

1 Ableitung

1.1 Differenzialquotient S. 444

Differenzquotient:	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
Tangente:	$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$
Normale:	$y = -\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$
Winkel:	$\tan(\delta) = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

1.1.1 Ableitungsregeln

Euler:	$(e^x)'$	=	e^x
	$(e^{\alpha x})'$	=	$\alpha \cdot e^{\alpha x}$
	$(e^{f(x)})'$	=	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
	$(a^x)'$	=	$\ln(a) \cdot a^x$
1:	$(1)'$	=	0
x:	$(x)'$	=	1
Potenzen:	$(x^n)'$	=	$n x^{n-1}$
	$(f(x)^n)'$	=	$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Potenzen -:	$(x^{-1})'$	=	$-1 x^{-2}$
Br�che:	$(\frac{1}{x^n})'$	=	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
Produkte:	$(f(x) \cdot g(x))'$	=	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Wurzeln:	$(x^{1/n})'$	=	$\frac{1}{n \cdot x^{1/n}}$
Wurzel Bruch:	$x^{-1/2}$	=	$-\frac{1}{2} x^{-3/2}$
Quotient:	$(u \cdot \frac{1}{v})'$	=	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Trigo:	$\sin(x)'$	=	$\cos(x)$
	$\sin(f(x))'$	=	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$
	$\sin^2(x)'$	=	$\sin(x) \cdot \sin(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
	$\arcsin(f(x))'$	=	$\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
	$\cos(x)'$	=	$-\sin(x)$
	$\cos(f(x))'$	=	$-\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
	$(\arccos(f(x)))'$	=	$-\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
	$\tan(x)'$	=	$(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\arctan(f(x))'$	=	$\frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$
	$\cotan(x)'$	=	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Hyperbol:	$\cosh'(x)$	=	$\sinh(x)$
	$\sinh'(x)$	=	$\cosh(x)$
Allg. Potenz:	$(f(x)^\alpha)'$	=	$\alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
Allg. Expo:	$(e^{f(x)})'$	=	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Logarithmus:	$(\ln f(x))'$	=	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
	$(\log_\alpha(x))'$	=	$\frac{1}{\ln(\alpha)} \cdot (\ln(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(b)})'$
Betrag:	$ f(x) '$	=	$\frac{f(x)}{ f(x) } \cdot f'(x)$
Betrag Trigo:	$ f(x) '$	=	$\frac{f(x)}{ f(x) }$

1.2 Berechnungsbeispiel Produkt

$$g(x)' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(x_0+h)^2 - \frac{1}{2}g(x_0)^2}{h} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{g(x_0+h)^2 - g(x_0)^2}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{2h} =$$

$$\frac{2x_0+h}{2} \quad h \rightarrow 0 \quad x_0$$

1.3 Ableitungsregeln

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^a, a \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{x^a}, a \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{a}{x^{a+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$a \cdot x^{a-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$A^1)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$	$A^1)$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{\cosh^2 x}{1-\tanh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$B^2)$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{1+\cot^2 x}$	$B^2)$	$\coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{1-\cosh^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$\log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

1.4 einseitige Ableitung S. 445

rechts- sowie linksseitige Ableitung

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0) \rightarrow$ Konvergenz

Alle anderen Fälle $\rightarrow$ unbestimmte Divergenz

Zusammenfassung:
Es sei $x_0 = 0$.

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto x $ $f'_r(0) = 1$ $f'_l(0) = -1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_r(0) = \infty$ $f'_l(0) = \infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0 .	$f: x \mapsto \sqrt{ x }$ $f'_r(0) = -\infty$ $f'_l(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_r(0)$ und $f'_l(0)$ existieren nicht	

1.5 Tangentialsteigung S. 459

x_0 =Arbeitsstelle

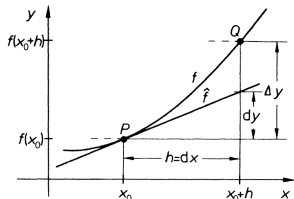
$h = x - x_0 = \Delta x = dx$

$f(x_0 + h) \approx \hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normale

Gerade durch P senkrecht zur Kurve.

$f(x_0)(x - x_0)$



1.6 Taylor

1.6.1 Potenz 2er Ordnung

$$f(x_0 + h) \approx \hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2$$

1.6.2 Potenz 3er Ordnung

$$f(x_0 + h) \approx \hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3$$

1.6.3 n-te

$$f(x_0 + h) \approx \hat{f}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot h^i \quad \quad \quad h = x - x_0$$

1.7 Lagrange & Cauchy Formel

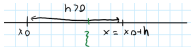
Abschätzung des Errors/ Fehlers

$\rightarrow$ Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar". $error : f(x = x_0 + h) \rightarrow P_n(x_0; h)$

Lagrange $R_n = (f^{(n+1)}(\xi)) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow (\xi \text{ unbekannt})$

Cauchy $R_n = (f^{(n+1)}(\xi)) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n)!} \cdot (1 - \theta)^n \rightarrow (\xi \text{ unbekannt})$
 $0 < \theta \leq \xi = x_0 + \theta \cdot h$
 θ steuert Lage von ξ auf Intervall

Wertebereich $\xi \in [x_0; x_0 + h]$



Worst-Case Analyse:

$\rightarrow$ gr sst möglichster Fehler

Da ξ nicht bestimmen werden kann, wird für ξ den Worst- Case (höchster Wert) angenommen um das Verhalten von R_n zu prüfen.

Prüfen: $\begin{cases} h \text{ fix} & n \rightarrow \infty \\ n \text{ fix} & h \rightarrow 0 \end{cases}$

Beispiel:

$$x_0 = 1; f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x; g'(x) = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2; n = 1$$

$$R_n = f''(\xi) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot h^2}{2}$$

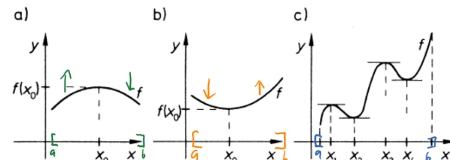
Bedienungen für gutes R_n -Verhalten:

$$|f^{n+1}(\xi)| \leq K^{n+1} \quad (K = \text{Basis})$$

$$1. \quad R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2. \quad R_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

1.8 Extremalstelle



relatives Maximum: bei absl. Wert

relatives Minimum: bei min. Wert

Terrasse: ohne absl. max. $\vee$ min.

Lokales Maximum

Lokales Minimum

Stetigkeit: Grenzwerte ergeben Max. resp. Min.

Punkt b bei b)

Punkt a bei a)

 n Ort zum s nnel 

c) x_1, x_3

c) x_2, x_4

1.9 Beschränktheit S. 51, 470/ Monotonie

Beschränktheit

$W_F \subset [a; b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Monotonie

$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	$\uparrow$
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\uparrow\uparrow$
$d \leq 0$	$0 < q \leq$	monoton fallend	$\downarrow$
$d < 0$	$0 < q <$	streng monoton fallend	$\downarrow\downarrow$

Konvergent:

Grenzwert vorhanden

Divergent:

Kein Grenzwert

1.10 Satz von Fermat S. 453

Wenn x_0 ein relatives Minimum / Maximum ist muss zwingend die Ableitung $f'(x_0) = 0$ sein → **Umkehrung gilt nicht!**
 x_0 = kritische Stelle → zu prüfen auf Berg, Tal oder Terrasse

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
0	< 0		"Berg" (Achtung auf Randstellen)
0	> 0		"Tal" (Achtung auf Randstellen)
0	0	< 0	wenn n gerade: "Berg"
0	0	> 0	wenn n gerade: "Tal"
0	0	≠ 0	wenn n ungerade ; Terrasse

y-Koordinate des Punktes: x_0 in f(x) einsetzen

1.11 Wendepunkt

Wendepunkt = Krümmungswechsel = Vorzeichenwechsel für $f''(x)$ bei x_0

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
	0	< 0	n ungerade: links-rechts Wendestelle
	0	> 0	n ungerade: rechts-links Wendestelle
	0	≠ 0	n gerade: Flachpunkt

Ausserdem liegt eine WP vor wenn f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, also $f''(x_0) < 0$ für $x < x_0$ und für $f''(x_0) > 0$ für $x > x_0$ bzw. umgekehrt.

y-Koordinate des Punktes: x_0 in f(x) einsetzen

1.12 Krümmungsverhalten

Das Beschriebene Verhalten gilt global für die ganze Funktion $f(x)$ bzw. auf einem ganzen Intervall, nicht nur an einer Stelle x_0 !

1.12.1 Linkskrümung (konvex)

- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall **grösser** als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \uparrow$ Tangentialsteigung **steigt** kontinuierlich
- $f'' \geq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

1.12.2 Rechtskrümmung (konkav)

- $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall **kleiner** als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \uparrow$ Tangentialsteigung **sinkt** kontinuierlich
- $f'' \leq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

1.13 Lineare Approximation

Eine Tangente wird an x_0 angelegt. In der Regel kann somit die Funktion vereinfacht dargestellt werden. (weniger Rechenleistung)

1.13.1 Berechnung Error

error = 0 bei Punkt P (Arbeitsstelle x_0)

Absolut: $\Delta x \rightarrow \Delta y$ $\Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$

Relativ: $\Delta x \rightarrow \frac{\Delta y}{y_0}$ $\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot dx}{y_0}$

	$\Delta x = dx$ (abs)	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ (rel)
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

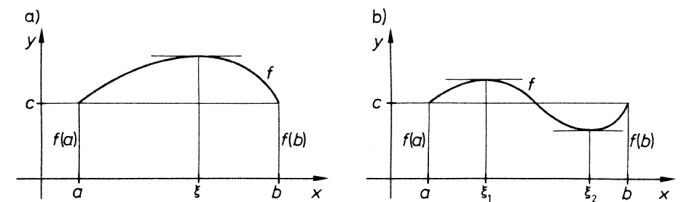
→ Tabelle ist bidirektional (Umkehrfunktionen)

1.14 Satz von Rolle S. 454

f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f'(\xi) = 0$.

Bemerkung:

Geometrisch besagt der Satz von Rolle (vgl. Bild 8.13a und b)), daß der Graph einer auf $[a, b]$ stetigen und auf (a, b) differenzierbaren Funktion f unter der Voraussetzung $f(a) = f(b)$ mindestens einen Punkt $P(\xi, f(\xi))$ mit einer waagrechten Tangente besitzt. In Bild 8.13 b) sind es zwei Stellen ξ_1 und ξ_2 mit $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.



Mittelwertansatz:

$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Durchschnittliche Steigung)

1.15 Satz von Bernouli - Hopital S 57-58

1. Regel: Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{0}{0}$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$
2. Regel: Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$

Ergibt das Resultat wiederum $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ den Schritt wiederholen

Umformungen

$f \cdot g$ von der Form $(0+) \cdot \infty$ $\frac{g}{(1/f)} = \frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\frac{f}{(1/g)} = \frac{0}{0}$

$f - g$ von der Form $\infty - \infty$ $\frac{(1/g)-(1/f)}{1/(fg)} = \frac{0}{0}$

f^g von der Form $(0+)^0, \infty^0, 1^\infty$ $f^g = e^{g \ln f}$ für $g \cdot \ln(f) = (0+) \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$

Durch Ausklammern von Vorzeichen und Reziprokbildung bei negativen Exponenten sind andere Vorzeichenvarianten vollständig abgedeckt:
 $(0-) \cdot \infty = -(0+) \cdot \infty$ oder $(0+)^{0-} = \frac{1}{(0+)^{0+}}$ oder $1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty}$

1.16 Optimierungsprobleme

- Problem durch eine Funktion f mit ultimativer Variablen x ausdrücken → $f(x)$
- Fermat anwenden: $f'(x) = 0$
- gefundene kritische Stellen auf Maximum / Miniumum prüfen
- Logik Randanalyse: x links und rechts über Rand des Intervalls hinaus gehen lassen (z.B. nach $\pm\infty$) und Berg / Tal durch Logik entscheiden
- Monotoniewechsel bei x_0 ausnützen:
Wert $> x =$ und $< x_0$ einsetzen
- gem. Taylor-Theorie

1.17 Asymptote bestimmen

Asymptotengerade: $y = mx + q$ m und q sind gesucht

Steigung: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

Achsenabschnitt: $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$
→ berechnetes m einsetzen!

2 Integrieren S. 493

Beim Integrieren ist die Fläche unter einer Kurve gesucht. ("aufleiten")
→ **Ableitung umgekehrt lesen (einfache Fälle)**

2.1 Riemann Integral S. 507

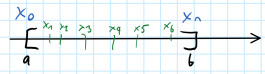
Die Fläche unter einer Funktion $f(x)$ wird in Intervalle zerlegt.

- $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; \mathbb{W}$ beschränkt

Zerlegung (Sampling)

(Einteilung in vers. Abschnitte)

Maschenweite: $\Delta x_{i+1} - x_1 > 0$



$I = \bar{I} = I$

Notation: $\int_a^b f(x) dx$ a,b Integrationsgrenzen

äquidistante Zerlegung

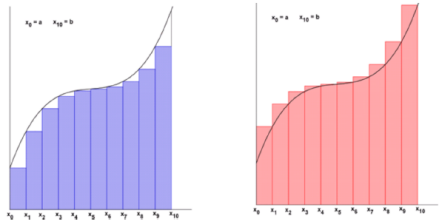
$t_i = i/n \cdot b$

Untersumme

$\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot \Delta x_i$
 $\underline{f_i} = m_i = \inf\{f(x)\} | x_1 \leq x \leq x_{i+1}$

Obersumme

$\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot \Delta x_i$
 $\bar{f_i} = M_i = \sup\{f(x)\} | x_1 \leq x \leq x_{i+1}$



Unter-Integral

$\underline{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \underline{US} \quad \infty \cdot 0$

$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx$

Ober-Integral

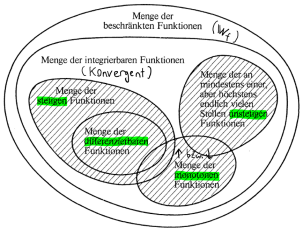
$\bar{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \overline{OS} \quad \infty \cdot 0$

$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx$

2.1.1 Riemann Summe S. 506- 507

$RS = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi) \Delta x_i$
 $\xi \in [x_i; x_{i+1}]$

2.2 Wertebereich



2.3 Regeln S. 494-496

$$\int_a^{b(x)} f(x) = b'(x) \cdot f(b(x)) - a'(x) \cdot f(a(x))$$

$$\int_0^a x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_a^b 1 \cdot dx = (b-a)$$

$$\int_a^b x \cdot dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2 \cdot dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^a f(x) = 0$$

$$\int 1/x = \ln(|x|) + c$$

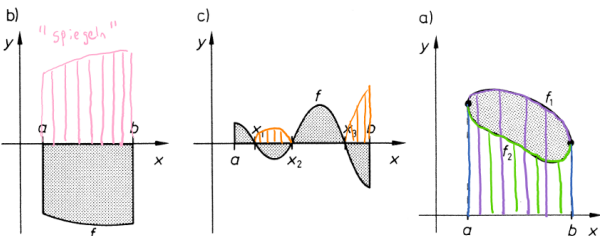
2.3.1 Hauptsatz der Integration S.507

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = {}_a^b[F(x)] \quad F(x) = \text{Stammfunktion}$$

2.3.2 Spezialregeln S. 508-510

Linearität $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
Zerlegung $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
 $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$
Grenzen tauschen $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
 $\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Gleiche Grenzen $\int_a^a f(x)dx = 0$
Trigo $\int_0^{2\pi} A \sin(x)dx = \frac{A}{2\pi} (\int_0^\pi \sin(x)dx + \int_\pi^{2\pi} -\sin(x)dx) = \frac{A}{2\pi} (0^\pi [-\cos(x)] + \frac{2\pi}{\pi} [\cos(x)])$

2.4 Fläche S. 494-496



a) $\int_a^b |f(x)|$
b) $\int_a^b f(x) = \int_a^{x_1} |f(x)| + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)|$
c) $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|$

Beispiel:

$f_1 = x^2; f_2 = x$; Schnittpunkte bei (0;0, 1;1)

$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| = \int_a^b |x^2 - x| = \int_0^1 [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}] = [\frac{1^3-0^3}{3} - \frac{1^2-0^2}{2}] = | -\frac{1}{6} |$

2.5 Stammfunktion

Eine Funktion F(x) heisst Stammfunktion von f(x) wenn gilt:

f(x) ist stetig
 $F'(x) = f(x) \quad F(x) + c = \int f(x)$

Bsp: $F(x) + C = \int x^2 = x^3/3 + C$

C ∈ ℝ C ist eine freie Verschiebungszahl

Stammfunktionen F sind Teilmenge der unbestimmten Integrale
⇒ Ableitungstabelle rückwärts lesen für Stammfunktion!

2.6 Integralfunktion I(x); Anker

Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und integrierbar

I(x) besitzt eine feste untere Grenze c = const (Anker) und eine variable obere Grenze x (Hauptvariable) x ∈ [a; b] c ∈ [a; b]

Notation: $I(\tilde{x}) = \int_c^x f(\tilde{x})d\tilde{x}$ $\tilde{x}$ ist die Integrationsvariable

Eigenschaften der Integralfunktion

Die Integralfunktion hat beim Anker c eine Nullstelle:

$I(c) = \int_c^c f(\tilde{x})d\tilde{x} = 0$

I(x) berührt/schneidet die x-Achse in [a; b] beim Anker I(c) = 0

Das Verschieben des Ankers bewirkt eine Parallelverschiebung von I(x)

I(x) ist immer stetig! (Integration behebt Sprungstellen)

I(x) ist ableitbar, wenn die Originalfunktion f(x) stetig ist

Ableitung $I'(x) = \frac{d}{dx} (\int_c^x f(\tilde{x})d\tilde{x}) = f(x)$

Spezialfall: $\int 1/x = \ln(|x|) + c$

Beispiel Integralfunktion bestimmen

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - 2x & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Anker bei c = 2 weil: I(2) = 0

$$I(x) = \begin{cases} \int_2^x 2\tilde{x} \cdot d\tilde{x} & 0 \leq x \leq 2 \\ \int_2^x (8 - 2\tilde{x}) \cdot d\tilde{x} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(\frac{x^2-2^2}{2}) & = x^2 - 4 \\ 8\int_2^x 1d\tilde{x} - (2\int_2^x \tilde{x} \cdot \tilde{x}) = 8(x-2) - (x^2 - 4) & = x^2 + 8x - 12 \end{cases}$$

Wichtig: Bei Funktionen mit Sprungstellen immer beim Anker beginnen, wenn nichts spezielles verlangt ist

2.7 unbestimmtes Integral

$I(x) + C = \int f(\tilde{x})d\tilde{x} \quad c \in \mathbb{R}$

Wenn f(x) stetig ist, dann entspricht das unbestimmte Integral der Stammfunktion

2.8 Beispiel Beschränktheit:

Man berechne das bestimmte Integral von:

$$f(x) = \begin{cases} 3|x-1| & \text{für } x \in [0; 2) \\ 2 & \text{für } x = 2 \\ (x-3)^2 & \text{für } x \in (2, 4] \end{cases}$$

$$\int_0^4 f(x)dx = \begin{cases} 3\int_0^1 (1-x)dx + 3\int_1^2 (x-1)dx = * & = 3 \\ \int_2^2 2dx & = 0 \\ \int_2^4 (x-3)^2 dx = * & = 2/3 \end{cases}$$

$$\int_0^4 f(x)dx = 3 + 0 + 2/3 = 11/3$$

* = $3(\frac{1}{2}[x - \frac{x^2}{2}] + \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x]) = 3((1 - \frac{1}{2}) + (\frac{2^2-1^2}{2} - 1)) = 3$

* = $\int_2^4 (x^2 - 6x + 9)dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x] = \frac{4^3-2^3}{3} - \frac{6(4^2-2^2)}{2} + 9 \cdot 2 = \frac{2}{3}$

2.9 Wachstumsvergleiche

(1) $\frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$
(2) $\frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (q > 1) \quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$
(3) $\frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$
(4) $\frac{\ln(n)}{n} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{linear}} \rightarrow 0$

2.10 Mittelwertsatz S. 510

Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und $\mathbb{W}_f$ beschränkt und stetig.

Die Fläche unter der der Funktion f(x) kann an mind. einem Punkt ξ als Rechteck dargestellt werden.

$\xi \in (a; b)$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Fläche = Mittelwert · Intervall- Länge

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$

$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(\xi)$

$(b-a) \cdot h = (b-a) \cdot f(\xi)$

Beispiel 1:

$f(x) = 4x - 3x^2; x \in [0; 2]$

$MW = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$

$\frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x)dx =$

$\frac{1}{2} \int_0^2 (4x - 3x^2)dx =$

$\frac{1}{2} (4 \int_0^2 x + 3 \int_0^2 x^2) =$

$= \frac{1}{2} (4(\frac{2^2-0^2}{2}) - 3(\frac{2^3-0^3}{3})) = 0$

$0 = 4\xi - 3\xi^2 \rightarrow \xi = 4/3$

Beispiel 2:

$(b > a > 0)$

$\ln(b) - \ln(a) \leq 1/a(b-a)$

$f(x) = \ln(x) \quad (b > \xi > a)$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \leq \frac{1}{a}$

$f'(x) = 1/x$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{a}$

$\frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{a} \rightarrow \text{True da } a < \xi$

3 Rechnen mit Unendlichkeiten

Für unbestimmte Formen gibt es keine allgemeinen Regeln; das Grenzwverhalten ist abhängig von den beteiligten Funktionen und mittels speziellen Methoden (z.B. B.H.) zu überprüfen bzw. zu berechnen.

für $g \in \mathbb{R}$	für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$	unbestimmt
$\infty + \infty = \infty$	$\frac{1}{0+} = \infty$	$\frac{0}{0} = ?$
$\frac{1}{\infty} = 0$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{\infty} = ?$
$g + \infty = \infty$	$-\infty \cdot \infty = -\infty$	$0 \cdot \infty = ?$
$\frac{g}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0-} = -\infty$	$1^\infty = ?$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$\infty - \infty = ?$
$\frac{\infty}{0+} = \infty$	$\frac{g}{0+} = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$0^0 = ?$
$g - \infty = -\infty$	$g \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$
$\frac{\infty}{0-} = -\infty$	$\frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty, & g > 0 \\ +\infty, & g < 0 \end{cases}$	