1 Integralrechnung S492

1.1 Integrationsmethoden S495ff

Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta)+C$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$
Weierstrass-Substitution	$t=\tan\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\int R(\sin(x),\cos(x))dx$
Allgemeine Substitution	$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$ $t=g^{-1}(x)$ $\boxed{\text{x=g(t)}} \Leftrightarrow^{d(\dots)} dx = g'(t)\cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ $(f(x)\neq 1)$ $y'(x)\cdot dx = dy \rightarrow$ allg. gültig
Potenzregel	$\int f'(x)\cdot(f(x))^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$
Differentiation	$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$ $\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$
Mittelwerte	linear: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ quadratisch: $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \lvert f(x)^2\rvert dx}$

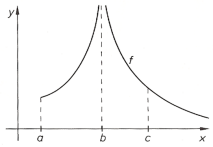
1.1.1 Einige unbestimmte Integrale S1081ff

1. $\int dx = x+C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
3. $\int\frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C,\quad x\neq 0$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\quad x\neq k\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
9. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
10. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
11. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
12. $\int\frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\quad x\neq 0$
13. $\int\frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
14. $\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\quad a\neq 0, x\neq -\frac{b}{a}$
15. $\int\frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$
16. $\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad x\neq\frac{b}{a},\quad x\neq -\frac{b}{a}$
17. $\int\sqrt{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2}+\frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2})+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$
18. $\int\sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2}-\frac{b^2}{2a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0, a^2x^2\geqq b^2$
19. $\int\sqrt{b^2-a^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2}+\frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a^2x^2\leqq b^2$
20. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2})+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$
21. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0\quad a^2x^2>b^2$
22. $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a^2x^2<b^2$
23. Die Integrale $\int\frac{dx}{X}$, $\int\sqrt{X}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X=ax^2+2bx+c$, $a\neq 0$ werden durch die Umformung $X=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)$ und die Substitution $t=x+\frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
24. $\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\quad a\neq 0,\quad X=ax^2+2bx+c$
25. $\int\sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax+C,\quad a\neq 0$
26. $\int\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax+C,\quad a\neq 0$
27. $\int\sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\neq 0$
28. $\int\cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\neq 0$
29. $\int\frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad x\neq k\frac{\pi}{a}\text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
30. $\int\frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad x\neq\frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}\text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
31. $\int\tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad x\neq\frac{\pi}{2a}+k\frac{\pi}{a}\text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
32. $\int\cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert+C,\quad a\neq 0,\quad x\neq k\frac{\pi}{a}\text{ mit } k\in\mathbb{Z}$
33. $\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\neq 0$
34. $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\neq 0$
35. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\neq 0$
36. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$
37. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C,\quad a\neq 0, b\neq 0$
38. $\int\ln x\,dx = x(\ln x-1)+C,\quad x\in\mathbb{R}^+$
39. $\int x^\alpha\cdot\ln x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x-1]+C,\quad x\in\mathbb{R}^+,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1.2 Uneigentliche Integrale S518

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsberech** integriert wird.
Für unbeschränkte Funktionen:
$I = \int_a^c f(x)dx = \lim_{t\uparrow b}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\downarrow b}\int_t^c f(x)dx$

Für die unbeschränkte Integration:
$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx;$
$I = \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx;$
$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t_1\to-\infty}\lim_{t_2\to\infty}\int_{t_1}^a f(x)dx + \int_a^{t_2} f(x)dx$
Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$



unbeschränkte Funktion

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty f(x)dx = 0$, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $|f(x)| \geq 0$ absolut konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq |f(x)|$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty |f(x)|dx$ und somit konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. $x \in [a, \infty[$

1.2.3 Minorantenprinzip

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. $x \in [a, \infty[$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungungsvarianten

Funktion (explizit)
$y = f(x)$
(Bronstein S.49, 147)

Koordinatengleichung (implizit)
$F(x, y) = 0$
(Bronstein S.49)

Parameterform(Cartesisch)
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$
(Bronstein S.49)

Polarform x
$r = f(\varphi)$

→ Ordnung immer ohne $\sqrt{}$

2.2 Umrechnen diverser Systeme S49

Parameter	⇒ explizit	$t = f(x);\ y = g(f(x))$
Explizit	⇒ Parameter	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$
Ex- bzw. implizit	⇒ Polar	Ersetze $x = r\cos(\varphi)\ ;\ y = r\sin(\varphi)\ ;\ x^2 + y^2 = r^2$
Polar	⇒ implizit	Ersetze $r\sin(\varphi) = y;\ r\cos(\varphi) = x;\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	⇒ Parameterform	$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	⇒ Polar	$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

2.3 Kurvenarten S203ff

bei '+', Kurve auf linke Seite geöffnet
bei '-', Kurve auf rechte Seite geöffnet } bei Polarform

Kreis S203

Implizit: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
Bemerkung: Mittelpunkt (x_0,y_0); Radius r
Polarform: $r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)};\epsilon=0$
Parameterform: $x=x_0+R\cos(t), y=y_0+R\sin(t)$
p,ϵ: $p=\frac{b^2}{a}$

Ellipse S204

$(\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2=1$
Mittelpunkt (x_0,y_0); Halbachsen a, b
$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)};0<\epsilon<1$ (rechter Brennpunkt)
$x=a\cos(t), y=b\sin(t)$ um $P(0,0)$
$\epsilon=\frac{c}{a}$ p=b^2/a
Mittelpunkt (c / 0) x0= c , Y0=0

Hyperbel S206

Implizit: $(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1; -(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$
Bemerkung: Achsenkreuz in $P(0,0)$
Polarform: $r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)};\epsilon>1_{(rechter Hyperbelast)}$
Parameterform: $r=\frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}{}_{(linker Hyperbelast)}$
$x=a\cosh(t), y=b\sinh(t)$
Mittelpunkt (-c / 0) x0= c , Y0=0

Parabel S209

$y^2=2p(x-x_0)$
Parabeln mit Scheitelpunkt auf der vertikaler Achse
$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos(\varphi)};\epsilon=1$
$x=\frac{t^2}{2p}, y=t$
p =Halbparameter (2·Abstand Scheitel-Brennpunkt)
Mittelpunkt (x+p/2, 0)

Kardioide/Herzk. S99

Polarform: $r=a(1+\cos(\varphi))$

Lemniskate "∞" S101

$r=a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$

Strophoide/harm. K. S96

$r=-a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)},(a>0)$

2.4 Gleichungen, Mittelwerte S19ff, 509

Tangentengleichung

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
$\dot{x_0}(y-y_0)=\dot{y_0}(x-x_0)$

Normalengleichung

$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

Linearer Mittelwert

$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Quadratischer Mittelwert

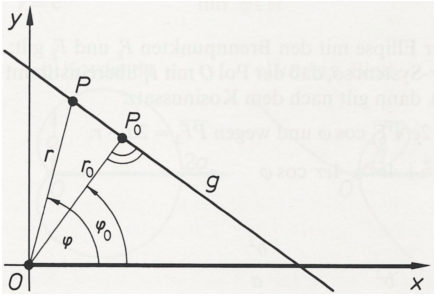
$\bar{f}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2dx}$

2.5 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale S251ff

2.6 Abstandsformeln

Hessesche Normalform S200f, 224

$x\cdot\cos\varphi_0+y\cdot\sin\varphi_0=r_0$



Geradengleichung

$y-y_0=m(x-x_0)$

Abstand zum Ursprung

$\frac{|y_0-m\cdot x_0|}{\sqrt{m^2+1}}$

2.7 Berührung in n-ter Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y=f(x)$ und $y=g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0,y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.
$f(x_0)=g(x_0);\ f'(x_0)=g'(x_0);\ f''(x_0)=g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$

2.8 Scheitel S256

Scheitelpunte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle. $\kappa'(x)=0;\kappa''(x)\neq 0$

2.9 Wichtige Formeln S249ff

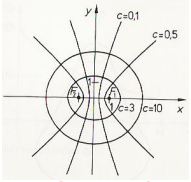
Cartesisch	**Parameter**	**Polar**
Anstieg einer Kurve, Ableitung, 2. Ableitung		
$y' = f'(x_o) \quad y'' = f''(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{r'(\varphi)\sin(\varphi)+r(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$
Bogenlänge S514		
$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung ebener Kurven S253		
$\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}$
Konvex (Linkskurve): $\kappa \geq 0$ Streng konvex: $\kappa > 0$ Wendepunkt: $\kappa = 0$ Analog für konkav		
Krümmungskreisradius S253 $r = \lvert\frac{1}{\kappa}\rvert$		
$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}{f''(x)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2})^3}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)}\right\rvert$	$r = \left\lvert\frac{(\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2})^3}{2(r'(\varphi))^2-r(\varphi)r''(\varphi)+(r(\varphi))^2}\right\rvert$
Flächeninhalt S513 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren		
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(r(\varphi))^2d\varphi$
Volumen S514 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren / Nur 1.Hälfte der Kurve integrieren!		
$V = \pi\int_a^b (f(x))^2dx$	$V = \pi\left\lvert\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\dot{x}(t)dt\right\rvert$	$V = \pi\left\lvert\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\sin^2\varphi[r'(\varphi)\cos(\varphi)-r(\varphi)\sin(\varphi)]d\varphi\right\rvert$
Oberflächeninhalt S514 um x-Achse / für y-Achse: $f(y)$ von y_0 bis y_1 integrieren / Nur 1.Hälfte der Kurve integrieren!		
$O = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}^2(t)+(\dot{y}^2(t))}dt$	$O = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\lvert r(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}d\varphi$
Polar: $\sin\varphi$ = Drehung um Polgerade $\cos y$ = Drehung um y-Achse ($f = \frac{\pi}{2}$) $\rightarrow$ siehe Fläche		
Krümmungskreismittelpunkt		
$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx}[1+(\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ $y_c = y + \frac{1+(\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$ $y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$	$x_c = r\cdot\cos\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\cos\varphi+r'\cdot\sin\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$ $y_c = r\cdot\sin\varphi - \frac{(r^2+r'^2)(r\cdot\sin\varphi-r'\cdot\cos\varphi)}{r^2+2r'^2-r\cdot r''}$

2.10 Evolute

Evolute = Σ Krümmungskreiszentren

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\vec{n}$$

2.11 Orthogonaltrajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x,c)$ (c bestimmen) im rechten Winkel. Die DGL $F(x,y,y')$ der Kurve bestimmen(y' ableiten, c einsetzen, wenn möglich für $f(x,c) = y$), anschliessend y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen. $\Rightarrow$ ergibt die DGL der orthogonalen Trajektorien.
Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.

$\frac{r'}{r} = f(\varphi,r) \quad \xrightarrow{orthogonal} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi,r)}$

1. y' ausrechen 2. ~y' = - 1/y' 3. nach y auflösen.

3 Reihen S469, 1073

3.1 Zahlenreihen S470

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist eine (unendliche) Reihe. Sie ist die Folge von Partialsummen einer bestehenden Folge a_n.

3.1.1 Konvergenz, Divergenz S471

Konvergiert die Reihe $< s_n >$ gegen die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ so ist sie konvergent. Existiert der GW nicht, so ist sie divergent.

3.1.2 Konvergenzkriterien S462

3.1.2.1 Cauchy-Kriterium

Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt:
$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, dann konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie.

3.1.2.2 lim = 0

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Aber NICHT UMGEKEHRT!

3.1.2.3 Divergenz

Ist $< a_n >$ divergent oder ist $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

3.1.2.4 Majorantenkriterium S478

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|a_n| \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $|a_n| \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
$\sum_{n=1}^{m} a_k \leq |\sum_{n=1}^{m} a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_k| \leq \sum_{n=1}^{m} c_n$

3.1.2.5 Minorantenkriterium

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$.
Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Reziprokkriterium	$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.	
Quotientenkriterium S473	$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha < 1$ (aboslut) konvergent
Wurzelkriterium S473	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\alpha = 1$ keine Aussage! $\alpha > 1$ divergent
Integralkriterium S474	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent. Gilt nur, wenn f auf $[1,\infty)$ definiert und monoton fallend $(f'(x) \leq 0)$ ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,\infty)$ sein.	
Leibniz-Kriterium S475	Die **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $< \lvert a_n\rvert >$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$) ist. Monotonie mittels Verhältnis ($\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert$), Differenz ($\lvert a_{n+1}\rvert - \lvert a_n\rvert \leq \lvert a_{n+1}\rvert$) oder *vollständiger Induktion* beweisen.	

3.1.2.6 Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe S471

$|R_n| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

3.1.3 Bedingte und Absolute Konvergenz S474

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Bedingt Konvergent:	Eine Reihe hat durch Umordnen einen anderen Grenzwert oder wird divergent (somit nicht absolut konvergent).
Unbedingt Konvergent:	Durch Umordnen ändert sich der Grenzwert nicht.

3.1.4 Produkt von absolut konvergenten Reihen S475

Gegeben sei: $\sum a_n = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = c$ so ist $c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ und $c = a \cdot b$

3.1.5 Fehlerformel

$|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$

3.2 Potenzreihen S481

3.2.0.1 Definition S432

Potenzreihe (| q | > 1) $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ = 1-q^n / (1-q)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heisst Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n.

Geometrische Reihe S19	$a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$	$(\|q\| < 1)$	Beidseitiges $\int \quad \Rightarrow \quad a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -a \cdot \ln\|1-q\|$
Binominalreihe S12	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$	$x \in (-1, 1)$	Binominalkoeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Taylor-Reihe S483	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$	Taylor-Reihe von f bezüglich der Stelle x_0	
E-Funktion	$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$		
	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$	für $x_0 = 0$	

Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k$ 1+ 1/2 + 1/3 + 1/4 + … + 1/n =+ ∞ Reihe Divergiert (∞)

3.2.1 Konvergenz S481

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ oder $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$

Für $a = 0$ ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Für $a > 0$ ist die Potenzreihe für alle x mit $\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = r \Rightarrow \text{ absolut konvergent.} \\ |x| > \frac{1}{a} = r \Rightarrow \text{ divergent.} \end{cases}$

Ist die Folge $< \sqrt[n]{|a_n|} >$ nicht beschränkt, so ist die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent.

3.2.2 Abel's Theorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$ konvergent $= \lim_{x\uparrow r} f(x)$ (= Summe der Reihe)

3.2.3 Konvergenzradius S481

Jeder Potenzreihe kann ein Konvergenzradius r zugeordnet werden. Wobei gilt $r = \frac{1}{a}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Für $a = 0$ gilt $r = \infty$. Wenn a nicht exisitiert (Folge divergent) ist $r = 0$.

Berechnung mittels Quotientenkriterium: $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

3.2.4 Differentiation

Alle Potenzreihen mit einem $\rho > 0$ sind für alle $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.
Der Potenzradius ρ ist bei allen Ableitungen gleich demjenigen der Ursprungsfunktion. $\rho_f = \rho_{f^{(i)}}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \qquad f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$$

Bemerkung: Startwert $(n = 0)$ nur erhöhen, wenn bei x^n, n negativ werden würde!

3.2.5 Integration

3.2.5.1 Unbestimmtes Integral

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \qquad \text{für alle } x \in (-\rho, \rho).$$

3.2.5.2 Bestimmtes Integral

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \qquad \text{für alle } x \in (-\rho, \rho).$$

3.3 einige Reihen

-ln(1-x) $\sum_{n=1}^{\infty}$ x^n/n = x + x^2 / 2 +x^3 / 3 +...+x^n / n

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$(1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$[1])	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots \right)$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$	$-1 < x \leqq 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right)$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$

C^x $\sum_{n=1}^{\infty}$ (1+1/n)^n

[1]) Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so hat die Reihe nur endlich viele (nämlich $\alpha + 1$) Glieder, da dann $\binom{\alpha}{\alpha+k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Leibniz-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + = \frac{\Pi}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ ist divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ absolut konvergent gegen 1 (beweisen mit Integralkriterium)

3.4 Grenzwerte von Reihen

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$ ($a>0$ und const.)	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^a}) = 1$ (a const.)
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1$ ($p(n)\neq 0$)	$\lim_{n\to\infty}(\frac{K}{n!}) = 0$ (K const.)	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ ($K>0$ und const.)
$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

4 Differentialgleichungen S552

4.1 Lösen von Differentialgleichungen 1.Ordnung

4.1.1 Picard-Lindelöf

Die Funktion $f(x,u,u_1,...,u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0,y_0,y_1,...,y_{n-1}) \in \mathbf{R^{n+1}}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u,u_1,...,u_{n-1}$ dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems
$y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ mit $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ... $\frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}}$ endlich beschränkt $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit

4.1.2 Trennung von Variabeln / Separation S554

Form: $y' = f(x)g(y)$ **Vorgehen:** $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, nun ist die DGL beidseitig nach x integrierbar
$(dy = y'(x)dx)$: $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$

4.1.3 Lineartermsubstitution/separierte Lösung S554

Form: $y' = f(ax+by+c)$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = ax+by+c \qquad z' = a+by' = a+bf(z)$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{z'}{a+bf(z)}d\tilde{x} = \int 1d\tilde{x} \Rightarrow \int_{z_0}^{z} \frac{1}{a+bf(\tilde{z})}d\tilde{z} = \int_{x_0}^{x} 1d\tilde{x} \qquad [d\tilde{z} = \underbrace{(a+by')}_{z'}d\tilde{x}]$$

4.1.4 Gleichgradigkeit S554

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = \frac{y}{x} \qquad z' = \frac{1}{x}(f(z)-z) \qquad y' = f(z) \qquad dz = y'(x)dx$

4.1.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung S555

Form: $y' + f(x)y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störglied}}$ **Vorgehen:** $y = e^{-\int f(x)dx}(k + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx) \qquad (k \in \mathbf{R})$

4.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S573

Form: $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ **Störglied:** $f(x)$
Homogene Differentialgleichung: $f(x) = 0$ **Inhomogene Differentialgleichung:** $f(x) \neq 0$

4.2.1 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Y_H

Charakteristisches Polynom $\underline{\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0}$ von $\underline{y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$ $(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2})$

$(D>0)$	Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$	} starke Dämpfung
$(D=0)$	Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$:	$Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$	} aperiodischer Grenzfall
$(D<0)$	Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha$:	$Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(Acos(\alpha x) + Bsin(\alpha x))$	} schwache Dämpfung / Schwingfall

Eigenfrequenz: $\omega = \alpha = \frac{\sqrt{\lvert a_1^2-4a_0\rvert}}{2}$ Dämpfung: $\lvert\delta\rvert = \lvert\lambda\rvert$

4.2.2 Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + y_P$

4.2.3 Grundlöseverfahren einer inhomogenen DGL: y_P

Homogene DGL: $g(x) = Y_H$ mit den Anfangsbedingungen $g(x_0) = 0; g'(x_0) = 1$. Wenn möglich $x_0 = 0$.

$$y_P(x) = \int_{x_o}^{x} g(x + x_0 - t) \cdot f(t) dt$$

4.2.4 Vorgehen bei einer inh. DGL mit Störgliedtabelle:

Alle Schritte werden anhand diesem Beispiel erklärt: $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$

1. Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen
   $y''+3y'+2y = 0 \Rightarrow \lambda^2+3\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2 \Rightarrow Y_H = Ae^{-x} + Be^{-2x} \Rightarrow Y_{H1} = Ae^{-x}$ und $Y_{H2} = Be^{-2c}$
2. Anhand der Störglied Tabelle y_p bestimmen
   $y_p = Ae^{-2x}$
3. Testen ob $y_p(x) = Y_{H1}$ oder $y_p(x) = Y_{H2}$ ist. Falls Bedingung(en) zutreffen: $y_p(x) = y_p(x) * x^{\text{Anzahl zutreffende Bedingungen}}$
   $y_p(x) = Y_{H2} \Rightarrow y_p(x) = Ae^{-2x}x$
4. y_p ableiten und in die DGL einsetzen
   $y_p' = (-2Ax + A)e^{-2x}$ und $y_p'' = (4Ax - 4A)e^{-2x} \Rightarrow (4Ax - 4A)e^{-2x} + 3(-2Ax + A)e^{-2x} + 2Axe^{-2x} = 3e^{-2x}$
5. Gleichung kürzen und nach x-Potenzen ordnen
   $(4A - 6A + 2A)xe^{-2x} + (3A - 4A)e^{-2x} = 3e^{-2x}$
6. Koeffizienten bestimmen:
   $(3A - 4A) = 3$ $(3A - 4A)$ kommt 3 mal in $g(x)$ vor
   $(4A - 6A + 2A) = 0$ $(4A - 6A + 2A)$ kommt 0 mal in $g(x)$ vor
   $A = -3$
7. Koeffizienten in y_p einsetzen $y_p = -3e^{-2x}$
8. Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen
9. $y = Y_H + y_{p1} + y_{p2} + \ldots$

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + a_1y' + a_0y = p_n(x)$, wobei $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und p_n ein Polynom vom Grade n ist. Dann gibt es ein Polynom q_n gleichen Grades n, so daß

a) für $a_0 \neq 0$ die Funktion $y_p = q_n(x)$
b) für $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ die Funktion $y_p = x \cdot q_n(x)$
c) für $a_0 = a_1 = 0$ die Funktion $y_p = x^2 \cdot q_n(x)$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + a_1y' + a_0y = e^{bx}p_n(x)$, wobei $a_0, a_1, b \in \mathbb{R}$ und p_n ein Polynom vom Grade n ist. Dann gibt es ein Polynom q_n gleichen Grades n, so daß,

a) falls b nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, die Funktion $y_p = e^{bx}q_n(x)$,
b) falls b einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, die Funktion $y_p = e^{bx}xq_n(x)$,
c) falls b zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, die Funktion $y_p = e^{bx}x^2q_n(x)$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + a_1y' + a_0y = e^{cx}(p_n(x)\cos bx + q_n(x)\sin bx)$, wobei $a_0, a_1, b, c \in \mathbb{R}$ und p_n, q_n Polynome höchstens n-ten Grades sind. Dann gibt es Polynome r_n, s_n höchstens n-ten Grades, so daß,

a) falls $c + jb$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist, die Funktion

$y_p = e^{cx}(r_n(x)\cos bx + s_n(x)\sin bx)$,

b) falls $c + jb$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist, die Funktion

$y_p = e^{cx}x(r_n(x)\cos bx + s_n(x)\sin bx)$

spezielle Lösung der Differentialgleichung ist.

4.2.5 Superpositionsprinzip

$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

y_1 ist spezielle Lösung der DGL	$y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1 f_1(x)$
y_2 ist spezielle Lösung der DGL	$y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2 f_2(x)$
dann ist:	$y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$

4.3 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S554

Form: $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = f(x)$

4.3.1 n-verschiedene Homogene Lösungen

Fall a: r reelle Lösungen λ_1:	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, …,$y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$	Starke Dämpfung / Kriechfall
Fall b: k komplexe Lösungen $\lambda_2 = \alpha + j\beta$:	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, …, $y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x)$	Schwache Dämpfung /
	$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, …, $y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x)$	Schwingfall

$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + ... + Ny_n$

4.3.2 Allgemeinste Lösung des partikulären Teils:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}}_{f(y,y',y'',\ldots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}} \qquad \lambda \text{ aus Homogenlösung}$$

Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ): mit m = max(m1, m2)

Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist	$y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ, so ist	$y_P = e^{\alpha x}x^u(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
	u-fache Resonanz

4.3.3 Grundlöseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \ldots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \ldots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für

$$y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t)f(t)dt$$

4.3.4 Anfangswertproblem

$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1 \qquad y''(x_0) = y_2 \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

4.4 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:

$$\dot{x} = ax + by + f(t)$$
$$\dot{y} = cx + dy + g(t)$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:

$$\underbrace{\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)}_{\text{normale DGL 2.Ordnung} \rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen}}$$

$$y = \tfrac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)))$$

Anfangsbedinung: $x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)

4.5 Faltung S802

$f(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt$ Schreibweise $f = f_1 * f_2$

5 Formeln + Theorie aus An1E

5.1 Trigonometrie

$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$

5.1.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.1.2 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

5.1.3 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$ $\qquad$ $\cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$ $\qquad$ $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ $\qquad$ $\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

5.1.4 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

5.1.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

5.1.6 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

5.1.7 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

Grenzwerte mit n-ten Wurzeln und Fakultäten

Die unten tabellierten Folgengrenzwerte werden häufig in Zusammenhang mit dem Cauchy-Wurzelkriterium bzw. dem Quotientenkriterium zur Beurteilung der Konvergenz/Divergenz von Reihen verwendet.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für jede konstante Zahl x

---

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$ für jede konstante Zahl $a > 0$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^\alpha}) = 1$ für jede konstante Zahl α

(5) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|p(n)|}) = 1$ für jede Polynomfunktion $p(n)$ ungleich 0.

(6) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|r(n)|}) = 1$ für jede rationale Funktion $r(n)$ ungleich 0.

---

(7) $\lim_{n\to\infty}(\frac{K^n}{n!}) = 0$ für jede konstante Zahl K

(8) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n}) = +\infty$

(9) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ für jede konstante Zahl $K > 0$

---

(10) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$ (Eulersche Zahl)