)

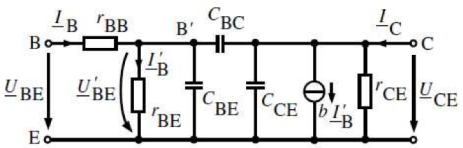


4.5 Frequenzverhalten

Kapazitäten:



Ersatzschaltbild:

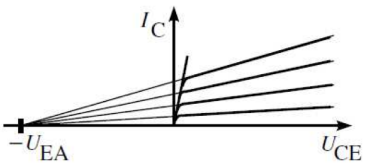


$$\underline{h}_{21e}(\omega) \approx \frac{b}{1 + r_{BE} \cdot (C_E + C_{BE}) \cdot j\omega}$$

Bei der Transitfrequenz ω_t ist $h_{21e} = 1$.

 BY-NC-SA

4.6 Early-Effekt



Anstieg der Ausgangskennlinien beruht auf Veränderung der Basisweite infolge der Spannungsabhängigkeit der Sperrschichtweite der Basis-Kollektor-Diode.
U_{EA}: Early-Spannung, Schnittpunkt der Ausgangskurven

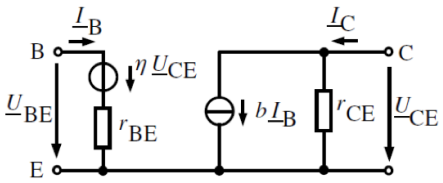
Modellerweiterung zur Berücksichtigung des Early-Effekts:
$I_C = (B_N I_B + I_{CE_0})(1 + \frac{U_{CE}}{U_{EA}})$

4.7 Temperaturverhalten

Die maximale Leistung P_V des Transistors muss stets kleiner als $U_{CE} \cdot I_C$ sein. (Näherung) Zusätzlich muss die Wärme auch über das Gehäuse abgeführt werden können. Deshalb darf P_V maximal $\frac{T_{max} - T_{amb}}{R_{th}}$ sein. (R_{th}: Thermischer Widerstand des Gehäuse)
Der Transistor hat grundsätzlich das gleiche Temperaturverhalten wie die Diode. Somit gilt auch hier: V_{BE} ändert um $-2\frac{mV}{K}$.
Somit gilt für den Stromverstärkungsfaktor: $B_N = B_N(T_0) \cdot e^{C_b(T-T_0)}$ mit $C_b \approx 0.6\% \cdot K^{-1}$.

4.8 Kleinsignalverhalten

Beim Kleinsignal-Ersatzschaltbild wird das Verhalten des Transistors im Arbeitspunkt approximiert . Dazu wird ein Arbeitspunkt AP im Kennlinienfeld eingezeichnet und dort linearisiert.



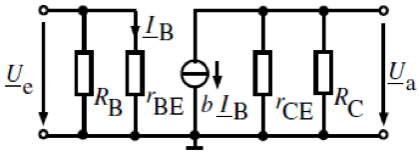
$h_{11e} = r_{BE} = \frac{dU_{BE}}{dI_B} = \frac{m \cdot U_T}{I_{B_0}}$
$h_{12e} = \eta = \frac{dU_{BE}}{dU_{CE}} \approx 0$
$h_{21e} = b = \frac{dI_C}{dI_B} = B_N(1 + \frac{U_{CE_0}}{U_{EA}}) \approx B_N$
$h_{22e} = \frac{1}{r_{CE}} = \frac{dI_C}{dU_{CE}} = \frac{I_{C0}}{U_{EA}}$
$S = \frac{b}{r_{BE}} = \frac{I_C}{m \cdot U_T}$

r_{BE}: Kleinsignal-Eingangswiderstand
η: Kleinsignal-Spannungsrückwirkung
b: Kleinsignal-Stromverstärkung
r_{CE}: Kleinsignal-Ausgangswiderstand
S: Kleinsignal-Steilheit

Kleinsignalmodell ohne Rückwirkung: $\eta \cdot U_{CE}$ wird weggelassen, weil $\eta \approx 0$. Somit gilt:

$\boxed{U_{BE} = r_{BE} \cdot I_B}$ und $\boxed{I_C = b \cdot I_B + \frac{1}{r_{CE}} \cdot U_{CE}}$ und $\boxed{b \cdot \underline{I}_B = S \cdot \underline{U}_{BE}}$

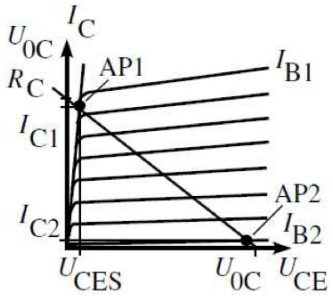
Somit gilt für die **Emitterschaltung**:



$U_a = -b \cdot I_B \cdot (R_C || r_{CE})$ und $I_B = \frac{U_e}{r_{BE}}$
somit: $V_u = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{b(R_C || r_{CE})}{r_{BE}}$

4.9 Transistor als Schalter

Der Transistorschalter besitzt zwei stationäre Arbeitspunkte:



AP1: Arbeitspunkt EIN, hoher Stromfluss, Transistor übersteuert.
Sättigungsspannung: $U_{CE_{sat}} \approx 100mV$
Übersteuerungsgrad: $m = \frac{B_N \cdot I_{B_1}}{I_{C_1}}$ mit $I_{B_1} = \frac{U_{E_1} - U_{BE_1}}{R_B}$ und $U_{C_1} = \frac{U_{0_C} - U_{CE_1}}{R_C}$

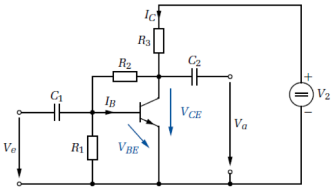
AP2: Arbeitspunkt AUS, kein Stromfluss, Transistor gesperrt.
$I_B = 0$, $I_C = 0$, $U_{out} = U_{0_C}$

4.9.1 Dynamisches Verhalten

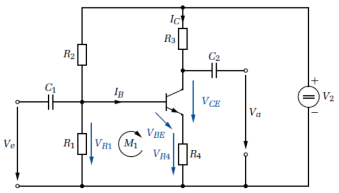
Das zeitliche Verhalten bei Schaltvorgängen wird in erster Linie durch die Transistorkapazitäten bestimmt. Beim Einschaltvorgang tritt zuerst eine Einschaltverzögerung t_d auf (bis I_C überhaupt reagiert), dann dauert es eine Anstiegszeit t_a bis der Strom I_C erreicht ist. Beim Ausschaltvorgang passiert eine Speicherzeit t_s lang nichts, dann braucht es eine Abfallzeit t_f bis der Strom $I_C = 0$ wird.
Zur Reduktion der Speicherzeit t_s kann eine Schottkydiode von der Basis zum Kollektor geschalten werden. Somit wird U_{BC} limitiert und die Ladung verkleinert. Diese Methode wurde in der 74S- und der 74LS-Familie eingesetzt.

 BY-NC-SA

4.9.2 Gegenkopplung



Gegenkopplung durch R_2



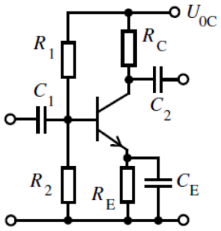
Gegenkopplung durch R_4

$V_{out} = -\frac{R_3}{R_4} \cdot V_{in}$

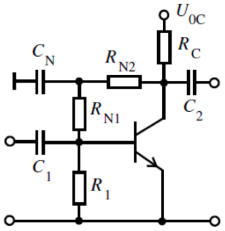
Motivation: Durch Gegenkopplung wird die Verstärkung des Transistors kleiner, doch Bauteiltoleranzen, Temperaturschwankungen und Verzerrungen werden minimiert.

4.9.3 Transistorverstärkerschaltungen

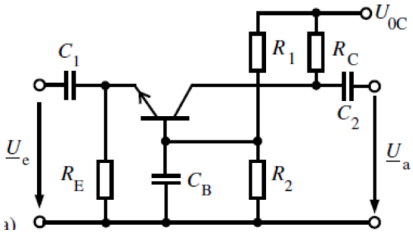
Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung



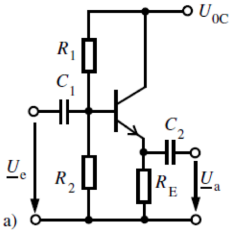
Emitterschaltung mit Spannungsgegenkopplung



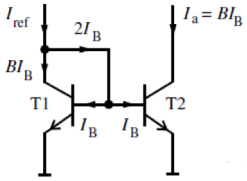
Basisschaltung



Kollektorschaltung

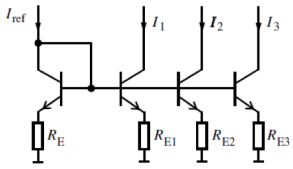


4.9.4 Stromspiegel



$I_a \approx I_{ref}$, **da** $B \gg 1$ **und** $I_B \ll I_{ref}$

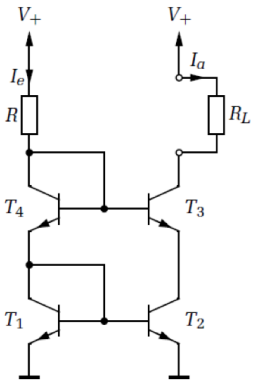
4.9.5 Widlar-Stromspiegel



Ströme $I_1 \dots I_3$ werden einzeln durch Widerstandsverhältnisse gewichtet:

$$I_1 = I_{ref} \cdot \frac{R_E}{R_{E1}}$$

4.9.6 Stromspiegel mit Kaskode



T_1 als Diode geschaltet, bestimmt V_{BE2} und damit I_C von T_2, T_3

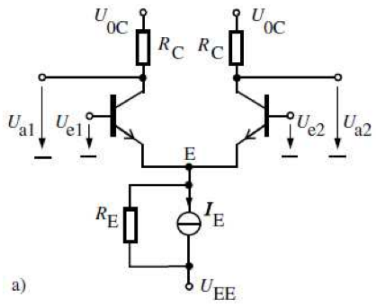
T_4 als Diode geschaltet, bestimmt V_{BE3} und damit den Arbeitspunkt

T_3 in Basisschaltung, tiefer Eingangswiderstand, kaum Änderung von U_{C2} und damit kaum Stromänderung

4.9.7 Differenzverstärker

Der Differenzverstärker ist symmetrisch, d.h. $U_{a1} - U_{a_{AP}} = U_{a_{AP}} - U_{a2}$

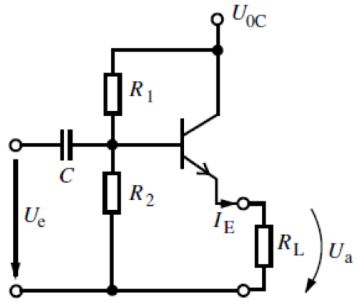
differentieller Eingangswiderstand	$r_e = 2 \cdot r_{BE}$
differentieller Ausgangswiderstand	$r_a = (R_C \| \| r_{CE})$
Differenz-Verstärkung	$v_d = \frac{U_{A_d}}{U_{E_d}} = -S \cdot r_A \approx -S \cdot R_C$
Gleichtaktverstärkung	$v_{gl} = -\frac{R_C}{2 \cdot R_E}$
Gleichtaktunterdrückung	$G = \frac{v_d}{v_{gl}} = 2 \cdot S \cdot R_E$



 BY-NC-SA

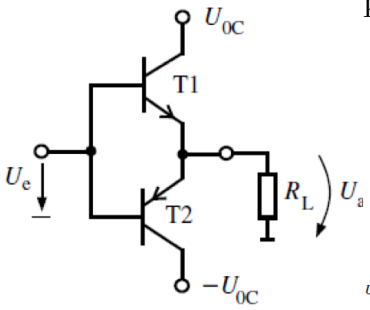
4.9.8 Leistungsendstufen

Klasse A-Verstärker



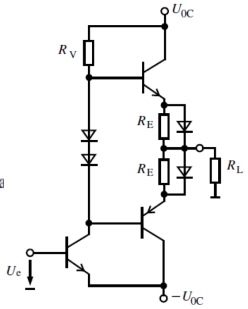
$\eta = \frac{P_\sim}{P_=} \leqslant 25\%$

Klasse B-Verstärker

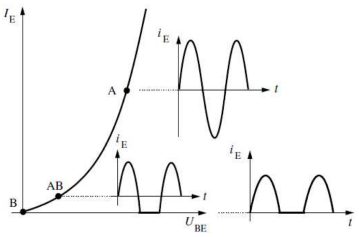


$\eta \leqslant 78,5\%$

Klasse AB-Verstärker

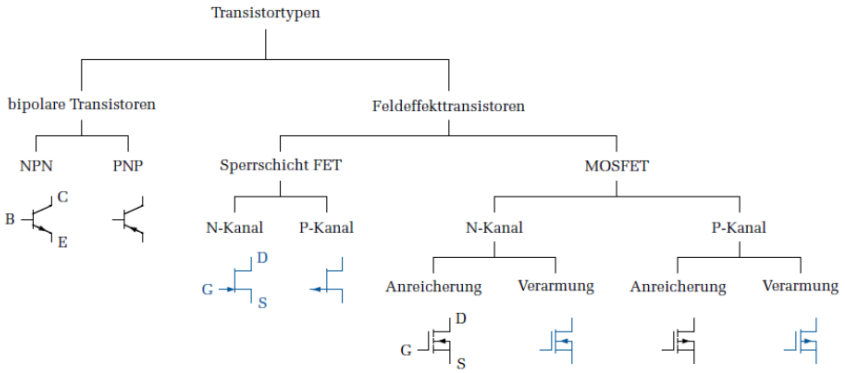


Arbeitspunkte jeweiler Klassen



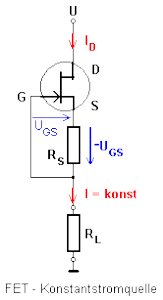
5 Feldeffekt-Transistoren

5.1 Übersicht

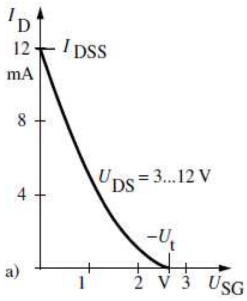


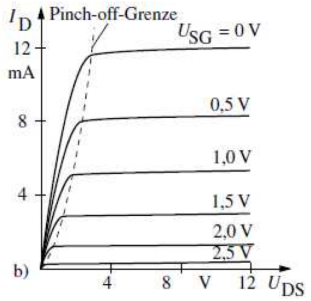
5.2 Junction FET

JFET als **Konstantstromquelle**:
benötigter Strom $\boxed{I_D = \frac{U_{GS}}{R_S}}$
U_{GS} entsprechend benötigem Strom aus Kennlinie lesen
bei der Pinch-off-Grenze (Abschnürgrenze) sperrt der JFET



FET - Konstantstromquelle

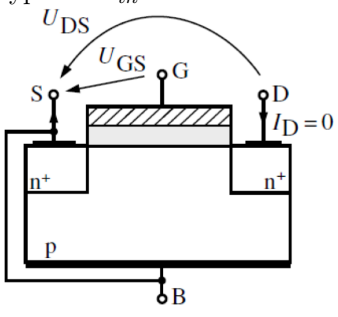




5.3 MOS-FET

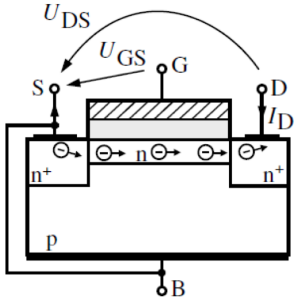
Sperrbereich

$V_{GS} < V_{th} \rightarrow I_D = 0$
typische $V_{th} = 0.5 \ldots 1.5V$



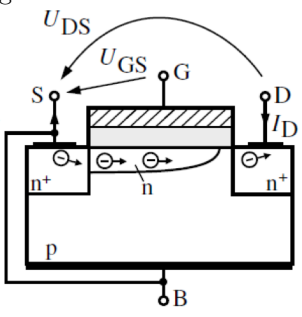
Widerstands-/Triodenbereich (linear)

$V_{GS} > V_{th}$ und $V_{DS} > 0$
$\rightarrow I_D$ fliesst



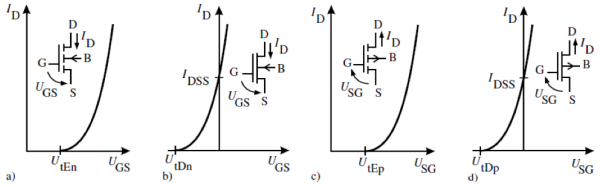
Sättigungs-/Pentodenbereich

$V_{DS} > V_{GS} - V_{th}$ Kanal wird abgeschnürt



 BY-NC-SA

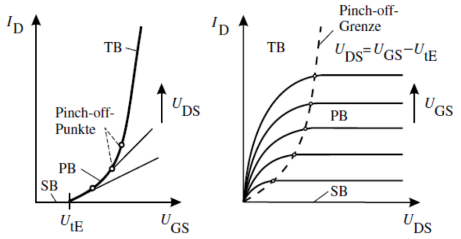
5.3.1 Steuerkennlinien von verschiedenen MOSFETs



a) n-Kanal Anreicherungs-Typ (selbstsperrend)
b) n-Kanal Verarmungs-Typ (selbstleitend)
c) p-Kanal Anreicherungs-Typ (selbstsperrend)
d) p-Kanal Verarmungs-Typ (selbstleitend)

5.3.2 Berechnung des Drainstromes I_D

$$I_D = \begin{cases} 0 & \text{für } V_{GS} \leqq V_{th} \\ \textbf{Sperrbereich} & \\ \beta \cdot (V_{GS} - V_{th})^2 \cdot (1 + \lambda \cdot V_{DS}) & \text{für } 0 \leqq V_{GS} - V_{th} \leqq V_{DS} \\ \textbf{Pentodenbereich PB Sättigungsbereich} & \\ \beta \cdot (2(V_{GS} - V_{th})V_{DS} - V_{DS}^2) \cdot (1 + \lambda \cdot V_{DS}) & \text{für } 0 \leqq V_{GS} - V_{th} \geqq V_{DS} \\ \textbf{Triodenbereich TB linearer Bereich} & \end{cases}$$



b: Kanalbreite
L: Kanallänge
μ_n: Leitfähigkeit Kanal
ϵ_{ox}: Dielektrizität Oxidschicht
λ: Pinch-off-Konstante
d_{ox}: Oxiddicke
V_{th}: Threshold-Spannung
β: Steilheitsparameter
K: Steilheitskoeffizient

Steilheitsparameter $\boxed{\beta = \frac{K}{2} = \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{2 d_{ox}} \frac{b}{L}}$

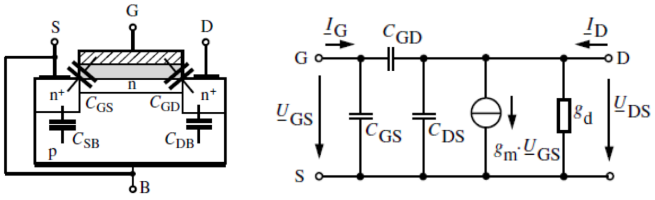
5.3.3 Kleinsignalmodell des MOSFET

Steilheit $\boxed{S = g_m = 2\beta(V_{GS} - V_{th}) = \sqrt{4\beta \cdot I_D}}$

Ausgangsleitwert $\boxed{g_d = \beta\lambda(V_{GS} - V_{th})^2}$

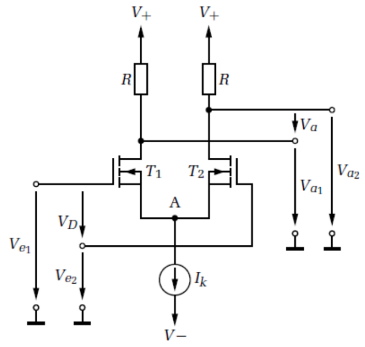
Drain-Source-Widerstand $\boxed{r_{DS} = \frac{1}{\lambda \cdot I_{D0}}}$

Gate-Source-Spannung $\boxed{V_{GS} \cong \sqrt{\frac{I_D}{\beta}} + V_{th}}$



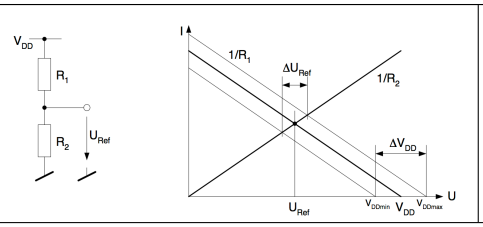
5.3.4 Differenzverstärker

Ausgangswiderstand $r_{out} = R // r_{DS}$
Verstärkung $A_D = -\frac{S}{2} \cdot R$
Ausgangsdifferenzspannung $V_{out_{diff}} = A \cdot V_{in_{diff}}$

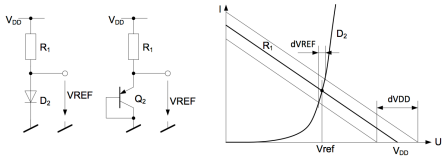
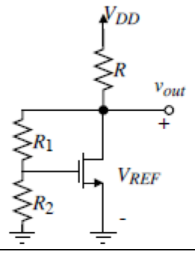
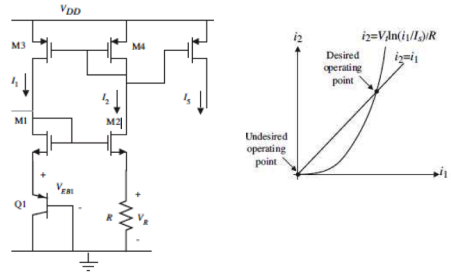
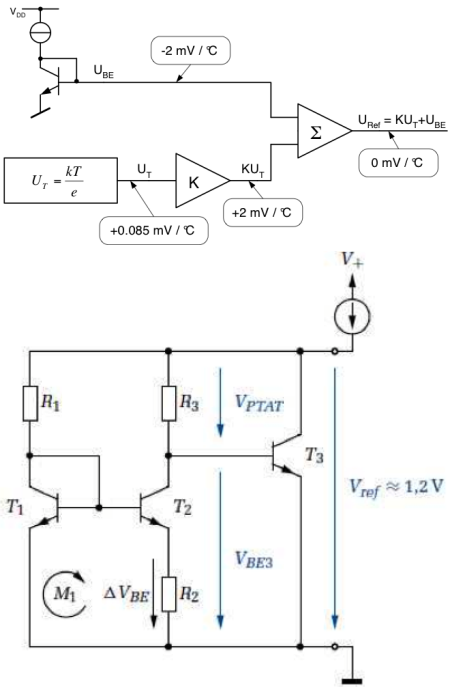
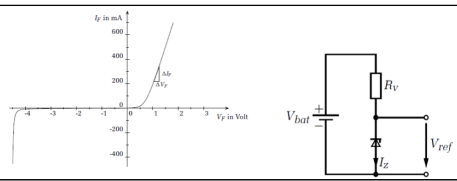


6 Referenzspannungen

6.1 Verschiedene Arten der Rerferenzspannungserzeugung

Einfachste „Referenzspannungsquelle“		$S_{V_{DD}}^{U_{Ref}} = \frac{\frac{\Delta U_{Ref}}{U_{Ref}}}{\frac{\Delta V_{DD}}{V_{DD}}} = 1$ S: Sensitivität: Relative Änderung des Ausgangs zu Relativer Änderung des Eingangs

 BY-NC-SA

Dioden Referenz		$U_{Ref} = U_{EB} = \frac{kT}{e} \ln \frac{I}{I_s}$ für $V_{DD} \gg U_{EB}$ $S_{V_{DD}}^{U_{Ref}} = \frac{1}{\ln \frac{I}{I_S}} < 1$
MOSFET Referenz		$V_{REF} \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{GS}$ $V_{GS} \approx$ konst. $\Leftrightarrow$ V_{out} konst. V_{GS} hat grosse Toleranzen $\Leftrightarrow$ eher unüblich
Bootstrap Referenz		$I_1 = I_2$ $I_2 \cdot R = m \cdot U_T \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_S}\right)$ $U_T = \frac{kT}{q}$ Stromspiegel (PTAT-Stromquelle) (PTAT: Proportional To Absolute Temperature)
Bandgap Referenz		Addition aus zwei Spannungen mit umgekehrten, gleich grossen Temperatur-Koeffizienten: 1. Diodenspannung mit $-2\frac{mV}{K}$ (hier: U_{BE3}) 2. PTAT-Quelle mit $V_T = \frac{kT}{q} \Rightarrow +0.085\frac{mV}{K}$ **Herleitung:** Generell ist $I_C = B{\cdot}I_{BS}\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right) \approx B{\cdot}I_{BS}{\cdot}e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$ Damit wird $\frac{I_{C1}}{I_{C2}}$ zu $e^{\frac{U_{BE1}-U_{BE2}}{U_T}}$ und $\Delta U_{BE} = U_{BE1} - U_{BE2} = U_T \ln\left(\frac{I_{C1}}{I_{C2}}\right)$ Ist das Verhältnis $\frac{I_{C1}}{I_{C2}}$ konstant, was beim Stromspiegel erfüllt ist, so hängt ΔU_{BE} wegen $U_T = \frac{k{\cdot}T}{q}$ nur von der absoluten Temperatur T ab ist somit eine PTAT-Quelle. Weil $I_{R3} \approx I_{R2}$ hängt auch $U_{PTAT} = I_{R3} \cdot R_3$ nur von der absoluten Temperatur T und ist somit eine PTAT-Quelle. $U_{Ref} = U_{PTAT} + U_{BE3}$ ist also die Addition einer PTAT-Quelle und einer Diodenspannung und somit praktisch temperaturunabhängig mit $U_{Ref} \overset{!}{\approx} 1,2V$. *Oft als integrierte Bauteile erhältlich.*
Zenerdiode Referenz		Häufigste Spannung: $5,6V$ (minimaler Temperaturkoeffizient)

 BY-NC-SA

7 Spannungsregler/Stromversorgung

7.1 Lineare Spannungsregler

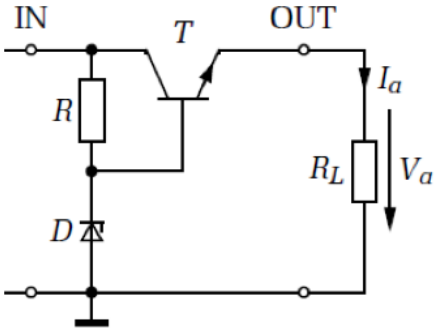
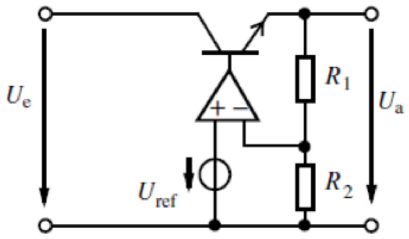
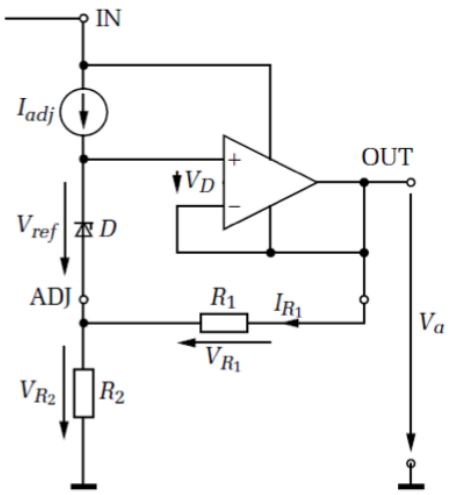
Für alle linearen Spannungsregler gilt:

$$P_V = (V_E - V_a) \cdot I_a$$

Einsatz für geringer Spannungsunterschied zwischen Eingangsspannung und der geregelten Ausgangsspannung

7.1.1 Qualitätsmasse

Relativer Stabilisierungsfaktor	$S' = \frac{\frac{\Delta U_e}{U_e}}{\frac{\Delta U_a}{U_a}}$
Temperaturkoeffizient	$TK_U = \frac{1}{U_a} \cdot \frac{dU_a}{dT}$
Dynamischer Ausgangswiderstand	$r_a = \frac{dU_a}{dI_a}$

Spannungs-stabilisierung mit Transistor		$U_A = U_Z - U_{BE}$ $R_V = \frac{U_E - U_Z}{I_Z + I_B}$ $I_B = \frac{I_C}{B}$ $I_C \approx I_E = I_L$ $R_i \approx \frac{r_Z}{\beta}$ U_Z: Z-Dioden-Spannung I_Z: Strom durch die Z-Diode R_i: Innenwiderstand der Schaltung r_Z: dyn. Innenwiderstand der Z-Diode B: Gleichstromverstärkung β: Dynamische Verstärkung
Lineare Regler		$U_a = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot U_{ref}$ Erhältlich als integrierte Regler, z.B. 78xx Spannungsabfall $\approx 2V$ Low-Dropout-Regler (LDO): PMOS-FET anstatt Transistor
Lineare Regler mit einstellbarer Ausgangsspannung		Adjust-Pin (ADJ) zum Anschluss der externen Widerstände R_1, R_2 $U_a = U_{R_1} + U_{R_2} = U_{ref} + R_2 \cdot \left(\frac{U_{ref}}{R_1} + I_{adj}\right)$ für $I_{adj} \ll I_{R_1}$ gilt: $U_a = U_{ref} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

 BY-NC-SA

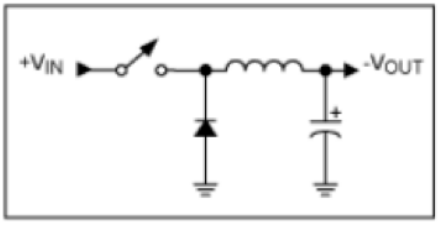
7.2 Schaltregler

7.2.1 Grundprinzip

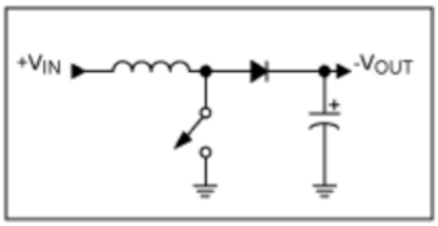
Energie wird in verlustarmem Element zwischengespeichert und auf gewünschter Spannung stabilisiert. Als Energiespeicher kommen in Frage: **Kondensatoren** für kleine Leistungen und **Spulen** für mittlere bis grosse Leistungen. Übliche Schaltfrequenzen liegen im Bereich von $200kHz$.

Energie wird im Magnetfeld gespeichert: $E_L = \frac{L}{2} \cdot i_L^2$
Spannung über Spule bewirkt Stromänderung: $I_L = \frac{1}{L} \int V_L(t)\,dt$ oder $V_L = L \cdot \frac{d}{dt} I_L(t)$
Kondensator am Ausgang stabilisiert Spannung ($E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$)

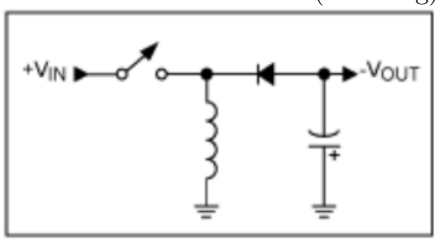
Abwärtswandler (Step-Down, Buck Converter)



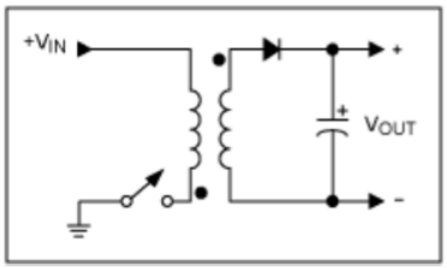
Aufwärtswandler (Step-Up, Boost Converter)



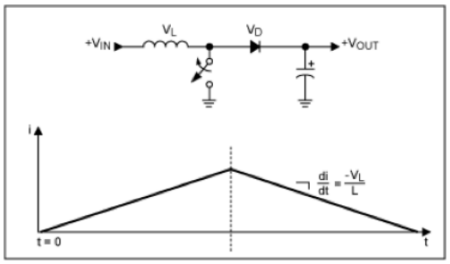
Invertierender Wandler (Inverting)



Sperrwandler (Flyback Converter)

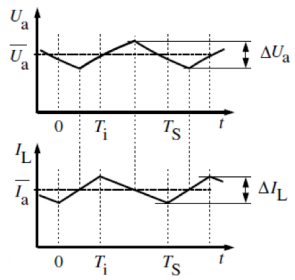


7.3 Aufwärtswandler



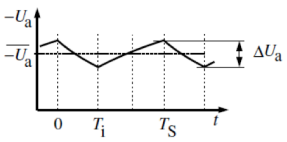
Ladephase (Switch on)	$\Delta I_{L_{on}} = \frac{1}{L} \cdot U_{in} \cdot t_{on}$
Entladephase (Switch off)	$\Delta I_{L_{off}} = \frac{1}{L} \cdot (U_{in} - U_{out}) \cdot t_{off}$
Gleichgewicht	$\Delta I_{L_{on}} = -\Delta I_{L_{off}}$
Ausgangsspannung	$U_{out} = U_{in} \cdot \left(1 + \frac{t_{on}}{t_{off}}\right)$

7.4 Abwärtswandler



Schalter geschlossen	$\Delta I_{L_{on}} = \int_0^{T_i} (U_e - U_a)dt = \frac{1}{L} \cdot (U_e - U_a) \cdot T_i$
Schalter offen	$\Delta I_{L_{off}} = \int_{T_i}^{T_s} (U_a + U_{F_0} dt = \frac{1}{L} \cdot (U_a - U_{F_0}) \cdot (T_s - T_i)$
Bilanz	$U_a = \frac{T_i}{T_s} \cdot U_e - \left(1 - \frac{T_i}{T_s}\right) \cdot U_{F_0} \approx \frac{T_i}{T_s} \cdot U_e$

7.5 Invertierender Wandler

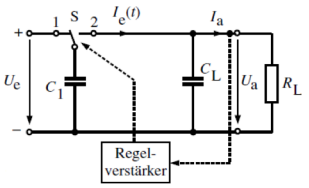


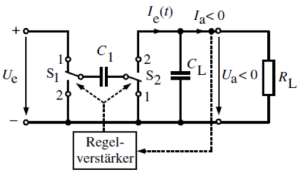
$$U_a = -\frac{T_i}{T_s} \cdot U_e$$

 BY-NC-SA

7.6 Ladungspumpen

Prinzip: Regelung der Ausgangsspannung durch Ändern der Schaltfrequenz





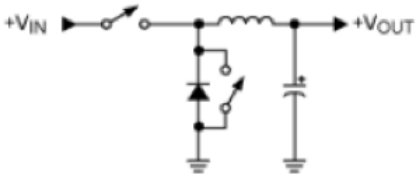
$$\Delta U_a = \frac{U_e - U_a}{1 + \frac{C_L}{C_1}}$$

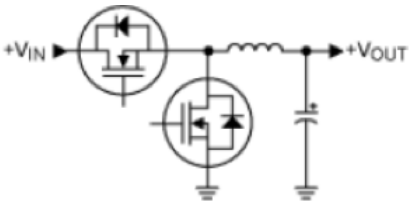
$$\Delta Q = C_L \cdot \Delta U_a = \frac{C_L \cdot C_1}{C_L + C_1}(U_e - U_a)$$

$$I_a = I_e = \frac{\Delta Q}{T_s} = \frac{C_L \cdot C_1}{C_L + C_1}\frac{U_e - U_a}{T_s}$$

7.7 Effizienzsteigerung

7.7.1 MOSFET statt Diode

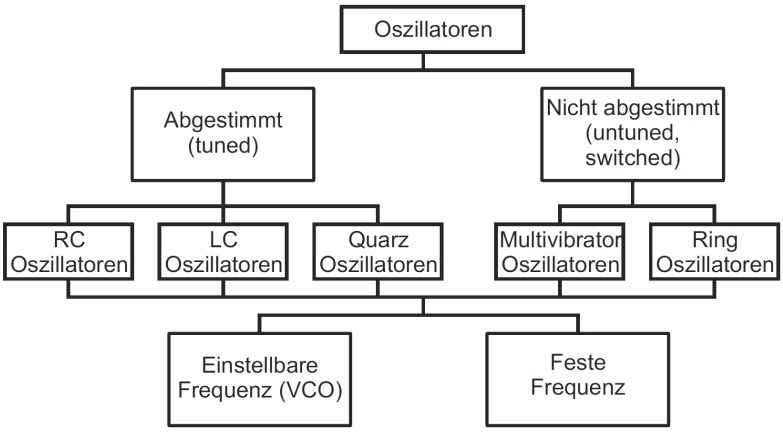




- Diode hat Spannungsabfall
  - Silizium-Diode: 0.7V
  - Schottky-Diode: 0.3V
  - MOSFET hat „nur“ On-Widerstand $R_{DS_{on}}$
- Umschalten vom Substratpotential beim Längstransistor nötig
  - Synchronous rectifier

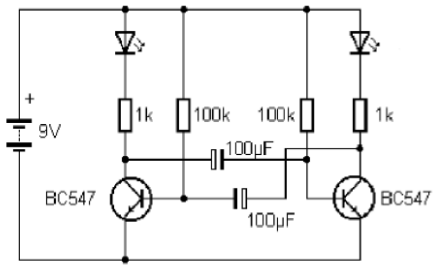
8 Oszillatoren

8.1 Typen



8.2 Untuned Oscillators

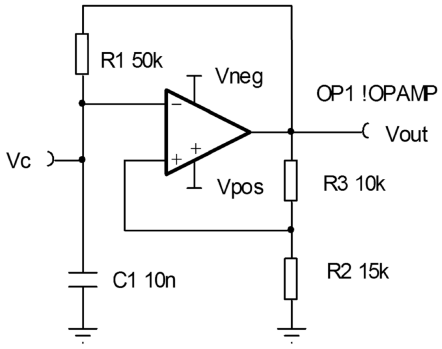
8.2.1 Astabiler Multivibrator mit Transistor

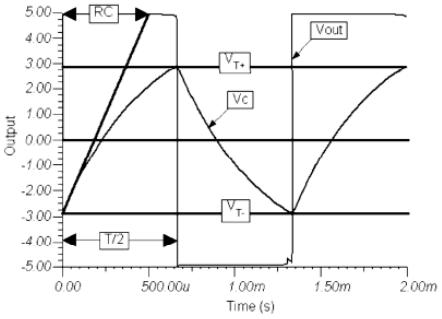


$$t_1 = t_2 = 0.7 \cdot 100k\Omega \cdot 100\mu F$$
$$T = t_1 + t_2$$

 BY-NC-SA

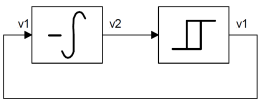
8.2.2 Astabiler Multivibrator mit Komparator

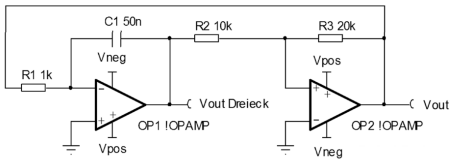


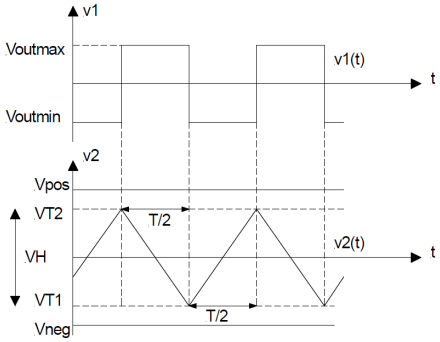


$V_{T+} = V_{outMAX} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3}$
$V_{T-} = V_{outMIN} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3}$
$V_c(t) = V_{T-} + (V_{outMAX} - V_{T-}) \left(1 - e^{\frac{-t}{R_1 \cdot C_1}}\right)$
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2R_1C_1 ln \frac{R_3+2R_2}{R_3}}$
wenn: $R2 = 0.86 \cdot R_3$ dann gilt:
$f = \frac{1}{2 \cdot R_1 C_1}$

8.2.3 Dreieck Rechteck Generator

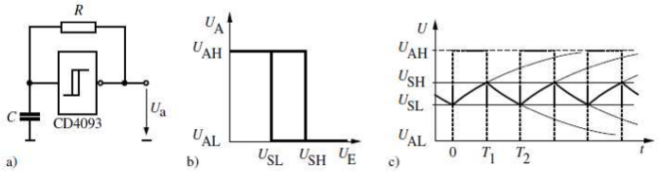






$V_2(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int V_1(t)\, dt + V_{2Anfang}$
$V_H = 2\,|V_T| = (V_{outMAX} - V_{outMIN}) \frac{R_2}{R_3}$
$T = \frac{2 \cot V_H \cdot R_1 C}{V_{outMAX}}$

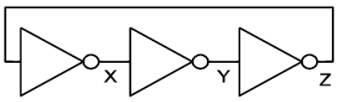
8.2.4 Kippschaltung



$\tau = R \cdot C$
$T_1 = \tau \cdot \ln\left(\frac{U_{AH}-U_{SL}}{U_{AH}-U_{SH}}\right)$
$T_2 = \tau \cdot \ln\left(\frac{U_{SH}-U_{AL}}{U_{SL}-U_{AL}}\right)$
$f = \frac{1}{T_1+T_2}$

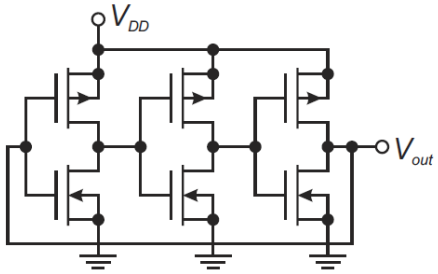
8.2.5 Ringoszilatoren

Schaltung mit Invertern:

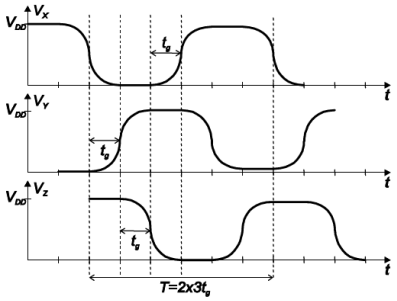


$$f_{osc} = \frac{1}{2 \cdot n \cdot t_g}$$

Schaltung mit MOS-FETs:



Zeitliches Verhalten:



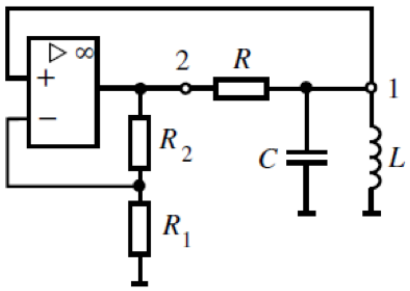
 BY-NC-SA

8.3 Tuned Oscillators

Oszillatoren mit Rückkopplung. Schwingbedingung: Verstärkung im gesamten Kreis = 1.

8.3.1 LC-Oszillator

Normaler LC-Oszillator



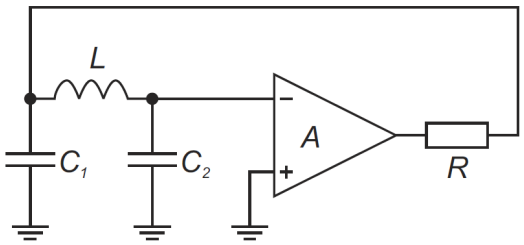
$$U_2(t) = (1 + \frac{R_2}{R_1}) \cdot U_1(t) = V_u \cdot U_1(t)$$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung:

$$\frac{d^2U_1(t)}{dt^2} + 2k\omega_0\frac{dU_1(t)}{dt} + \omega^2 U_1(t) = 0$$

und somit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

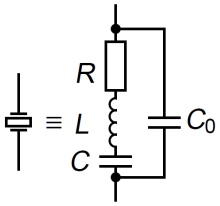
Colpitts-Oszillator



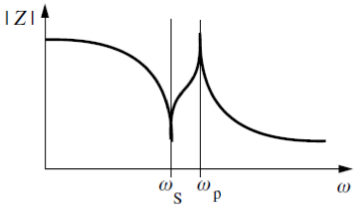
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

8.3.2 Quarz-Oszilator

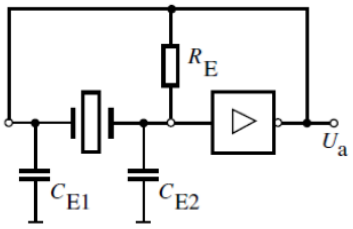
Ersatzschaltung



Phasengang

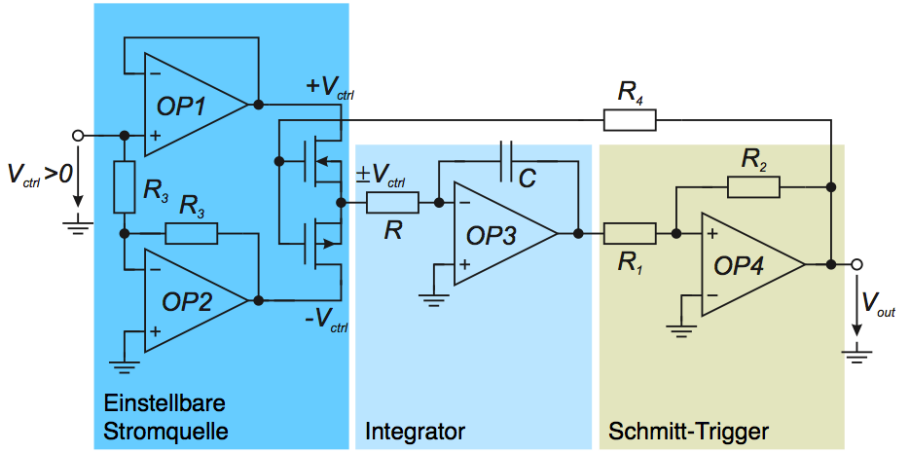


Anwendung



Frequenzabweichung: $\frac{\Delta f}{f_0} \approx 10^{-6} \ldots 10^{-10}$

8.4 Spannungsgesteuerte Oszillatoren (VCO)



$f_{osc} = \frac{R_1+R_2}{4R_1} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{U_{ctrl}}{|U_{out}|}$

was vereinfacht wird zu
$f_{osc} = K_{VCO} \cdot U_{ctrl}$ mit K_{VCO} als konstantem Faktor.

 BY-NC-SA

9 Idiotenseite

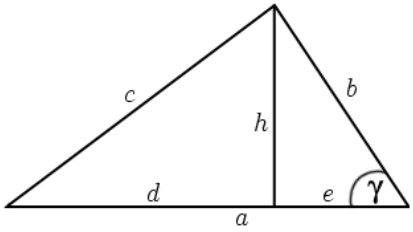
9.1 Dreiecksformeln

Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$



Pythagoras beim Sinus

$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\beta = \frac{c}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

9.2 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0 °	0	0	1	0
30 °	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45 °	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60 °	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90 °	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120 °	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135 °	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150 °	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180 °	π	0	-1
210 °	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225 °	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240 °	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270 °	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300 °	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315 °	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330 °	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.3 Periodizität

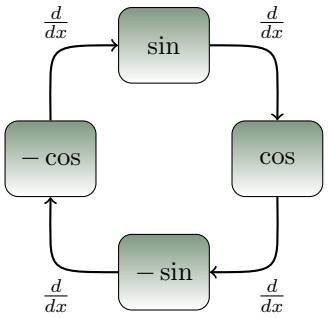
$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

9.4 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

9.5 Ableitungen



9.6 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

9.7 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

9.8 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

9.9 Euler-Formeln

$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$
$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$
$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j\sin(y))$
$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$

9.10 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

 BY-NC-SA