1 Integralrechnung 494

1.1 Integrationsmethoden (und Regeln) 495ff

Zuerst Term aufteilen soweit wie möglich (z.B. mit Partialbruchzerlegung), dann...

Grenzen	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\quad$ $\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$
Summen	$\int (a+b-c)dx = \int adx + \int bdx - \int cdx$
Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta)+C$
Allgemeine Potenzregel	$\int (f(x))^\alpha \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(f(x))^{\alpha+1}+C$ $\quad (\alpha \neq -1)$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (f(x))^{-1}\cdot f'(x)dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ $\quad (f(x)\neq 1)$
Partielle Integration	$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$ $\quad (v(x)$: einfachste Funktion wählen!)
Allgemeine Substitution 1 (Mitsubstituieren der Grenzen)	$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$ $\quad t=g^{-1}(x),\ x=g(t),\ dx=g'(t)\cdot dt$
Allgemeine Substitution 2 (Unbest. Int. lösen, dann Grz. einsetzen)	$\int_a^b f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt = \Big[F(g(t))\Big]_{\dots}^{\dots} = \Big[F(x)\Big]_a^b$ $\quad t=g^{-1}(x),\ x=g(t),\ dx=g'(t)\cdot dt$
Universal-Substitution/ Weierstrass-Substitution	$\int R(\sin(x)\cos(x))dx$ ...wobei: $t=\tan\frac{x}{2}$ $\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
Differentiation	$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$ $\quad \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = \frac{dF(x)}{dx} - \underbrace{\frac{dF(c)}{dx}}_{const.\to 0} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Zu jeder Integralfunktion müssen so viele Integrationskonstanten ($+c_k$) addiert werden, wie die Funktion zusammenhängende Intervalle im Definitionsbereich hat. Das ist weil eine Integralfunktion nur bis auf die "Offsets" pro Intervall bestimmt ist. Ist z.B. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm a\}$, dann ist $c_k = c_{1,2,3}$.

1.2 Einige unbestimmte Integrale 1083ff

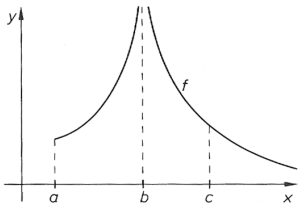
1.3 Uneigentliches Integral 519 ff

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsberech** integriert wird.

- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert, aber **nicht** beschränkt.
- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert mit Ausnahme eines Punktes.
- $f(x)$ hat eine Unendlichkeitsstelle.

Unbeschränkte Funktion

$$I = \int_a^c f(x)dx = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to b+}\int_t^c f(x)dx$$



Unbeschränkte Integration

$$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx;$$

$$I = \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx;$$

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t_1\to-\infty}\lim_{t_2\to\infty}\int_{t_1}^a f(x)dx + \int_a^{t_2} f(x)dx$$

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}+\frac{1}{1} = 1$

1.3.1 Konvergenz- / Divergenzverhalten

$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ **ist konvergent** (für $\alpha > 1$)

$\int_a^\infty f(x)dx$	**konvergent**	$\Rightarrow \not\Leftarrow$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\int_a^\infty f(x)dx$	**divergent**	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$
$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty f(x)dx = 0$		$\Leftrightarrow$	$\int_a^\infty f(x)dx$ **konvergent**

1.3.2 Majorantenprinzip (Konvergenz)

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $\lvert f(x)\rvert \geq 0$ konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq \lvert f(x)\rvert$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. ($x \in [a,\infty)$).

1.3.3 Minorantenprinzip (Divergenz)

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$. $(x \in [a, \infty))$.

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungungsvarianten50ff

Funktion (explizit)	Koord. GL. (implizit)	Parameterform	Polarform
$y = f(x)$	$F(x,y) = 0$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \Psi(t) \end{pmatrix}$	$r = f(\varphi)$

Hat man die explizite Form gegeben, so hat man automatisch die Implizite- und Parameter-Form; Die explizite Form ist ein Spezialfall der impliziten Form (nämlich wenn eine eindeutige Lösung der impliziten Gleichung existiert)

2.2 Implizit Ableiten

1. Gleichung beidseitig differenzieren ($|\,d$, d.h. Differential bilden) *(normale Ableitungsregeln)*
2. Division durch dx beidseitig
3. Auflösen nach $\frac{dy}{dx}$

Beispiel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad |\,d$$
$$d\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = d(1)$$
$$\frac{1}{a^2}\,d(x^2) + \frac{1}{b^2}\,d(y^2) = 0$$
$$\frac{1}{a^2}\,2x dx + \frac{1}{b^2}\,2y dy = 0 \qquad |:dx$$
$$\frac{1}{a^2}\,2x + \frac{1}{b^2}\,2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

2.3 Umrechnen diverser Systeme 197

Parameter	$\Rightarrow$ explizit	$\Longrightarrow t = f(x)$; $y = g(f(x))$
Ex- bzw. implizit	$\Rightarrow$ Polar	$\Longrightarrow x = r\cos(\varphi)$; $y = r\sin(\varphi)$
Polar	$\Rightarrow$ implizit	$\Longrightarrow r\cos(\varphi) = x$; $r\sin(\varphi) = y$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$
Polar	$\Rightarrow$ Parameter	$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Explizit	$\Rightarrow$ Parameter	$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)) \\ t \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	$\Rightarrow$ Polar	$\Longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

Bsp. Expl. $\Rightarrow$ Param.

$y = 1 - 2x$ $\quad \begin{pmatrix} x = t \\ y = 1 - 2t \end{pmatrix}$

Bsp. Expl. $\Rightarrow$ Polar

$y = 1 - 2x$ $\quad r\sin\varphi = 1 - 2r\cos\varphi$, $r = \dfrac{1}{\sin\varphi + 2\cos\varphi}$

2.4 Kurvenarten204ff

	Kreis204	**Ellipse205**	**Kurven 2. Ordnung generell213**
Bemerkung	Mittelpunkt (x_0, y_0) ; Radius r	Mittelpunkt (x_0, y_0) ; Radius r ; $+\epsilon$: Brennpunkt rechts ; $-\epsilon$: Brennpunkt links ; a,b: Halbachsen ; c: lin. Exzentr.	Alle Kurven 2. Ordnung können mit dieser Gleichung beschrieben werden ; ϵ = num. Exzentr. ; p = Halbparameter ; a,b: Halbachsen ; c: lin. Exzentr.
Implizit	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$	$(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$	-
Polarform	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$; $\epsilon = 0$	$r = \frac{p}{1\pm\epsilon\cos(\varphi)}$; $\epsilon = \frac{c}{a} < 1$; $p = \frac{b^2}{a}$	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$
Parameterform	$x = x_0 + R\cos(t)$; $y = y_0 + R\sin(t)$	$x = x_0 + R\cos(t)$; $y = y_0 + R\sin(t)$	-

	Hyperbel207	**Parabel210**
Bemerkung	-	Parabeln mit Scheitelpunkt auf vertikaler Achse
Implizit	$(\frac{x-x_0}{a})^2 - (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$; $-(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$	$y - y_0 = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c$
Polarform	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$; $\epsilon = \frac{c}{a} > 1$; $p = \frac{b^2}{a}$	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$; $\epsilon = 1$; $p = \frac{1}{2\lvert a\rvert}$
Parameterform	$x = a\cosh(t)$; $y = b\sinh(t)$	$x = t$; $y = at^2 + bt + c$

	Kardioide/Herzk. 99	**Lemniskate "∞" 102**	**Strophoide/harm. K. 97**
Polarform	$r = a(1+\cos(\varphi))$	$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$	$r = -a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a > 0)$

2.5 Schnittpunkte und Schnittwinkel von Kurven

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f_1(\varphi_0) = f_2(\varphi_0)$ $\Rightarrow$ Schnittpunkt $S(r_0, \varphi_0)$ berechnen (**Achtung:** mehrere Schnittwinkel und somit mehrere Schnittpunkte möglich)
2. Steigungsfunktion ermitteln (Kurven ableiten): $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$ und $y_2' = \frac{dy_2}{dx_2}$ (siehe "Wichtige Formeln"$\Rightarrow$ Anstiegsformel)
3. Steigungen im Winkel φ_0 ermitteln: $m_1 = y_1'(\varphi_0)$ und $m_2 = y_2'(\varphi_0)$
4. Schnittwinkel: $|tan(\sigma)| = |\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}|$ $\Leftrightarrow$ $\sigma = |\arctan(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2})|$

2.5.1 Normale auf eine Kurve

Für eine Normale zur Tangente gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$

2.5.2 Schnittpunkt mit sich selbst ermitteln

Variante 1: Parameter t finden für die gilt $y = y(t_1) = y(t_2)$; $x = x(t_1) = x(t_2)$

Variante 2: Nach t auflösen und Fallunterscheidungen gleichsetzen

2.6 Gleichungen252, Mittelwerte19ff

Tangentengleichung	**Normalengleichung**	**Linearer Mittelwert**	**Quadratischer Mittelwert**
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$	$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2 dx}$

2.7 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale 251ff

2.8 Abstandsformeln

Hessesche Normalform 200f, 222

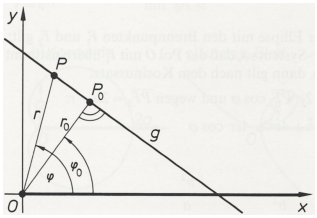
$x \cdot \cos\varphi_0 + y \cdot \sin\varphi_0 = r_0$

Geradengleichung

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Abstand zum Ursprung

$\frac{|y_0 - m \cdot x_0|}{\sqrt{m^2+1}}$



2.9 Scheitel 254

Scheitelpunkte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle.

2.10 Berührung höherer Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.

$f(x_0) = g(x_0);\ f'(x_0) = g'(x_0);\ f''(x_0) = g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$

2.11 Krümmung

Linkskrümmung (konvex)	Wendepunkt	Rechtskrümmung (konkav)
$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$

2.12 Glatte Funktion

Eine Funktion heisst dann *glatt*, wenn sie keine "Ecken" hat. Eine Funktion ist folglich überall *glatt*, wo die Ableitung nicht extrem ist ($y' \neq 0 \wedge y' \neq \pm\infty$).

2.13 Wichtige Formeln S60ff

*: Integrationsgrenzen sind entlang der Rotationsachse!

Geometrischer Begriff	**kartesische Koordinaten** $y = f(x)$	**Parameter-Darstellung** $x = x(t), y = y(t)$
Anstieg in $P_0 \in$ C	$y' = f'(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$; $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$
Bogenlänge zwischen P_1,$P_2 \in$ C	$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$	$\lvert s\rvert = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$
Krümmung in $P_0 \in$ C und Krümmungskreisradius	$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(\sqrt{1 + f'(x_0)^2})^3}$; $r = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert}$	$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3}$; $r = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert}$
Krümmungskreismittelpunkt	$x_c = x - \frac{y' \cdot (1 + (y')^2)}{y''}$ $y_c = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$	$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$ $y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$
Flächeninhalt einer Fläche mit dem Rand C	$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$	$A = \frac{1}{2}\left\lvert \int_{t_1}^{t_2} [x\dot{y} - \dot{x}y]\, dt \right\rvert$
Volumen eines Rotationskörpers mit dem Meridian C *	$V_x = \pi \left\lvert \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2\, dx \right\rvert$	$V_x = \pi \left\lvert \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x}\, dt \right\rvert$
	$V_y = \pi \left\lvert \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2\, dy \right\rvert$	$V_y = \pi \left\lvert \int_{t_1}^{t_2} x^2 \dot{y}\, dt \right\rvert$
Oberlächeninhalt eines Rotationskörpers mit dem Meridian C *	$O_x = 2\pi \int_a^b \lvert f(x)\rvert \sqrt{(1 + f'(x)^2}\, dx$	$O_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \lvert y\rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$
	$O_y = 2\pi \left\lvert \int_{y_1}^{y_2} \lvert f^{-1}(y)\rvert \cdot \sqrt{1 + ((f^{-1}(y))')^2}\, dy \right\rvert$	$O_y = 2\pi \left\lvert \int_{t_1}^{t_2} \lvert x\rvert \cdot \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}\, dt \right\rvert$

Geometrischer Begriff	**Polarkoordinaten** $r \stackrel{!}{=} f(\varphi)$; $\dot{r} \stackrel{!}{=} f'(\varphi)$
Anstieg in $P_0 \in$ C	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r}\sin\varphi_0 + r\cos\varphi_0}{\dot{r}\cos\varphi_0 - r\sin\varphi_0}$; im Pol ($r = 0$): $y' = \tan(\varphi_0)$
Bogenlänge zwischen P_1,$P_2 \in$ C	$\lvert s\rvert = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi$
Krümmung in $P_0 \in$ C und Krümmungskreisradius	$\kappa = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{(\sqrt{r^2 + \dot{r}^2})^3}$; $r = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert}$
Krümmungskreismittelpunkt (kartesisches Resultat)	$x_c = r\cos\varphi - \frac{(r^2 + \dot{r}^2) \cdot (r\cos\varphi + \dot{r}\sin\varphi)}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}$; $y_c = r\sin\varphi - \frac{(r^2 + \dot{r}^2) \cdot (r\sin\varphi + \dot{r}\cos\varphi)}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}$
Flächeninhalt einer Fläche mit dem Rand C	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$
Volumen eines Rotationskörpers mit dem Meridian C *	$V_x = \pi \left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2\varphi [\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi] d\varphi \right\rvert$; $V_y = \pi \left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2\varphi \cdot (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)\, d\varphi \right\rvert$
Oberlächeninhalt eines Rotationskörpers mit dem Meridian C *	$O_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r\sin\varphi\rvert \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi$; $O_y = 2\pi \left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r\cdot\cos\varphi\rvert \cdot \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi \right\rvert$

3 Diverses

3.1 Inhalte Bronstein

- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 454
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 510
- Unbestimmte Integrale 1083

3.2 Ableitung Notation

$$f' = \frac{df}{dx}; \quad f'' = \frac{d^2f}{dx^2}; \quad f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}$$

3.3 Partialbruchzerlegung 15

$f(x) = \dfrac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} \Rightarrow$ Nenner faktorisieren mit Hornerschema965, Binom $\Rightarrow x^3+4x^2-11x-30 = (x+2)(x^2+2x-15) = (x+2)(x+5)(x-3)$

Ansatz: $f(x) = \frac{x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5)+B(x-3)(x+5)+C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$

Gleichungssystem (Zähler gleichsetzen) aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$x_1 = 3: \ -9+60+149 = A\cdot 5\cdot 8 \quad \Rightarrow A = 5$

$x_2 = -2: \ -4-40+149 = B(-5)\cdot 3 \Rightarrow B = -7 \quad \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+2}\frac{1}{x+5}$

$x_3 = -5: \ -25-100+149 = C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1$

Weitere Ansätze für andere Typen von Termen: (Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.):

- einfache Nullstelle x_i: $\frac{a_{i1}}{x-x_i}$
- r_i-fache Nullstelle: $\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$
- keine reelle Nullstelle (x^2+1): $\frac{a_{i1}x+b}{x^2+1}$

$\frac{Z}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$	$\frac{Z}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$
$\frac{Z}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$	$\frac{Z}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)}$

3.4 Hornerschema

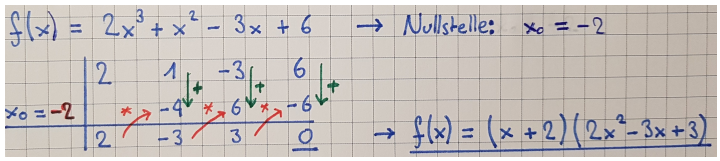
Mit dem Hornerschema lassen sich Funktionswerte berechnen. Beim Spezialfall $f(x_1) = 0$ führt es zu einer Linearfaktorzerlegung.
Ausgangs(polynom)funktion: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \rightarrow f(x_1)$ berechnen (**Potenzen mit Faktor 0 auch schreiben!**):

x_1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	b_1x_1	b_0x_1
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

$$\rightarrow f(x) = \underbrace{(x-x_1)}_{Linearfaktor} \underbrace{(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0)}_{\text{Polynom vom Grad } n-1} + \underbrace{f(x_1)}_{\text{Funktionswert für } x_1}$$

Linearfaktorzerlegung ($f(x_0) = 0$):

1. Nullstelle x_n durch ausprobieren finden
2. Hornerschema ausführen ($f(x_n) = 0$)
3. $f(x) = (x-x_n)$(Linearfaktor Grad n-1 ablesen)
4. Für weitere Zerlegung: Ab Schritt 1 wiederholen



3.5 Bernoulli-de l'Hospital 56

$lim_{x\downarrow x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = lim_{x\downarrow x_0}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, dies gilt für: „$\frac{0}{0}$" 1. Regel, oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

Spezialfälle $0\cdot\pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{\frac{1}{f_2}} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{f_2}{\frac{1}{f_1}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\qquad \infty-\infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1\cdot f_2}}$ $\qquad f^g: \left\{\begin{matrix}1^\infty\\0^0\\\infty^0\end{matrix}\right\} = e^{g\cdot ln(f)} = \left\{\begin{matrix}e^{\infty\cdot 0}\\e^{0\cdot -\infty}\\e^{0\cdot\infty}\end{matrix}\right\}$

3.6 Taylorpolynom

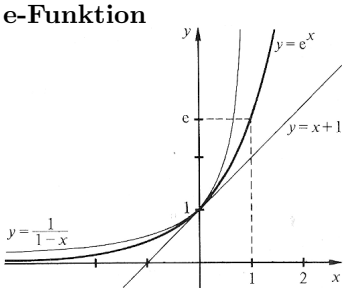
(x_0 = Entwicklungsstelle) $\quad T_nf(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n$

3.7 Kurvenuntersuchung / Kurvendiskussion 261

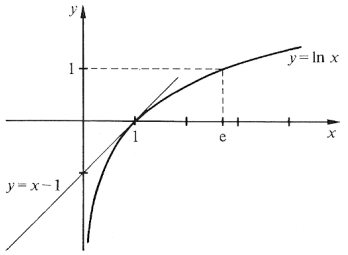
1. Definitionsbereich48 D_f und Abschätzung des Wertebereichs W_f, wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und Periodizität52
3. Nullstellen und Selbstschnittpunkte
4. Tangenten parallel zu Achsen
5. Stetigkeit59 und Differenzierbarkeit443 (Berechnung der Ableitungen)
6. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, Krümmungsverhalten51
7. Grenzwertaussagen (Asymptote, Pole, Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs)

3.8 Funktionsgraphen

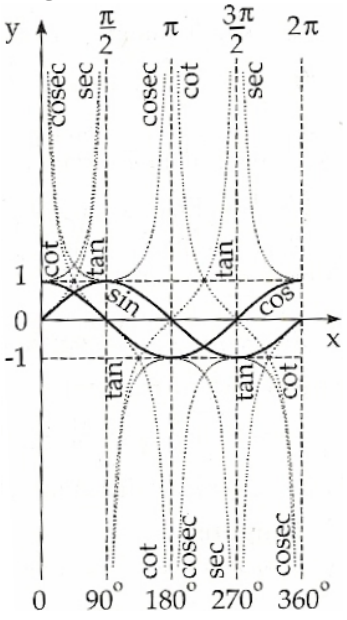
e-Funktion



Logarithmus-Funktion



Trigonometrische Funktionen



Hyperbel Funktionen

