

1 Allgemeines

Nabla-Operator:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \text{grad } f \\ \nabla \cdot \vec{a} &= \text{div } \vec{a} \\ \nabla \times \vec{a} &= \text{rot } \vec{a}\end{aligned}$$

2 Elektrostatische Analyse

Gaussches Gesetz (Hüllenintegral über Fläche A):

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{bzw.} \quad \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Elektrische Spannung zwischen zwei Punkten:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B$$

Elektrisches Potential:

$$\varphi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

E-Feld ist Gradient des Potentials:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

Divergenz des elektrischen Feldes ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Poisson-Gleichung:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Laplace-Gleichung (Spezialfall $\rho = 0$):

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{für } (x, y, z) \in \Omega,$$

wobei Ω der ladungsfreie Raum mit unbekanntem Potential ist.

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\text{geerdeter Rand:} & \quad \varphi = 0, & (x, y, z) \in \Gamma_e \\ \text{Rand mit bekanntem Potential:} & \quad \varphi = \varphi_A, & (x, y, z) \in \Gamma_b \\ \text{Rand der Symmetrie:} & \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, & (x, y, z) \in \Gamma_s,\end{aligned}$$

wobei n die Normale zur Symmetrieachse ist.

3 Stationäre Strömungsanalyse

Elektrische Stromdichte:

$$\vec{J} = \frac{dI}{dS} \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Kontinuitätsgleichung der stationären Strömungsanalyse:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ohmsches Gesetz:

$$dI = \frac{dU}{R} = G \cdot dU \quad \text{mit } G = \sigma \cdot \frac{dS}{dl}$$

Ohmsches Gesetz für Vektorfelder (Zusammenhang zur elektrostatischen Analyse!):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Divergenz der Stromdichte (für die stationäre Analyse):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung wird zusätzlich zur Laplace-Gleichung der elektrostatischen Analyse verwendet.

Zusätzliche Randbedingung (aus Kontinuität von $\vec{J}$):

$$\vec{J}_{1,n} = \sigma_1 \cdot \vec{E}_{1,n} = \sigma_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dn} = \sigma_2 \cdot \frac{d\varphi_2}{dn} = \sigma_2 \cdot \vec{E}_{2,n} = \vec{J}_{2,n}$$

Wesentlicher Unterschied zur elektrostatischen Analyse: $\sigma \neq 0$.

4 Magnetostatische Analyse

Ampèresches Gesetz:

$$\oint_{C=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \theta = \sum_{k=1}^n I_k = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

wobei die Richtung der Ströme I_k ausschlaggebend für deren Vorzeichen ist.

Quellenfreiheit des magnetischen Feldes:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\vec{B} = \mu\vec{H})$$

Differenzialgleichung der magnetostatischen Analyse:

$$\begin{aligned}\vec{J} = \nabla \times \vec{H} &= \text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \\ & \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Magnetisches Vektorpotential:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Poisson-Gleichung des Magnetfeldes:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\text{Magnetische Isolierung:} & \quad \vec{n} \times \vec{A} = 0, & (x, y, z) \in \Gamma_i \\ \text{Rand zw. 2 Materialien:} & \quad \vec{n} \times \vec{A}_1 = \vec{n} \times \vec{A}_2, & (x, y, z) \in \Gamma_s\end{aligned}$$

5 Magneto-quasistatische Analyse

Faradaysches Induktionsgesetz:

$$u_i = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \oint_{C=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Magnetischer Fluss:

$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

DGL der magneto-quasistatischen Analyse:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} = -\mu(\vec{J}_i + \vec{J}_q),$$

mit der Quellenstromdichte $\vec{J}_q$ und der induzierten Stromdichte $\vec{J}_i$.

Induzierte Stromdichte:

$$\vec{J}_i = \sigma \vec{E}_i = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Finale Form der DGL der magneto-quasistatischen Analyse:

$$\Delta \vec{A} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}_q$$

Die Randbedingungen sind identisch zur magnetostatischen Analyse:

$$\begin{aligned} \text{Magnetische Isolierung: } \vec{n} \times \vec{A} &= 0, & (x, y, z) \in \Gamma_i \\ \text{Rand zw. 2 Materialien: } \vec{n} \times \vec{A}_1 &= \vec{n} \times \vec{A}_2, & (x, y, z) \in \Gamma_s \end{aligned}$$

Randwertproblem im Frequenzbereich (ohne Anfangsbedingungen, da hier nur die stationäre Lösung erhalten werden kann):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - j\omega \mu \sigma \vec{A} &= -\mu \vec{J}_q, & (x, y, z) \in \Omega \\ \vec{n} \times \vec{A} &= 0, & (x, y, z) \in \Gamma_i \end{aligned}$$

6 Elektrodynamische Analyse

Erweiterung des Ampèreschen Gesetzes um den Verschiebungsstrom:

$$\begin{aligned} \oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Maxwellsche Gleichungen (2 Varianten):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & \nabla \times \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Wellengleichung des magnetischen Feldes:

$$\Delta \vec{H} - \underbrace{\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}_{\text{"Verluste"}} - \underbrace{\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}_{\text{"Welle"}} = 0$$

Wellengleichung des elektrischen Feldes:

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Randbedingungen (Rand zwischen zwei Materialien):

$$\begin{aligned} H_{t1} &= H_{t2}, & (x, y, z) \in \Gamma_s \\ B_{n1} &= B_{n2}, & (x, y, z) \in \Gamma_s \\ E_{t1} &= E_{t2}, & (x, y, z) \in \Gamma_s \\ D_{n1} &= D_{n2}, & (x, y, z) \in \Gamma_s \end{aligned}$$

Hierbei steht t für die *tangentiale* Komponente und n für die *normale* Komponente des Feldes. Zusätzlich gibt es die absorbierende Randbedingung, welche dafür sorgt dass die Wellen am Rand nicht reflektiert werden ($(x, y, z) \in \Gamma_i$).