

Analysis für Informatik 2 | An2I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. Taylorpolynom	3
1.1. Berechnung	3
1.2. Generalisierung	4
1.3. Taylorreihe	5
1.4. Fehlerabschätzungen	5
1.4.1. Anwendung	6
2. Grenzwerte	7
2.1. Eigentliche Grenzwerte im Unendlichen	7
2.2. Eigentliche Grenzwerte im Endlichen	8
2.2.1. Einseitige Grenzwerte	9
2.3. Rechenregeln	9
2.4. Uneigentliche Grenzwerte im Endlichen	10
2.5. Satz von Bernoulli und l'Hospital	11
2.6. Rechnen mit unendlich grossen «Zahlen»	12
3. Interpolation	12
3.1. Methode der kleinsten Quadrate (RSS)	13
3.2. Lineare Regression	14
3.2.1. Generalisierung	15
3.3. Overfitting	17
3.4. Wahl der Basisfunktion	17
4. Integration	18
4.1. Stammfunktionen	18
4.2. Unbestimmtes Integral	19
4.3. Integrationsregeln	20
4.3.1. Umkehrung	20
4.3.2. Regeln	20
4.3.3. Linearitätsregel	21
4.3.4. Substitutionsregel	21
4.3.5. Partielle Integration	22
4.4. Bestimmtes Integral	22
4.4.1. Substitution	23
4.4.2. Rechenregeln	24
4.4.3. Bestimmtes Integral als Grenzwert	24
4.4.4. Flächenberechnungen	25
4.4.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	25
4.4.6. Äquivalenz beider Definitionen des bestimmten Integrals	26
4.4.7. Verbesserungen der Approximation:	26
4.4.8. Mittlerer Funktionswert	26
5. Fourierreihen	26
5.1. Periodische Funktionen	27
5.2. Fourierreihen	27

5.2.1. Fourierreihen mit endlichem Spektrum	28
5.2.2. Fourierreihen periodischer Funktionen	30
5.2.3. Kovergenz von Fourierreihen (Satz von Dirichlet)	30
5.2.4. Symmetrieeigenschaften	31
5.2.5. Sinus-Kosinus und Amplituden-Phasen-Form	32

1. TAYLORPOLYNOM

Dient zur Approximation von Funktionen durch Polynome. Innerhalb vom Konvergenzradius sind Funktionen immer durch unendliche Polynome perfekt approximierbar.

1.1. BERECHNUNG

Jede Ableitung ist die nächste Unbekannte:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \\
 p'(x) &= 0 + a_1 \quad + a_2 2(x - x_0) + a_3 3(x - x_0)^2 \\
 p''(x) &= 0 + 0 \quad + a_2 2 \quad + a_3 6(x - x_0) \\
 p'''(x) &= 0 + 0 \quad + 0 \quad + a_3 6 \\
 p''''(x) &= 0 + 0 \quad + 0 \quad + 0
 \end{aligned}$$

x_0 einsetzen:

$$\begin{aligned}
 p(x_0) &= a_0 + \cancel{a_1(x_0 - x_0)} + \cancel{a_2(x_0 - x_0)^2} + \cancel{a_3(x_0 - x_0)^3} = a_0 \\
 p'(x_0) &= 0 + a_1 \quad + \cancel{a_2 2(x_0 - x_0)} + \cancel{a_3 3(x_0 - x_0)^2} = a_1 \cdot 1 \\
 p''(x_0) &= 0 + 0 \quad + a_2 2 \quad + \cancel{a_3 6(x_0 - x_0)} = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \\
 p'''(x_0) &= 0 + 0 \quad + 0 \quad + a_3 6 = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 p''''(x_0) &= 0 + 0 \quad + 0 \quad + 0
 \end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 p^{(n)}(x_0) &= a_n \cdot n! \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}
 \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$p(x) = 3x^3 - 2x + 5$$

$$\text{Entwicklungspunkt EWP} = x_0 = 1$$

NR:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 3x^3 - 2x^5 \\
 p'(x) &= 9x^2 - 2
 \end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\begin{aligned}
 p(x_0) &= 3x_0^3 - 2x_0^5 = 3 - 2 + 5 = 6 \\
 p'(x_0) &= 9x_0^2 - 2 = 9 - 2 = 7
 \end{aligned}$$

Ergo: $p(x) \approx 6 + 7(x - 1)$ = Taylor-Polynom von Grad 1

Taylor-Polynom von Grad 3: $p(x) \approx \underbrace{6 + 7(x - 1)}_{\text{Linearisierung}} + ?(x - 1)^2 + ?(x - 1)^3$

$$\begin{aligned}
 p(x_0) &= 3x_0^3 - 2x_0^5 = 3 - 2 + 5 = 6 = a_0 & \Rightarrow a_0 &= 6 \\
 p'(x_0) &= 9x_0^2 - 2 = 9 - 2 = 7 = 1 \cdot a_1 & \Rightarrow a_1 &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p''(x_0) &= 18x_0 & = 18 &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 9 \\
 p'''(x_0) &= 18 & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 &\Rightarrow a_3 = 3
 \end{aligned}$$

Gibt uns:

$$p(x) \approx 6 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 3(x-1)^3$$

1.2. GENERALISIERUNG

Für ein Polynom $p(x)$ vom Grad n und einem Entwicklungspunkt x_0 gilt:

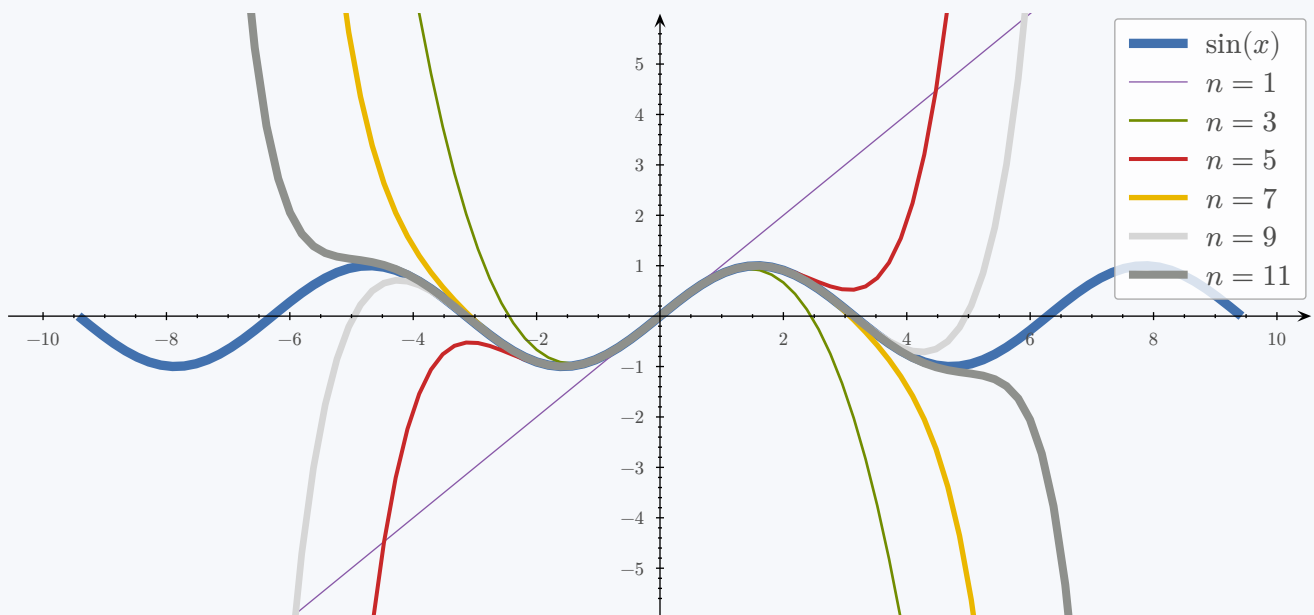
$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Für eine Funktion $f(x)$ und einen EWP x_0 heisst

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylor-Polynom von Grad n für $f(x)$ um EWP x_0

Beispiel 2: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$



Beobachtungen 1:

1. In der Nähe des EWP x_0 gilt $f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
2. Je grösser n ist, umso kleiner ist der Unterschied der beiden Seiten
3. Der Unterschied ist umso kleiner, je näher x bei x_0 liegt

Beispiel 3: $f(x) = e^x$, EWP $x_0 = 0$

Gesucht: Taylor-Polynom vom Grad n

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ((x-0)^k) \Leftrightarrow e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x^k)$$

1.3. TAYLORREIHE

Die Taylor-Reihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Es gibt eine Zahl $R > 0$, so dass $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, für $|x - x_0| < R$
(R = Konvergenzradius)

1.4. FEHLERABSCHÄTZUNGEN

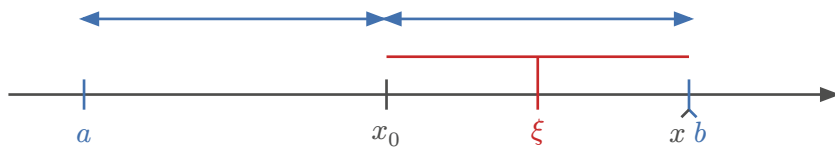
Wie weit liegt der vom Taylor-Polynom mit Grad n vorhergesagte Funktionswert vom richtigen Wert entfernt?

$$\begin{aligned} \text{Rechenfehler} &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \\ &\approx \left| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \end{aligned}$$

Es gibt eine Zahl $\xi \in [x_0; x]$, so dass

$$\begin{aligned} \text{Rechenfehler} &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \\ &= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \\ &\leq \frac{\max_{\xi \in [x_0; x]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \end{aligned}$$

(Falls $f(x)$ nicht berechenbar)



$$x_0 = \frac{a+b}{2}, |x - x_0| \leq \frac{b-a}{2}$$

1.4.1. Anwendung

Gegeben: $f(x)$, Intervall $I = [a; b]$, max. Rechenfehler Δ

Gesucht: Grad des Taylor-Polynoms n , Entwicklungspunkt x_0

Antwort: $x_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{b-a}{2}$

Bestimme n :

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{\xi \in [x_0; x]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \stackrel{!}{\leq} \Delta \\ & < \frac{m}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \quad \left| m > \max_{\xi \in [x_0; x]} |f^{(n+1)}(\xi)| \right| \end{aligned}$$

Beispiel 4: Gegeben: $f(x) = \sin(x)$ auf $I = [0; \pi]$ durch Taylor-Polynom mit Rechenfehler $\Delta = 0.01$. berechnet werde: $x_0 = \pi/2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sin(x) \\ \Rightarrow |f^{(n+1)}(x)| &= \begin{cases} |\sin(x)| \\ |\cos(x)| \end{cases} \leq 1 \\ \Rightarrow m &= 1 \end{aligned}$$

n muss so gewählt werden, dass

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1} \leq 0.01$$

1.4.1.1. Rechenregeln Fakultät

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \cdot (n-1)$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$n! \cdot (n+1)! = (n+1)!$$

2. GRENZWERTE

2.1. EIGENTLICHE GRENZWERTE IM UNENDLICHEN

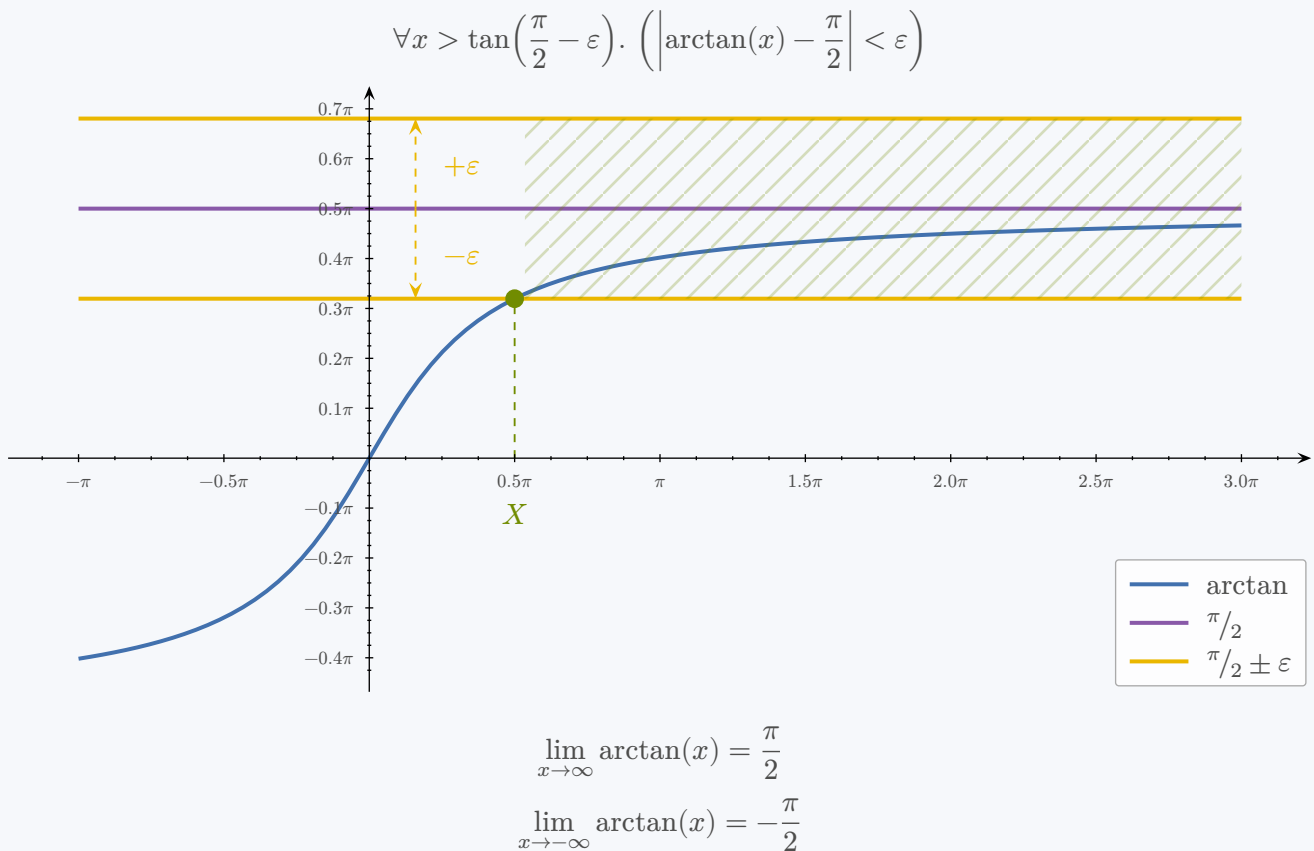
Die Zahl $F \in \mathbb{R}$ heisst Grenzwert von $f(x)$ für x gegen ∞ , wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine «Grenze» X existiert, so dass für alle «noch grössere Zahlen» $x > X$ gilt: $|f(x) - F| < \varepsilon$.

$$\exists F. (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}. (\varepsilon > 0 \wedge |f(x) - F| < \varepsilon)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = F \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} F$$

Beobachtungen 2:

1. $\forall x > X. (|f(x) - F| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = F)$
2. $\forall x < X. (|f(x) - F| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = F)$

Beispiel 5: $f(x) = \arctan(x)$, $F = \frac{\pi}{2}$, $X = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$



Beobachtungen 3:

1. $|x| - F$ wird kleiner, wenn x grösser wird
2. Falls ε bei F anders gewählt wird, verschiebt sich X aber die Funktionswerte bleiben im Bereich $|f(x) - F|$

3. Falls F anders gewählt wird, kommen Funktionswerte ausserhalb vom erlaubten Bereich

Bei $\lim \rightarrow \infty$ kann man alle Terme, die sich nach 0 bewegen, ignorieren.

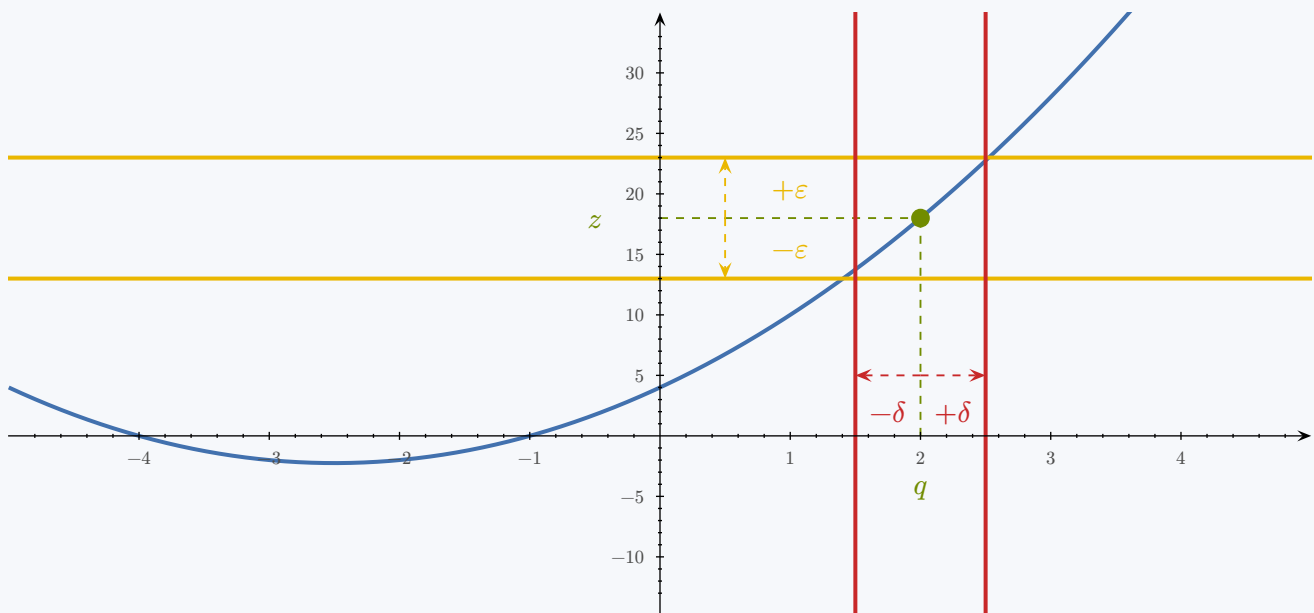
Beispiel 6: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{(2 + \frac{3}{x})}{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} \\ &= 0 \cdot \frac{2}{1} = 0 \end{aligned}$$

2.2. EIGENTLICHE GRENZWERTE IM ENDLICHEN

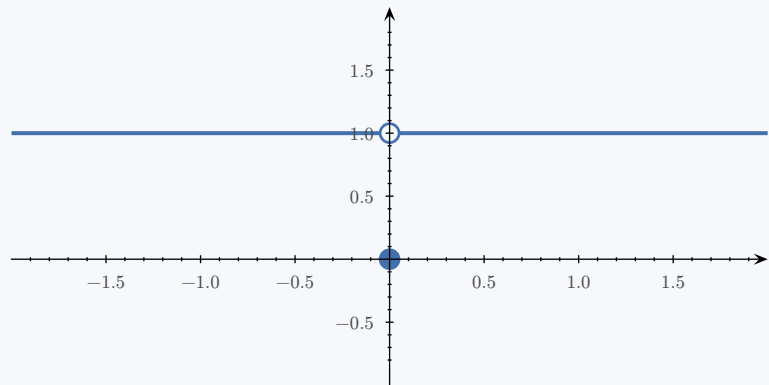
$\lim_{x \rightarrow q} f(x)$ = Wert der stetigen Fortsetzung von $f|_{D_f \setminus q}(x)$ an der Stelle $x = q$. f ist stetig in $q \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow q} f(x) = f(q)$

Beispiel 7: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x - 2}$



Beispiel 8: $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sig}^2(x) = 1$

$$\text{sig} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$



Beobachtungen 4:

1. $\text{sig}^2(x)$ ist an der Stelle 0 nicht stetig, denn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sig}^2(x) = 1$, obwohl der Funktionswert bei $x = 0$ nicht 1 sondern $y = 0$ ist.

2.2.1. Einseitige Grenzwerte

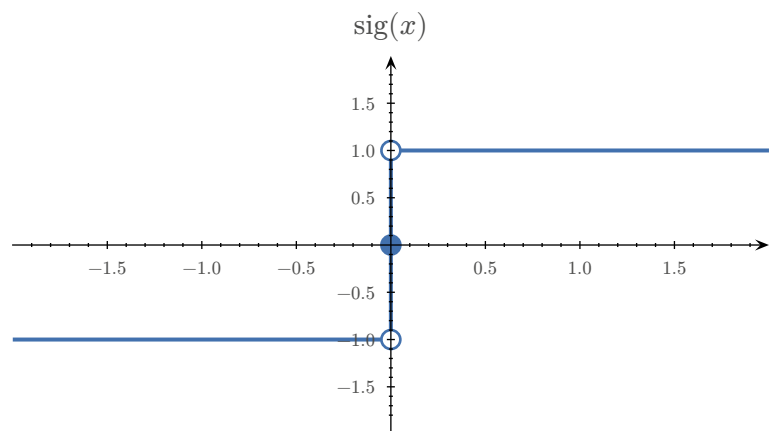
$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sig}(x)$ existiert nicht. Das ändert sich aber, wenn man den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^-$ einschränkt.

Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{sig}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sig}(x) = 1$$

Linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \text{sig}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sig}(x) = -1$$



Beobachtungen 5:

Wenn sich der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert unterscheiden, existiert der beidseitige Grenzwert nicht.

2.3. RECHENREGELN

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen und $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine beliebige reelle Zahl oder Unendlich.

$$\lim_{x \rightarrow q} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow q} f(x) \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow q} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow q} f(x) + \lim_{x \rightarrow q} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow q} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow q} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow q} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow q} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow q} f(x)}{\lim_{x \rightarrow q} g(x)} \quad \text{falls } \lim_{x \rightarrow q} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow q} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow q} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow q} g(x)} \quad \text{falls } \lim_{x \rightarrow q} f(x) > 0$$

All diese Formeln gelten auch für einseitige Grenzwerte.

Gilt $G = \lim_{x \rightarrow q} g(x)$ (an dieser Stelle ist ein einseitiger Grenzwert nicht ausreichend), so gilt ausserdem:

$$\lim_{x \rightarrow q} f(g(x)) = \lim_{g \rightarrow G} f(g)$$

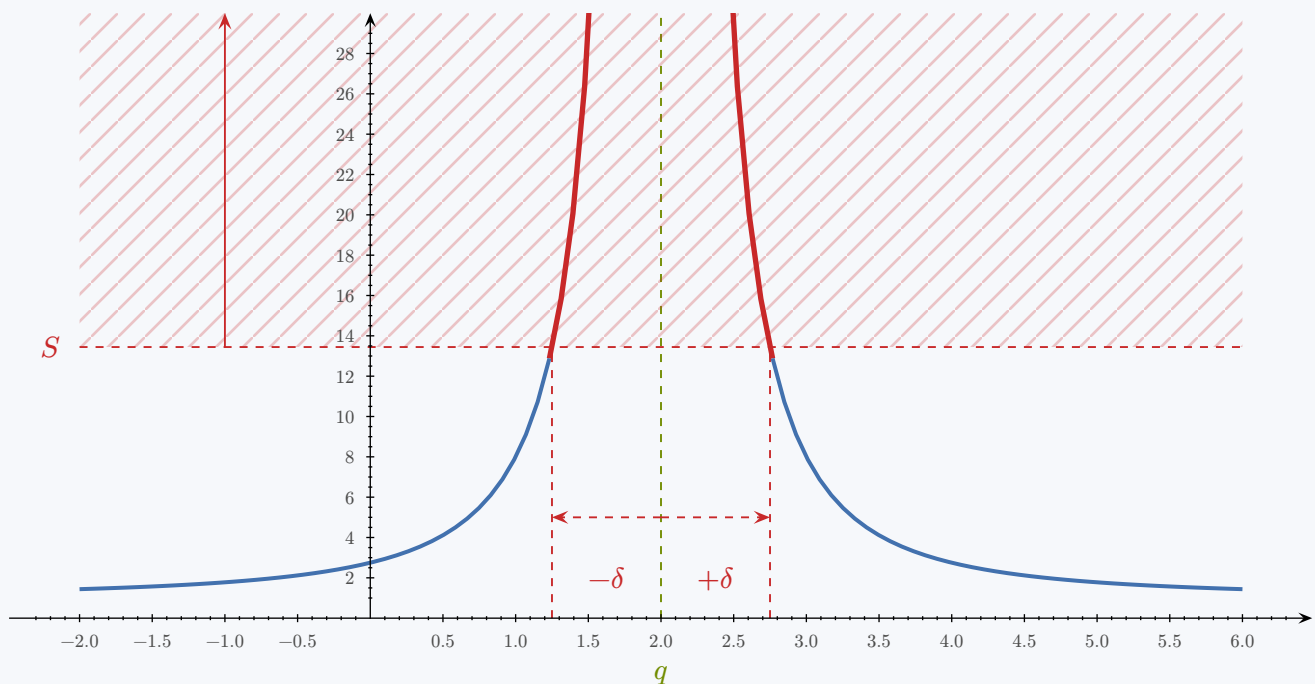
falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

2.4. UNEIGENTLICHE GRENZWERTE IM ENDLICHEN

$$\lim_{x \rightarrow q} f(x) = \infty$$

Für jedes $S \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\forall x, 0 < |x - q| < \delta. (f(x) > S)$

Beispiel 9: $f(x) = \frac{(x-1)^2 - 2x + 10}{(x-2)^2}$



Beobachtungen 6:

1. Für sehr grosse Argumente sind Funktionswerte sehr gross.

$$\forall x > X. \left(f(x) > S \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \right)$$

2. Für sehr grosse Argumente sind Funktionswerte stark negativ.

$$\forall x > X. \left(f(x) < S \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \right)$$

3. Für stark negative Argumente sind Funktionswerte sehr gross.

$$\forall x < X. \left(f(x) > S \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \right)$$

4. Für stark negative Argumente sind Funktionswerte stark negativ.

$$\forall x < X. \left(f(x) < S \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \right)$$

2.5. SATZ VON BERNOULLI UND L'HOSPITAL

Voraussetzung: Typ $\frac{0}{0}$ (Zähler und Nenner streben gegen 0) oder Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Typ $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \vee \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

Ableitung **ohne quotientenregel** (heisst, Zähler und Nenner separat ableiten) gibt dasselbe Resultat für den limes.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{Voraussetzung prüfen}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

Beweis für $a \in \mathbb{R}$, Typ $\frac{0}{0}$:

Linearisierung von f und g um $x = a$:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$g(x) \approx g(a) + g'(a)(x - a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a) + f'(a)(x - a)}{g(a) + g'(a)(x - a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{f(a)} + f'(a)(\cancel{x-a})}{\cancel{g(a)} + g'(a)(\cancel{x-a})} \mid f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow f(a) = 0$$

Beispiel 10:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{1 - \sin(x)}^0}{\underbrace{2x - \pi}_0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(x)}{2} = \frac{-\cos(\frac{\pi}{2})}{2} = 0$$

Einen Grenzwert vom Typ $\infty \cdot 0$ kann man mit der Umformung

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

in den typ $\frac{\infty}{\infty}$ überführen, oder durch die Umformung

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

auf die Form $0/0$ bringen.

2.6. RECHNEN MIT UNENDLICH GROSSEN «ZAHLEN»

	$z = -\infty$	$-\infty < z < 0$	$z = 0 -$	$z = 0 +$	$0 < z < \infty$	$z = \infty$
$z + \infty = \infty + z$	?	∞	∞	∞	∞	∞
$\infty - z$	∞	∞	∞	∞	∞	?
$z - \infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$z \cdot \infty = \infty \cdot z$	$-\infty$	$-\infty$	B/L*	B/L*	∞	∞
∞/z	B/L	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	B/L
z/∞	B/L	$0 -$	$0 -$	$0 +$	$0 +$	B/L
$z/0+$	$-\infty$	$-\infty$	B/L	B/L	∞	∞
$z/0-$	∞	∞	B/L	B/L	$-\infty$	$-\infty$

* Mit umformen

Differentialquotient $f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Definition 1: Ableitung definiert durch Grenzwerte

Eine in x_0 stetige Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn einer (und damit beide) der folgenden Grenzwerte existieren. Der Wert dieser Grenzwerte ist dann identisch dem Wert der Ableitung von f and der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. INTERPOLATION

Begriff	Definition
Interpolation	– Füllt Lücken in einer Wertetabelle – Benötigt kein Systemverständnis
Extrapolation	– Dehnt den Definitionsbereich der Funktion über den Messbereich hinaus aus – Benötigt Systemverständnis. Beispiel: Klimamodelle

Gegeben: Trainingsdaten = Wertetabelle

Ziel: Vorhersage der y Werte durch x in Form einer Funktion $y = f(x)$

x	0	3	5	
y	80	90	105	← gemessene Werte
$f(x)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(5)$	← vorhergesagte Werte
Residuen	$f(0) - 80$	$f(3) - 90$	$f(5) - 105$	← «Güte» der Vorhersage
Quadrat Fehler	$(f(0) - 80)^2$	$(f(3) - 90)^2$	$(f(5) - 105)^2$	← Schafft Vorzeichen weg

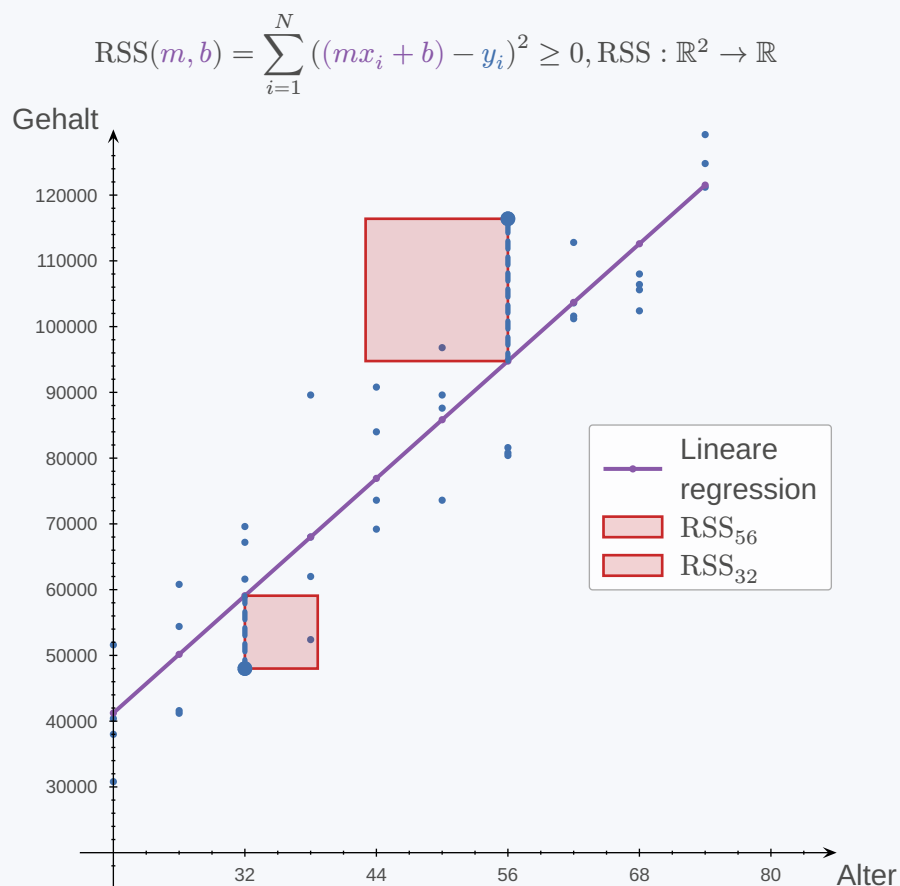
Kostenfunktion: $(f(0) - 80)^2 + (f(3) - 90)^2 + (f(5) - 105)^2 = \text{RSS}$

Definition des Suchraums: Linearkombinationen einer vorgegebenen Liste von «Basisfunktionen»

3.1. METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE (RSS)

Begriff	Definition
Residuum	$r_i = f(x_i) - y_i$
Quadratischer Fehler	$r_i^2 = (f(x_i) - y_i)^2$
Unabhängige Variable	= Prädiktorvariable Variable x in der Funktion $y = f(x)$
Abhängige Variable	= Responsevariable Variable y in der Funktion $y = f(x)$
Gesamtfehler	= Residual Sum of Squares $RSS = \sum_{i=1}^N \underbrace{(y_i - f(x_i))^2}_{\substack{\text{Im Diagramm als rote} \\ \text{Vierecke repräsentiert}}}$ $RSS(m, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + b))^2 \geq 0, RSS : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel 11: Lineare regression von Gehältern nach Alter



3.2. LINEARE REGRESSION

Begriff	Definition
Basisfunktionen	Raum der «besonders einfachen Funktionen» $b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)$
Modellfunktionen	Linearkombinationen aus Basisfunktionen $\lambda_1 b_1(x), \lambda_2 b_2(x), \dots, \lambda_n b_n(x)$
Regressionskoeffizient	Konstanten λ_k der Modellfunktionen
Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$
Unkorrigierte Stichprobenvarianz der Variable x	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 - \bar{x}^2$
Unkorrigierte Stichprobenkovarianz der Variablen x und y	$\text{var}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$

Ziel ist es, eine **besonders einfache** Funktion (**Modellfunktion**) zu finden, die eine Wertetabelle am besten interpoliert. «Am besten» $\neq$ exakt!

Zentral ist, dass die Ergebnisfunktionen eine einfache Struktur aufweist.

Genauer: Die Ergebnisfunktion muss eine **Linearkombinationen** (=gewichtete Summe) von **wählbaren Basisfunktionen** $b_1(x) \dots b_n(x)$ d.h. von der Form $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot b_k(x)$ sein.

Die Gewichte λ_k heissen **Regressionskoeffizienten**

Alternativ (Vereinfacht): Gesucht sind die Zahlen $\lambda_1 \dots \lambda_n$, für die $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot b_k(x)$ die Einträge der Wertetabelle am genauesten wiedergibt (= den RSS minimiert)

Gegeben

Wertetabelle	Geeignete Funktionen												
<table><tr><td>x</td><td>x_0</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\dots$</td><td>x_{N-1}</td></tr><tr><td>y</td><td>y_0</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>$\dots$</td><td>y_{N-1}</td></tr></table>	x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{N-1}	y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{N-1}	$b_0(x), \dots, b_{m-1}(x)$
x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{N-1}								
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{N-1}								

Aufgabe

Bestimme die besten Regressionsparameter der Modellfunktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\lambda_k}_{\text{gesucht}} b_k(x) \quad (1)$$

Methode

Bestimme das globale Minimum des von λ_k abhängigen quadratischen Fehlers

$$\text{RSS} = \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k b_k(x_i) - y_i \right)^2 \quad (2)$$

Beispiel 12: Ausgleichsgerade

Modellfunktionen	Basisfunktionen	Regressionskoeffizienten
$f(x) = m \cdot x + b$	$b_0(x) = x$ $b_1(x) = 1$	$\text{RSS}(b, m) = \sum_{i=0}^{N-1} (m \cdot x_i + b - y_i)^2$

Ziel: Minimiere RSS

Stationäre Stellen von $\text{RSS} = \text{RSS}(m, b)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d \text{RSS}}{db} &= \sum_{i=0}^{N-1} 2(mx_i + b - y_i) = 2 \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} mx_i \right) + \left(\sum_{i=0}^{N-1} b \right) - \left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i \right) \right) \\
 \stackrel{!}{=} 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \right) m + N \cdot b = \sum_{i=0}^{N-1} y_i && | \div N \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)}_{\text{Mittelwert aller } x\text{-Werte}} m + \underbrace{b}_{\text{Mittelwert aller } y\text{-Werte}} = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i}_{\text{Mittelwert aller } y\text{-Werte}} \\
 &\Leftrightarrow \bar{x} \cdot m + b = \bar{y} \\
 \frac{d \text{RSS}}{dm} &= \sum_{i=0}^{N-1} 2(mx_i + b - y_i)x_i = 2 \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} mx_i^2 \right) + \left(\sum_{i=0}^{N-1} bx_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i x_i \right) \right) \\
 \stackrel{!}{=} 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \right) b = \left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i x_i \right) && | \div N \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 \right)}_{\text{Mittelwert aller } x\text{-Quadrate}} m + \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)}_{\text{Mittelwert der } x\text{-}y\text{-Produkte}} b = \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i x_i \right)}_{\text{Mittelwert der } x\text{-}y\text{-Produkte}} \\
 &\Leftrightarrow (\sigma^2 + \bar{x}^2) \cdot m + \bar{x} \cdot b = \text{var}(x, y) + \bar{x} \cdot \bar{y} \\
 &\Rightarrow m\sigma^2 = \text{var}(x, y) \\
 &\Rightarrow m = \frac{\text{var}(x, y)}{\sigma^2} \\
 &\Rightarrow b = \bar{y} - m\bar{x}
 \end{aligned}$$

3.2.1. Generalisierung

Das Ziel der linearen Regression ist es, die Regressionskoeffizienten so zu bestimmen, dass die Wertetabelle möglichst genau wiedergegeben wird, d.h. dass

$$\forall i \in [0; N-1]. \left(y_i \approx y_i^{\text{berechnet}} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k b_k(x_i) \right) \quad (3)$$

Eine lineare Regression kann durchgeführt werden, sobald $N \geq m$ Datensätze (x_i, y_i) vorliegen.

Eine geschlossene Formel für die Regressionskoeffizienten zu finden verlangt Matrizenrechnung. Die Daten und Basisfunktionen können wie folgt in Matrizenform dargestellt werden:

Wertetabelle**Designmatrix****Ergebnis-
vektor**

x	$b_0(x)$	$b_1(x)$	$\dots$	$b_{m-1}(x)$	y
x_0	$b_0(x_0)$	$b_1(x_0)$	$\dots$	$b_{m-1}(x_0)$	y_0
x_1	$b_0(x_1)$	$b_1(x_1)$	$\dots$	$b_{m-1}(x_1)$	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{N-1}	$b_0(x_{N-1})$	$b_1(x_{N-1})$	$\dots$	$b_{m-1}(x_{N-1})$	y_{N-1}

$$B = \begin{pmatrix} b_0(x_0) & b_1(x_0) & \dots & b_{m-1}(x_0) \\ b_0(x_1) & b_1(x_1) & \dots & b_{m-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(x_{N-1}) & b_1(x_{N-1}) & \dots & b_{m-1}(x_{N-1}) \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

$(N \times m)$ - Matrix

Zusätzlich definiert man den **Koeffizientenvektor**

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

wodurch die [Gleichung 3](#) in eine Matrixgleichung umgeschrieben werden kann:

$$\underbrace{\vec{y}}_{\in \mathbb{R}^N} \approx \underbrace{B}_{\in \mathbb{R}^{N \times m}} \cdot \underbrace{\vec{\lambda}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Auch der RSS ([Gleichung 2](#)) lässt sich nun in Matrixform darstellen:

$$\text{RSS} = (\vec{y} - B \cdot \vec{\lambda})^2 = (\vec{y} - B \cdot \vec{\lambda}) \bullet (\vec{y} - B \cdot \vec{\lambda})$$

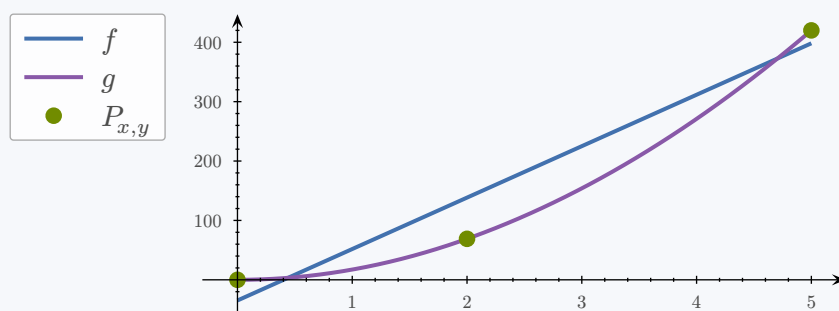
Ferner: Die Modellfunktion der [Gleichung 1](#) minimiert den quadratischen Fehler RSS genau dann, wenn der Koeffizientenvektor $\vec{\lambda}$ eine Lösung der Gleichung

$$B^T \vec{y} = B^T B \vec{\lambda} \quad | \text{ Eine der Lösungen}$$

$$\stackrel{\text{Rang } B=m}{\Leftrightarrow} (B^T B)^{-1} B^T \vec{y} = \vec{\lambda} \quad | \text{ Die einzige Lösung, falls Rang } B = m$$

ist.

Beispiel 13:



x	y
0	0
2	69
5	420

$\wedge$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_0 b_0(x) + \lambda_1 b_1(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x \\ b_0(x) &= 1 \\ b_1(x) &= x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

x	$b_0(x)$	$b_1(x)$	y
0	1	0	0
2	1	2	69
5	1	5	420

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
B^T B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 29 \end{pmatrix} \\
B^T B \vec{\lambda} &= B^T \vec{y} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 69 \\ 420 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 489 \\ 2238 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 49 \\ 21 & 87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3423 \\ 6714 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 49 \\ 0 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3423 \\ 3291 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 49 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3423 \\ \frac{3291}{38} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{27762}{38} \\ \frac{3291}{38} \end{pmatrix} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{661}{19} \\ \frac{3291}{38} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \lambda_0 &= -\frac{661}{19} \\
\Rightarrow \quad \lambda_1 &= \frac{3291}{38} \\
\Rightarrow \quad f(x) &= -\frac{661}{19} + \frac{3291}{38}x
\end{aligned}$$

3.3. OVERFITTING

Wenn ein Modell nur über **wenige Konfigurationsparameter** verfügt, ist seine «Lernfähigkeit» eingeschränkt. Eine lineare Regression, die nur die Basisfunktionen 1 und x enthält, führt zwangsweise auf lineare Modellfunktion $f(x) = mx + b$ und kann kompliziertere Abhängigkeiten nicht wiedergeben. Man spricht in diesem Fall von einer «Unteranpassung» oder einem **Underfitting**.

Allerdings kann es auch vorkommen, dass ein Modell **zu viele Konfigurationsparameter** besitzt, um gute Vorhersagen zu leisten. Da die Notwendigkeit, zu generalisieren, verschwindet, wenn es weniger Messwerte als Regressionsparameter gibt, kann die Modellfunktion im Fall $m \geq N$ die Messdaten (inkl. eventuell vorhandener Fehler) einfach «auswendig lernen». Dieser Effekt heisst «Überanpassung» (**Overfitting**).

3.4. WAHL DER BASISFUNKTION

Neben den bis jetzt besprochenen linearen Basisfunktionen gibt es Polynomiale Basisfunktionen vom Typ

$$x^k$$

Gauss'sche Basisfunktionen vom Typ

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Sigmoid-Basisfunktionen vom Typ

$$\frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}}$$

und trigonometrischen Basisfunktionen vom Typ

$$\sin(k\omega x) \text{ oder } \cos(k\omega x), k \in \mathbb{Z}$$

Dabei fällt auf, dass sich die Regressionskurven in dem Bereich, in dem Messdaten zur Verfügung stehen kaum voneinander unterscheiden, während ausserhalb dieses Bereichs grosse Unterschiede zwischen den verschiedenen Regressionskurven sichtbar werden.

<i>Funktion</i>	<i>Eignung</i>	<i>Beispiel</i>
Fourierbasis (trigonometrische Basisfunktion)	Periodische Zyklen	Wetterdaten
Sigmoid-Basis	Daten, die für sehr grosse und sehr kleine Argumente gegen zwei unterschiedliche endliche Grenzwerte streben	Welcher Bevölkerungsanteil ein gewisses Jahreseinkommen unterschreitet
Gauss'sche Basis	Eine abhängige Variable, die für grosse und kleine Argumente annähernd Null ist	Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch eine bestimmte Körpergrösse besitzt
Polynomiale Basis	Wenn die Daten nur innerhalb des Messbereichs interpoliert werden sollen oder wenn man von vornherein weiss, dass der Zusammenhang zwischen zwei Messgrössen linear oder quadratisch ist	Machinelles Lernen

4. INTEGRATION

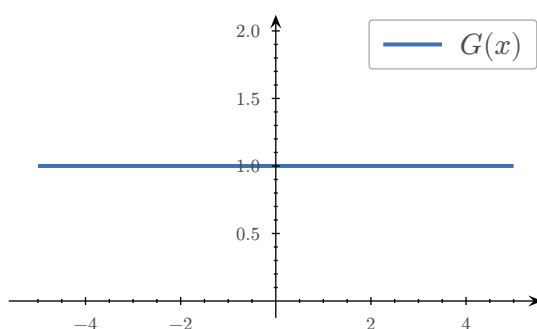
4.1. STAMMFUNKTIONEN

Eine Funktion $F(x)$ heisst **Stammfunktion** (SF) von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$.

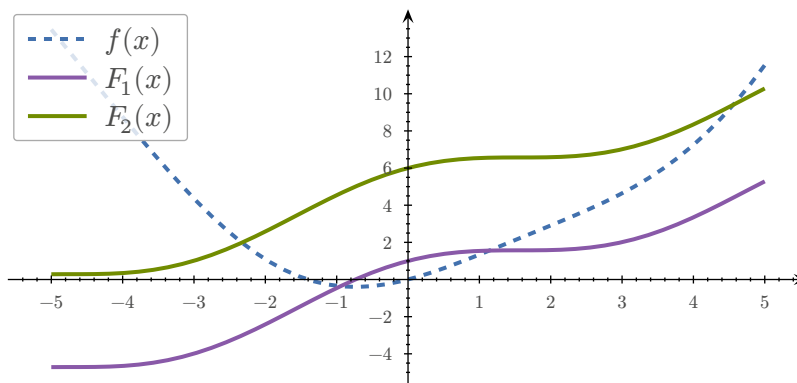
Wenn $F_1(x)$ eine SF von $f(x)$ ist, dann ist auch $F_2(x) = F_1(x) + c$ eine SF von $f(x)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{d}{dx}(F_1(x) + c) \\ &= \underbrace{F_1'(x)}_{\text{Ist SF von } f} + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$



$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}x^2, F_1(x) = \cos(x) + x$$

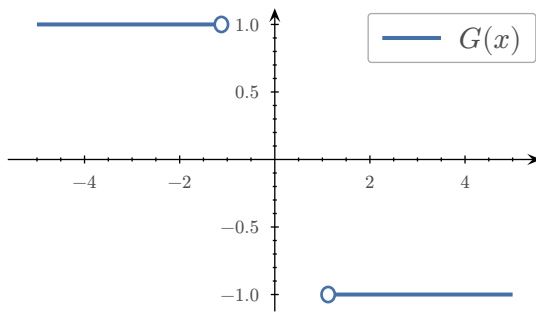


Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $F_1(x)$ und $F_2(x)$ SFen von $f(x)$ sind, dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $F_2(x) = F_1(x) + c$.

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$G(x)$ ist eine Funktion, deren Steigung permanent 0 ist.



$\Rightarrow G'(x)$ ist konstant

$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = -c$$

$$\Rightarrow F_2(x) = F_1(x) - c = F_1(x) + c$$

$G(x)$ muss nicht stetig sein! (Falls D_f kein Intervall ist).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$F_{c,d} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \mapsto \ln(|x|) + \begin{cases} c & \text{für } x > 0 \\ d & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

4.2. UNBESTIMMTES INTEGRAL

$$f(x) = F'(x)$$

$\Leftrightarrow f(x)$ ist **die** Ableitung von $F(x)$

$\Leftrightarrow F(x)$ ist **eine** Stammfunktion von $f(x)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int}_{\text{unbestimmtes Integral}} \underbrace{f(x)}_{\text{von } f(x)} \underbrace{dx}_{\text{d}x} = \underbrace{F(x) + \text{const}}_{\substack{F(x) \text{ plus eine} \\ \text{Konstante}}}$$

$$\underbrace{\int}_{\text{unbestimmtes Integral}} \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} d \underbrace{x}_{\text{Integrationsvariable}}$$

Beispiel 14:

$$\int y + x^2 dx + \text{const}(y)$$

$$f(x) = y + x^2 \rightsquigarrow \text{SF} : F(x) = yx + \frac{x^3}{3}$$

$$\int y + x^2 dy + \text{const}(x)$$

$$f(y) = y + x^2 \rightsquigarrow \text{SF} : F(y) = \frac{y^2}{2} + yx^2$$

$\int f(x) dx$ ist die Menge aller SF von $f(x)$ bezüglich der Variable x .

$$\int f(x) dx = \{F_c(x) \mid F_c(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}, F(x) \text{ ist SF}\} \text{ **Deckt nicht alle Fälle ab!**}$$

$$= \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$$

Diese Definition schon

In der Praxis schreibt man aber

$$\int f(x) \, dx = F(x) + \text{const}$$

Die Konstante const repräsentiert eine nicht näher bestimmte, (vorerst) unbekannte Zahl, welche man auch als **Integrationskonstante** bezeichnet.

Beispiel 15:

$$\begin{aligned} \int 3(x-1)^2 \, dx &= (x-1)^3 + \text{const} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + \text{const} \\ \int 3x^2 - 6x + 3 \, dx &= x^3 - 3x^2 + 3x + \text{const} \\ -1 + \text{const} &= \text{const} \\ -1 + c &\neq c \\ \Rightarrow \text{Deswegen verwendet man const anstatt } c \end{aligned}$$

4.3. INTEGRATIONSREGELN

4.3.1. Umkehrung

Da das Integral und die Ableitung in Beziehung zueinander stehen, kann man diese wie folgt umkehren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= f(x) \Leftrightarrow F(x) + \text{const} = \int f(x) \, dx \\ \frac{d}{dx} \int f(x) \, dx &= \frac{d}{dx} (F(x) + \text{const}) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + \text{const} = \int \frac{d}{dx} F(x) \, dx \end{aligned}$$

4.3.2. Regeln

Den erste Regelblock findet man in erster Linie dadurch, dass man die bereits bekannte Ableitungstabelle «rückwärts» liest.

$$\begin{aligned} \int x^a \, dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + \text{const} && \text{für } a \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln(|x|) + \text{const} \\ \int e^x \, dx &= e^x + \text{const} \\ \int a^x \, dx &= \frac{1}{\ln(a)} a^x + \text{const} && \text{wegen } a^x = e^{\ln(a) \cdot x} \\ \int a^{b \cdot x} \, dx &= \frac{1}{\ln(a^b)} a^x + \text{const} \\ \int \ln(x) \, dx &= x \ln(x) - x + \text{const} \\ \int \tan(x) \, dx &= -\ln(|\cos(x)|) + \text{const} \\ \int \sin(x) \, dx &= -\cos(x) + \text{const} \\ \int \cos(x) \, dx &= \sin(x) + \text{const} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + \text{const} \\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arccos(x) + \text{const} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) + \text{const} \\ \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(|1+x^2|) + \text{const} \\ \int \arccos(x) dx &= x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{const} \\ \int \arcsin(x) dx &= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \text{const}\end{aligned}$$

4.3.3. Linearitätsregel

Das unbestimmte Integral einer Linearkombination mehrerer Funktionen darf komponentenweise berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\alpha F(x) + \beta G(x)) &= \alpha F'(x) + \beta G'(x) \quad | \text{ Linearkombination} \\ \int \frac{d}{dx}(\alpha F(x) + \beta G(x)) dx &= \int \alpha F'(x) + \beta G'(x) dx \\ \alpha F(x) + \beta G(x) + \text{const} &= \int \alpha F'(x) + \beta G'(x) dx \\ \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + \text{const} &= \int \alpha f(x) + \beta g(x) dx \quad | \text{ Linearitätsregel}\end{aligned}$$

4.3.4. Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \quad | \text{ Kettenregel} \\ \int \frac{d}{dx}F(g(x)) dx &= \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx \\ F(g(x)) + \text{const} &= \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx \\ F(g(x)) + \text{const} &= \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx \quad | \text{ Substitutionsregel}\end{aligned}$$

Beispiel 16:

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx &= \sin(\ln(x)) + \text{const} \\ f(x) &= \cos(x), g(x) = \ln(x), g'(x) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

4.3.4.1. Spezialfälle

Wird eine Funktion f mit bekannter Stammfunktion F auf einen linearen Term angewendet $ax + b$ angewendet, so lässt sich auch die Funktion $f(ax + b)$ integrieren:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + \text{const} = \frac{1}{a} \int f(ax + b) a dx$$

Besteht der Integrand aus dem Produkt einer Funktion f mit seiner eigenen Ableitung, so lässt sich dieser Term ohne Kenntnis der Stammfunktion von f integrieren:

$$\int f(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + \text{const} = \int \text{id}(f(x)) f'(x) \, dx$$

denn

$$\int \text{id}(x) \, dx = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + \text{const}$$

Dasselbe gilt auch, wenn eine Potenz von f mit der Ableitung von f multipliziert wird. Für $q \neq -1$ gilt:

$$\int f^q(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{q+1} f^{q+1}(x) + \text{const}$$

Besteht der Integrand aus einem Bruch, dessen Zähler gleich der Ableitung des Nenners ist, so lässt sich dieser Term ohne Kenntnis einer Stammfunktion integrieren:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln(|f(x)|) + \text{const}$$

Beispiel 17:

$$\begin{aligned} \int \sin(x^2 + x)(2x + 1) \, dx &= -\cos(x^2 + x) + \text{const} \\ \int \frac{\ln(u)}{u} \, du &= \ln^1(u) \cdot \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \ln^2(u) + \text{const} \\ \int \frac{\ln(x-3)}{x-3} \, dx &= \frac{1}{2} \ln^2(x-3) + \text{const} \\ \int \ln(x^2) x \, dx &= \frac{1}{2} \int \ln(u) \, du \Big|_{u=x^2} = \frac{1}{2} u \ln(u) - u \Big|_{u=x^2} + \text{const} = \frac{1}{2} x^2 \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + \text{const} \\ \int \frac{3x^2}{(7-4x^3)^3} \, dx &= -\frac{1}{4} \int (7-4x^3)^{-3} (-12x^2) \, dx = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (7-4x^3)^{-2} + \text{const} \end{aligned}$$

4.3.5. Partielle Integration

$$\frac{d}{dx}(F(x)g(x)) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \quad | \text{ Produktregel}$$

$$\int \frac{d}{dx}(F(x)g(x)) \, dx = \int F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \, dx$$

$$F(x)g(x) + \text{const} = \int F'(x)g(x) \, dx + \int F(x)g'(x) \, dx$$

$$F(x)g(x) + \text{const} = \int f(x)g(x) \, dx + \int F(x)g'(x) \, dx$$

$$\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx \quad | \text{ Partielle Integrationsregel}$$

4.4. BESTIMMTES INTEGRAL

$$\int_a^b f(x) \, dx = (F(b) \cancel{+ \text{const}}) - (F(a) \cancel{+ \text{const}}) = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{Dieselben Stammfunktionen}}$$

Voraussetzung: $\forall x \in [a; b]$. ($f(x)$ muss definiert sein)

Neues Symbol: $[F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$

$$\int f(x) \, dx = F(x) + \text{const}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$$

Beobachtungen 7:

Das bestimmte Integral repräsentiert eine Zahl, nämlich die Differenz zweier Funktionswerte einer Stammfunktion; das unbestimmte Integral steht dagegen für eine Menge aller Stammfunktionen.

4.4.1. Substitution

Bei der Substitutionsregel werden die Intervallgrenzen a, b mit dem Funktionswert des substituierten Terms $u(a), u(b)$ ersetzt.

Beispiel 18: $\frac{1}{3\pi} \int_0^{3\pi} \cos\left(\frac{2}{3}t - \pi\right) \, dt$

$$u(t) = \frac{2}{3}t - \pi$$

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}t - \pi\right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3\pi} \int_0^{3\pi} \cos\left(\underbrace{\frac{2}{3}t - \pi}_u\right) \, dt = \frac{1}{3\pi} \int_{u(0)}^{u(3\pi)} \cos(u) \cdot \frac{1}{u'} \, du$$

$$= \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{3}{2} \, du$$

$$= \frac{1}{3\pi} \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\sin(u)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

Beispiel 19: $\int_{\ln(\frac{1}{2})}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \, dx$

$$u(x) = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} du = dx \\
 &\int_{\ln(\frac{1}{2})}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int_{\ln(\frac{1}{2})}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \underbrace{\frac{1}{e^x} du}_{dx} \\
 &= \int_{e^{\ln(\frac{1}{2})}}^{e^0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
 &= [\arcsin(u)]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

4.4.2. Rechenregeln

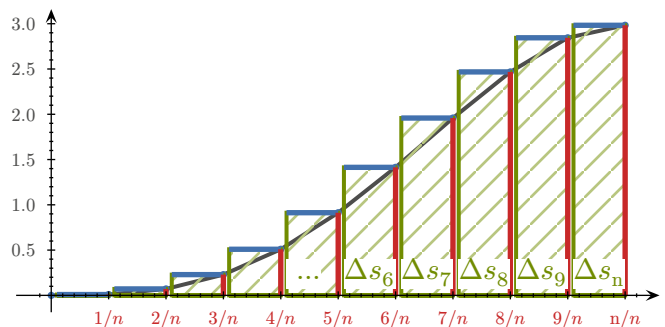
$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\
 \int_a^a f(x) dx &= 0 \\
 \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\
 F_a(x) &= \int_a^x f(t) dt \\
 \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) &= f(x)
 \end{aligned}$$

4.4.3. Bestimmtes Integral als Grenzwert

Das Integral kann man näherungsweise berechnen, indem man das Intervall in n gleich grosse Segmente unterteilt und die jeweiligen Funktionswerte summiert (= Riemann Summe). Beispielsweise ist folgende Geschwindigkeit eines Zuges gegeben:

Intervall: $[0; 1]$

Breite: $\Delta t = 1/n$



Endgeschwindigkeit pro Segment: $v_k = v(k/n)$.

Zurückgelegte Strecke im k Segment: $\Delta s_k = v_k \Delta t = v(k/n) 1/n$

Gesamtstrecke des «blauen Zuges»

$$s = \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \sum_{k=1}^n v\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v\left(\frac{k}{n}\right)$$

Gesamtstrecke des «schwarzen Zuges» $[v = v(t)]$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v\left(\frac{k}{n}\right)$$

Dies führt uns zur Neudefinition des bestimmten Integrals:

$$\int_0^1 v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v\left(\frac{k}{n}\right)$$

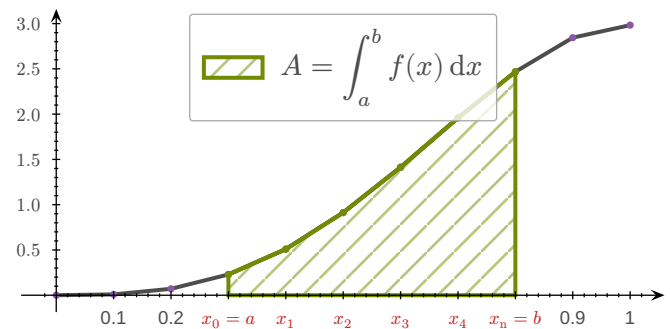
4.4.4. Flächenberechnungen

Näherung von A

Teile Intervall $[a; b]$ in n gleich grosse Teile

Breite: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Intervall des k Segments $\left[a + (k-1)\Delta x; \underbrace{a + k\Delta x}_{x_k} \right]$



Fläche des Rechtecks über dem k Segment habe die Höhe $f(x_k)$

$$\Delta A_k = f(x_k) \cdot \Delta x = f(a + k \cdot \Delta x) \cdot \frac{b-a}{n} = f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Näherungsweise Flächeninhalt:

$$A \approx \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \text{exakter Flächeninhalt*}: A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta A_k$$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

* Kann negativ sein. Fürs Integral ist das korrekt, für die Fläche müsste der absolute Wert genommen werden

Somit können wir das bestimmte Integral definieren wie folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

4.4.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz: Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion ihres Integranden:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{x-a}{n}\right)$$

$$F'_a(x) = f(x)$$

«Beweis»:

$$F'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(x) dt - \int_a^x f(x) dt \right)$$

$$F'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$\int_x^{x+h} f(t) dt \approx f(x) \cdot h \Rightarrow F'_{a(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot f(x) \cdot h \right) = f(x)$$

4.4.6. Äquivalenz beider Definitionen des bestimmten Integrals

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \int_a^x f(t) dt + c \\ \Leftrightarrow c &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \quad c \text{ hängt nicht von } x \text{ ab} \\ \xRightarrow{x=a} c &= \int_a^a f(t) dt - \int_a^a f(t) dt \\ \Leftrightarrow c &= 0 - 0 \end{aligned}$$

4.4.7. Verbesserungen der Approximation:

Trapezregel (lineare Splines):

$$\int_a^b s(x) dx = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

Fassregel / Simpson regel (polynome):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

→ Annäherung der Funktion f durch eine Parabel, bestimmt durch die drei Punkte $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, $(\frac{a+b}{2}; f(\frac{a+b}{2}))$

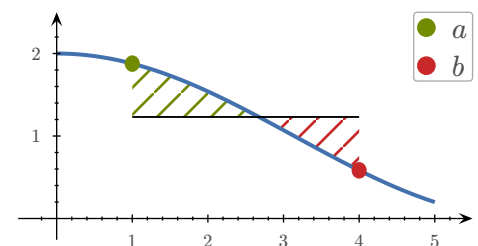
4.4.8. Mittlerer Funktionswert

Für jede im Intervall $[a; b]$ definierte stetige Funktion $f(x)$ nennen wir

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

den **mittleren Funktionswert** von f im Intervall $[a; b]$.

⇒ Fläche **unterhalb** der mittellinie bis b und **oberhalb** bis a ist gleich.



$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right) \end{aligned}$$

5. FOURIERREIHEN

Die **Fourier-Analyse**, die auch als klassische harmonische Analyse bekannt ist, befasst sich mit der Zerlegung von Signalen in ihre harmonischen Komponenten, welche aus mathematischer Sicht gewöhnliche Sinusschwingungen darstellen.

Fourierreihen zerlegen periodische Funktionen in trigonometrische Komponenten

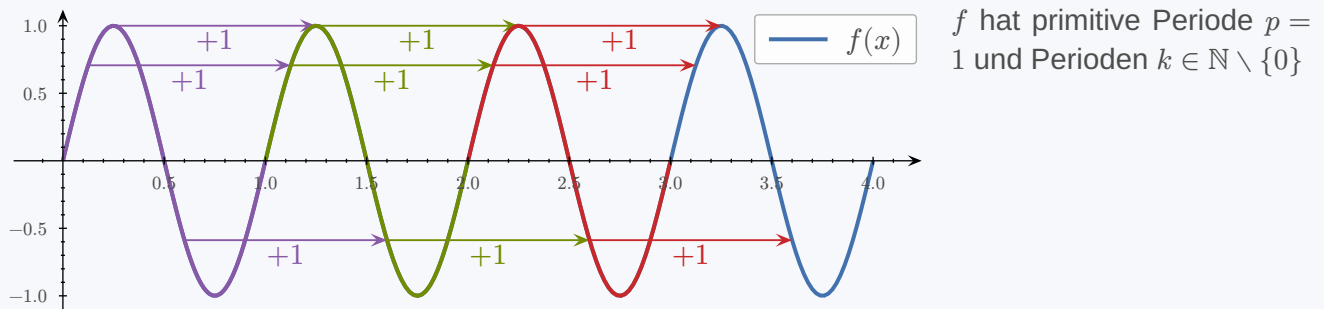
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot x\right)$$

5.1. PERIODISCHE FUNKTIONEN

Gegeben einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst $p > 0$ **Periode** von f , wenn $\forall x \in \mathbb{R}. (f(x+p) = f(x))$. Die Funktion f heisst in diesem Fall p -periodisch.

Ist p die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, heisst p **primitive Periode**.

Beispiel 20:



Sei $f(x)$ p -periodisch. Dann ist $g(x) = f(\alpha x)$ auch periodisch, und zwar mit Periode $q = p/\alpha$

$$g(x+q) = f(\alpha(x+q)) = f\left(\alpha x + \underbrace{\alpha q}_{=p}\right) \stackrel{!}{=} f(\alpha x) = g(x)$$

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen mit der gemeinsamen Periode p . Dann ist auch die Funktion

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

p -periodisch.

Beobachtungen 8:

1. Ist eine periodische Funktion f stetig und nicht konstant, so besitzt die Funktion eine primitive Periode P und jede andere Periode von f ist ein ganzzahliges Vielfaches von P .
2. Die konstanten Funktionen sind periodisch zu jeder Zahl $p > 0$, besitzen aber keine primitive Periode.
3. $\sin$ und $\cos$ haben Periode $p = 2\pi$

5.2. FOURIERREIHEN

Die Funktionen

$$c_0(t) = 1$$

$$c_k(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)$$

$$s_k(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t\right)$$

heissen **Fouriermoden** mit $T > 0 \wedge k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und haben die Periode T .

Da Linearkombinationen T -periodischer Funktionen wieder T -periodisch sind, hat auch

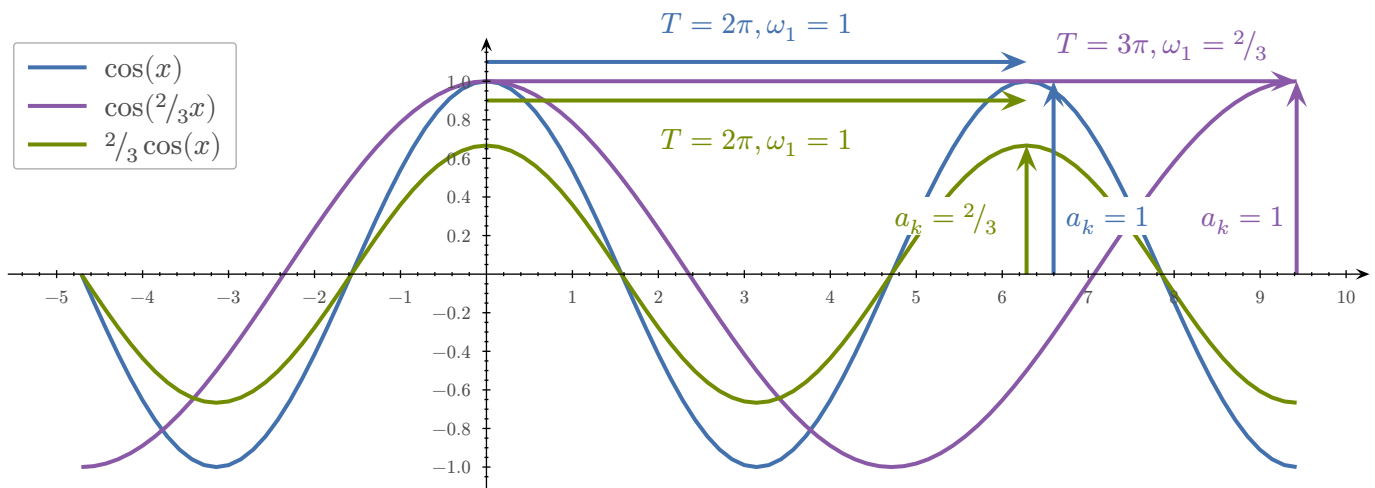
$$f(t) = a_0 c_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k(t) + b_k s_k(t)$$

die Periode T .

a_k und b_k heissen **Fourierkoeffizienten**. Die Menge aller Fourierkoeffizienten heisst **Spektrum**.

Die Zahl $\omega_1 = 2\pi/T$ heisst **Grundkreisfrequenz** der Fourierreihe.

Ziel ist nun, die Fourierkoeffizienten so zu bestimmen, dass die gesuchte Funktion näherungsweise erfüllt ist.



Beispiel 21:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos\left(\frac{2}{3}t - \pi\right) = -\cos\left(\frac{2}{3}t\right) \\ &= \underbrace{-1}_{\stackrel{!}{=} a_k = a_1} \cos\left(\underbrace{2\pi/3\pi}_{\stackrel{!}{=} T} \cdot \underbrace{1}_{\stackrel{!}{=} k} \cdot t\right) \end{aligned}$$

Wähle $T = 3\pi, \omega_1 = 2/3, a_1 = -1$, alle anderen $a_k = 0$, alle $b_k = 0$.

5.2.1. Fourierreihen mit endlichem Spektrum

Sei $\omega_1 = 2\pi/T$. Dann gilt laut den **Orthogonalitätsbedingungen** für alle $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(k\omega_1 t) \sin(l\omega_1 t) dt &= 0 \\ \int_0^T \sin(k\omega_1 t) \sin(l\omega_1 t) dt &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ \frac{T}{2} & \text{falls } k = l \end{cases} \\ \int_0^T \cos(k\omega_1 t) \cos(l\omega_1 t) dt &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ \frac{T}{2} & \text{falls } k = l \end{cases} \end{aligned}$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) \end{aligned}$$

Produktformeln:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

Funktionen der Form

$$S_{\infty}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t) + b_k \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t)$$

heissen **Fourierreihe** der Funktion $f(t)$.

Funktionen mit Periode $T = 2\pi/\omega_1$ und endlichem Fourier-Spektrum der Form

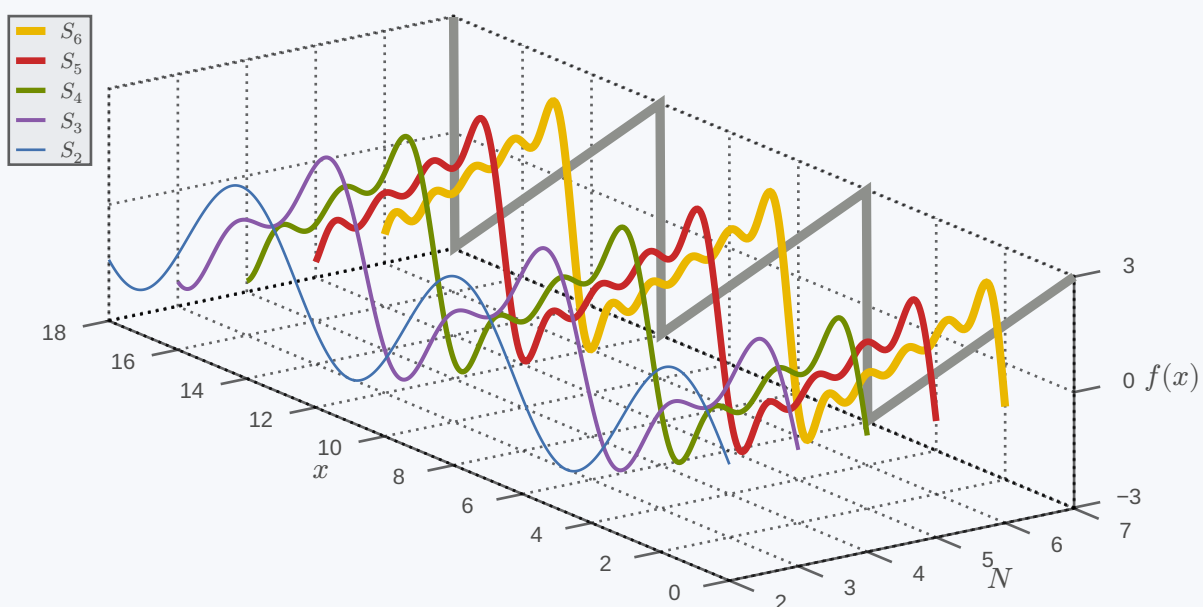
$$S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t) + b_k \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t)$$

heissen **Fourierreihe der N -ten Ordnung**. Ihre Fourierkoeffizienten lassen sich mit den folgenden Formeln berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_1 k t) dt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_1 k t) dt$$

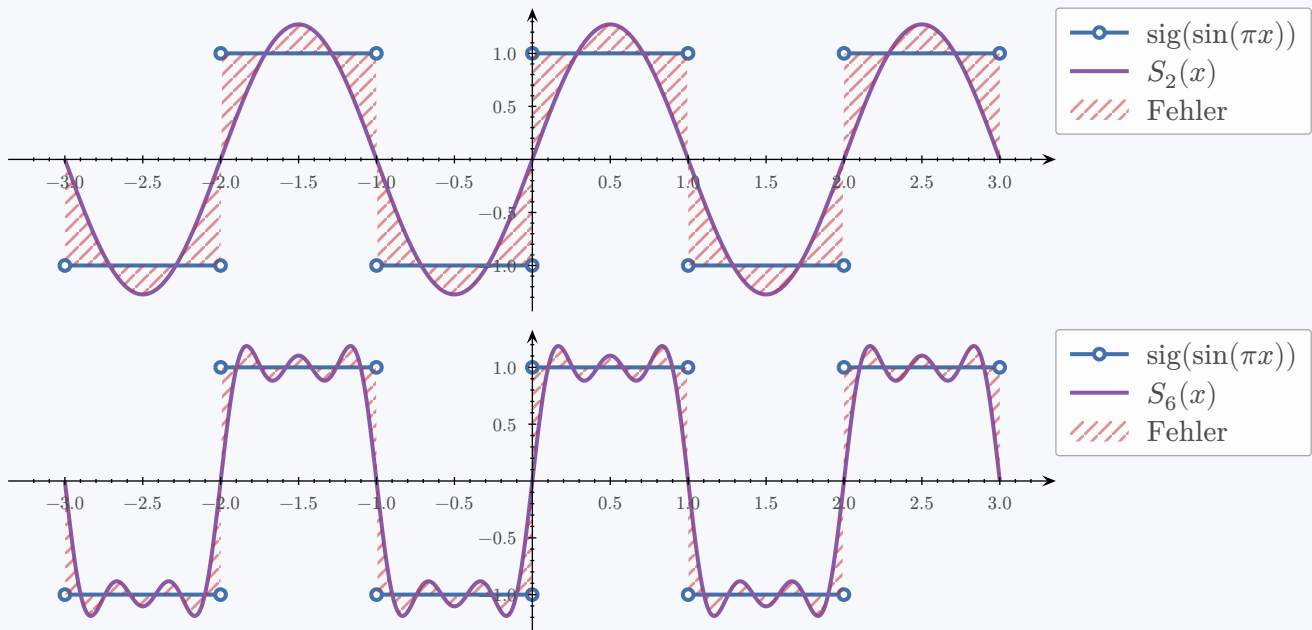
Beispiel 22:

5.2.2. Fourierreihen periodischer Funktionen

Sei $S_N(t)$ die Fourierreihe der N -ten Ordnung der Funktion $f(t)$. Ziel ist es nun, die Ausgangsfunktion möglichst genau durch $S_N(t)$ zu approximieren.

$$\text{Fehler} = \int_0^T (f(t) - S_N(t))^2 dt$$

Beispiel 23:



Es lässt sich zeigen, dass der Fehler

$$\int_0^\infty (f(t) - S_N(t))^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

mit wachsendem N gegen null strebt und erfüllt somit die Eigenschaft der **Vollständigkeit**.

5.2.3. Konvergenz von Fourierreihen (Satz von Dirichlet)

Sei $f(t)$ eine stückweise stetig differenzierbare, T -periodische Funktion, d.h. eine T -periodische Funktion, die im Intervall $[0; T]$ bis auf an endlich vielen Stellen stetig differenzierbar ist, für die an allen Unstetigkeitsstellen jeweils der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existiert. Dann stimmt die Funktion $f(t)$ überall dort mit der Fourierreihe $S_\infty(t)$ überein, wo die Funktion $f(t)$ stetig ist. Überall dort, wo $f(t)$ stetig ist, gilt also

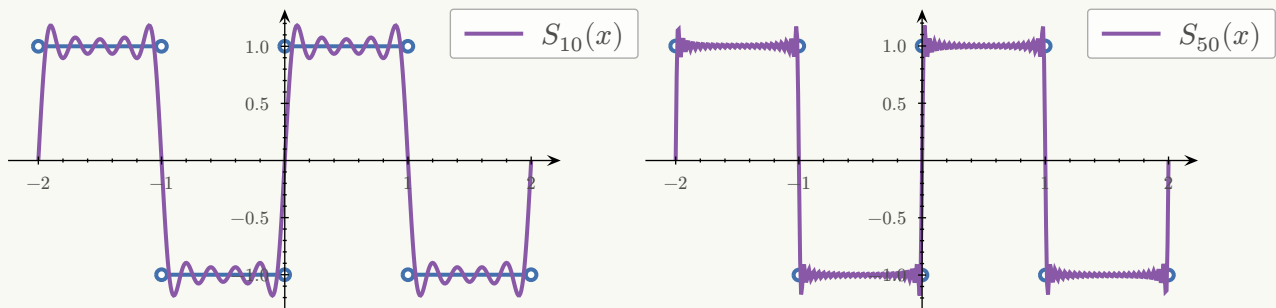
$$S_\infty(t) = f(t)$$

Ist t dagegen eine Unstetigkeitsstelle von $f(t)$, so liefert die Fourierreihe an dieser Stelle dagegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte, d.h. an diesen Stellen gilt:

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t-} f(\tau) \right)$$

Beobachtungen 9:

Entwickelt man eine Fourierreihe einer unstetigen, periodischen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger, die sich auch dann nicht verringern, wenn man versucht, die Funktion durch weitere Summenglieder anzunähern. Dieses Verhalten nennt man **Gibbssches Phänomen**.

**5.2.4. Symmetrieeigenschaften****Definition 2: Gerade, ungerade Funktion**

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{Z}$ heisst **gerade**, wenn

$$\forall t, -t \in D. (f(-t) = f(t))$$

und **ungerade** wenn

$$\forall t, -t \in D. (f(-t) = -f(t))$$

Das Produkt von zwei geraden Funktionen und das Produkt von zwei ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.

Integriert man eine T -periodische Funktion f über eine ganze Periode, so ist der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl der unteren Integrationsgrenze a , d.h. es gilt

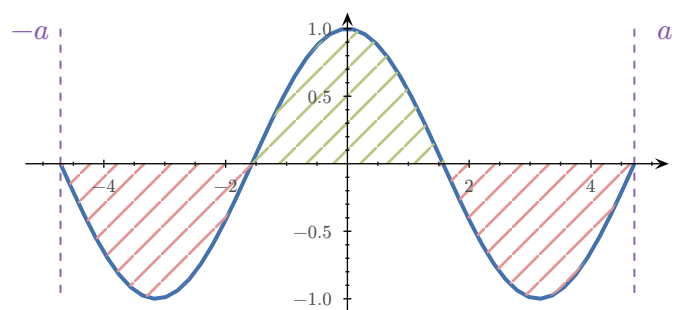
$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

5.2.4.1. Gerade Funktionen

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{Z}$ eine gerade Funktion und $a \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass das Intervall $(-a, a) \subset D$. Dann gilt

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$$

Beispiel: $g(x) = \cos(x)$



Sei f eine T -periodische, gerade Funktion. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten von f

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (3)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\omega_1 kt) dt$$

$$b_k = 0$$
(3)

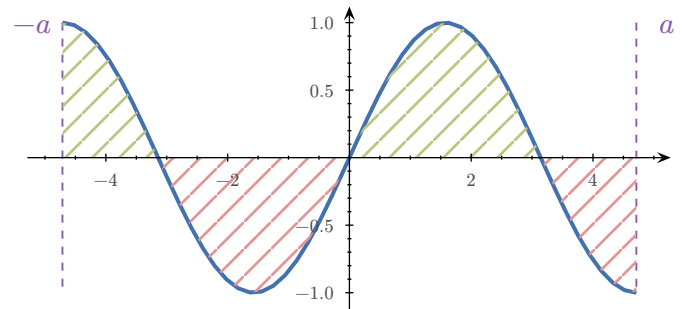
Die Fourierreihe einer geraden Funktion enthält also nur den konstanten Term und Kosinusterme, d.h. keine Sinusterme.

5.2.4.2. Ungerade Funktionen

Sei $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion und $a \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass das Intervall $(-a, a) \subset D$. Dann gilt

$$\int_{-a}^a h(x) dx = 0$$

Beispiel: $h(x) = \sin(x)$



Ist f eine T -periodische, ungerade Funktion, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f

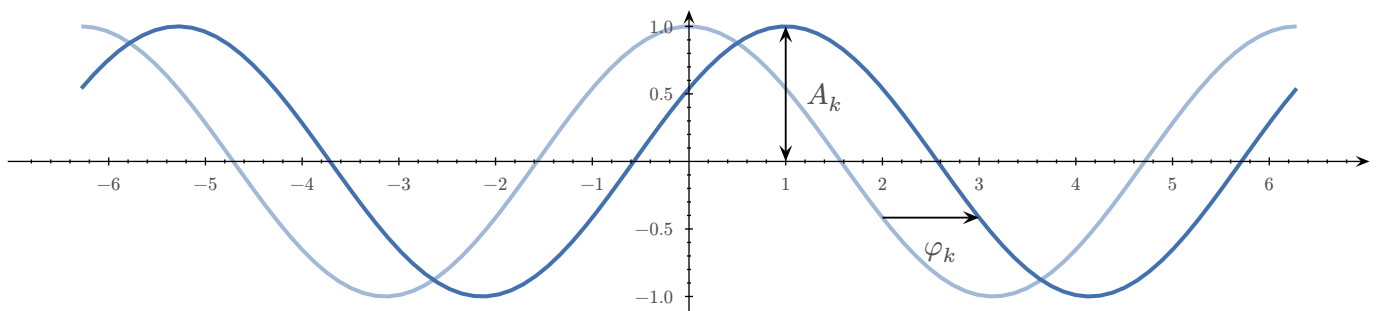
$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\omega_1 kt) dt$$
(4)

5.2.5. Sinus-Kosinus und Amplituden-Phasen-Form

Neben der **Sinus-Kosinus Darstellung** gibt es noch eine zweite Darstellungsart: die **Amplituden-Phasen-Form**. Die Amplituden-Phasen-Form ist stärker mit der komplexwertigen Darstellung von Fourierreihen verwandt und erlaubt eine kompaktere Darstellung der Fourierreihen von Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen. Zum anderen lassen sich die Fourierkoeffizienten in dieser zweiten Darstellungsform besser interpretieren.



Definition 3: Amplituden-Phasen-Form

Sei $f(t)$ eine stückweise stetig differenzierbare, T -periodische Funktion, für die an allen Unstetigkeitsstellen jeweils der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existiert. Dann lässt sich die Funktion nach [«Kovergenz von Fourierreihen \(Satz von Dirichlet\)» \(Seite 30\)](#) als Fourierreihe $S_\infty(t)$ entwickeln. Die Fourierreihe kann dabei auf zwei Arten angegeben werden. Entweder (wie bisher) in der Sinus-Kosinus-Form

$$S_\infty(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)$$

oder in der **Amplituden-Phasen-Form**

$$S_{\infty}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

In diesen Formeln ist wie üblich $\omega_1 = 2\pi/T$. Ferner sind die **Amplituden** A_k in der Amplituden-Phasen-Form so gewählt, dass $A_k \geq 0$ gilt und die **Phasen** φ_k nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Man kann die Phasen aber durch eine Zusatzforderung eindeutig festlegen. Gebräuchlich sind in diesem Fall entweder $\varphi_k \in [0; 2\pi)$ oder $\varphi_k \in (-\pi; \pi]$.

Die Gesamtheit aller Amplituden bzw. aller Phasen nennt man auch **Amplituden-** bzw. **Phasenspektrum**.

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten in der Sinus-Kosinus-Form geschieht mit Hilfe von [Gleichung 2](#) oder im Fall von geraden oder ungeraden Ausgangsfunktionen auch mit Hilfe von [Gleichung 3](#) oder [Gleichung 4](#). Die Berechnung der Fourierkoeffizienten in der Amplituden-Phasen-Form geschieht danach, in einem zweiten Schritt mit Hilfe der vorgängig berechneten Koeffizienten mit Hilfe des Additionstheorems.

Dies geschieht nach dem folgenden Schema:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \text{irrelevant} & a_k = b_k = 0 \\ 0 & a_k > 0, b_k = 0 \\ \pi & a_k < 0, b_k = 0 \\ \arccos\left(\frac{a_k}{A_k}\right) & b_k > 0 \\ -\arccos\left(\frac{a_k}{A_k}\right) & b_k < 0 \end{cases}$$

Die umgekehrte Umrechnung (Amplituden-Phasen- zu Sinus-Kosinus-Form) erfolgt mit den folgenden Formeln:

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = A_k \sin(\varphi_k)$$

Dies lässt sich geometrisch als Umrechnung von 2 dimensional kartesischen Koordinaten in polare Koordinaten deuten. Um diesen «geometrischen Weg» zur Bestimmung der Amplituden und Phasen einer Fourierreihe zu beschreiten, tragen wir das Koeffizientenpaar $(a_k; b_k)$ als Punkt in einem 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem ab. Der Abstand, den dieser Punkt dann vom Ursprung des Koordinatensystems hat, lässt sich dann als Amplitude A_k interpretieren und der Winkel, unter dem dieser Punkt im Koordinatensystem zu finden ist, als Phase.

Beispiel 24: $f(x) = A \cdot \cos(x - \varphi)$

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cdot \cos(x - \varphi) \\ &= A \cdot (\cos(x) \cos(\varphi) + \sin(x) \sin(\varphi)) \\ &= A \cos(x) \cos(\varphi) + A \sin(x) \sin(\varphi) \\ \Rightarrow a &= A \cos(\varphi) \\ \Rightarrow b &= A \sin(\varphi) \end{aligned}$$

A muss grösser als 0 sein:

$$a^2 + b^2 = A^2 \cos^2(\varphi) + A^2 \sin^2(\varphi)$$

$$\stackrel{A>0}{\Leftrightarrow} A = \sqrt{a^2 + b^2}$$