



Analysis 1b

HS 2021 – Prof. Dr. Bernhard Zraggen

Autoren: Simone Stitz

<https://gitlab.com/ssitz/analysis-1b>

V2.0.20250201

1 Differentialrechnung (S. 444 ff.)

Kurvenuntersuchungen S. 261 | Taylorreihe S. 455

1.1 Begriff der Ableitung / Differenzialquotient (S. 444)

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0

Differenzenquotient: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Differenzialquotient: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x = h)$

1.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

Tangente: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow$ Winkel gegen Uhr.

$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow$ Winkel im Uhrzeigersinn

1.3 Einseitige Ableitungen (S. 445)

Rechtsseitig: $f'_r(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ Linksseitig: $f'_l(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0) \Rightarrow$ Konvergenz

Alle anderen Fälle $\Rightarrow$ unbestimmte Divergenz $\Rightarrow$ keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto x $ $f'_l(0) = -1$ $f'_r(0) = 1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_l(0) = \infty$ $f'_r(0) = \infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0 .	$f: x \mapsto \sqrt{ x }$ $f'_l(0) = -\infty$ $f'_r(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_l(0)$ und $f'_r(0)$ existieren nicht	

1.4 Generische Muster

Allg. Potenz $(f(x)^\alpha)' = f'(x) \cdot \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1}$

Allg. log-Regel $\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Allg. exp-Regel $(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

1.5 Ableitungsregeln (S. 445-448)

1.5.1 Elementare Regeln

Potenzen: $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^\alpha$ $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Linearität: $f(x) = c \cdot x^2$ $f'(x) = c \cdot 2x$

Summe: $(u(x) + v(x) - w(x))'$ $u'(x) + v'(x) - w'(x)$

Konstanten: $c = \text{konst}$ $c' = 0$

1.5.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

1.5.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \Rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

1.5.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

1.5.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

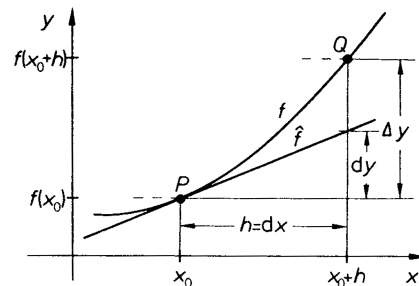
1.6 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

1.7 Lineare Approximation / Differenzial dy (S. 459)

Differenzial = $dy = df$ = 'Höhenunterschied der Tangente' = 'Linearzuwachs'

Differenzial: $dy = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$



$\Delta y \approx dy \Rightarrow$ Approximation / Fehler

Fehler: $\Delta y - dy \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$

Die Tangente ist die beste lineare Approximation!

1.8 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B. x_0)

Absoluter Fehler: $\Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x)$ Einheit von y

Relativer Fehler: $\frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x) - \hat{f}(x)}{f(x_0)}$ einheitenlos

1.9 Fehlerfortpflanzung (S. 866)

Absolut: $\Delta x \rightarrow \Delta y$ $\Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$

Relativ: $\Delta x \rightarrow \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot dx}{f(x_0)}$

	$\Delta x = dx$ (abs)	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

$\Rightarrow$ Tabelle ist bidirektional
 $\Rightarrow$ (Umkehrfunktionen)

1.10 Wichtige Ableitungen (S. 446)

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	A^1	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$	A^1	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	B^2	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	B^2	$\coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{1}{1-\coth^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$\log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2 Taylor-Theorie

2.1 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

n Ordnung der Approximationsfunktion $p_n(x)$
 $h = x - x_0$ Abstand zum Entwicklungspunkt

$$p_n(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{1. \text{ Ordnung}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2}_{2. \text{ Ordnung}} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n}_{n. \text{ Ordnung}}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \Big|_{h=x-x_0}$$

Der Approximationsfehler $R_n(x_0, h)$ entspricht $f(x) - p_n(x)$ und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

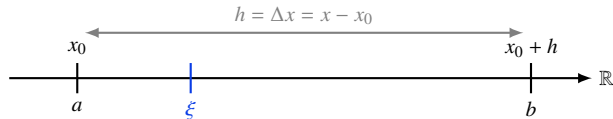
2.2 Fehler R_n der Taylor-Reihe

Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbare"
=> Worst Case!

Voraussetzung: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n + 1)$ mal ableitbar

Lagrange: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \right|$

Cauchy: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1 - \theta)^n \right|$
 $0 < \theta < 1 \quad \xi = x_0 + \theta \cdot h$
 θ steuert Lage von ξ auf Intervall



2.2.1 Verhalten von R_n

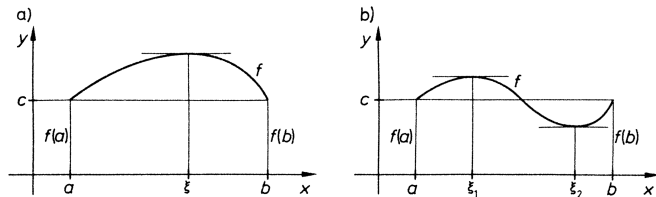
- 1) $n \rightarrow \infty$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ $|h|$ fix
- 2) $n \rightarrow 0^+$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ n fix
 $|f^{n+1}(\tilde{x})| < K^{n+1}$ ($K < 0, n \in \mathbb{N}_0, \tilde{x} \in (a; b)$)

3 Kurvendiskussionen

3.1 Satz von Rolle (S. 454)

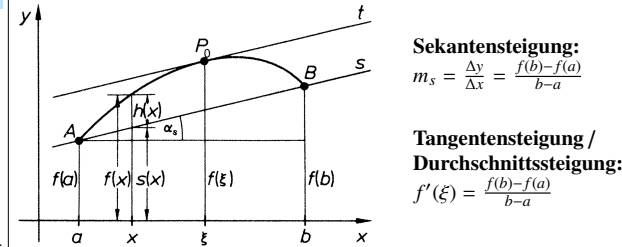
Voraussetzungen: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n + 1)$ mal ableitbar
 $f(a) = f(b)$

Auf dem Intervall $(a; b)$ existiert **mindestens einmal** eine horizontale Tangente:
 $f'(\xi) = 0$



3.2 Mittelwertsatz (S. 454)

Voraussetzung: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n + 1)$ mal ableitbar



Sekantensteigung:
 $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Tangentensteigung / Durchschnittssteigung:
 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3.3 Extremalstellen (S. 455-457)

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig => W_f = abgeschlossenes Intervall

3.3.1 Absolut Extremalstelle (Randanalyse durchführen)

Absolutes Maximum: $\max(W_f)$ => Extremalstellen sind am Rand der Funktion!
Absolutes Minimum: $\min(W_f)$

3.3.2 Relative Extremalstelle

Lokales Maximum: 'Berg' (nicht am Rand der Funktion)
 $f(x) \leq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
Wechsel von $\uparrow$ zu $\downarrow$

Lokales Minimum: "Tal" (nicht am Rand der Funktion)
 $f(x) \geq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
Wechsel von $\downarrow$ zu $\uparrow$

Terrasse: $f'(x_0) = 0$ aber kein 'Berg' / 'Tal'

3.3.3 Prinzip von Fermat (S. 453)

Wenn x_0 ein relatives Minimum / Maximum ist muss zwingend die Ableitung $f'(x_0) = 0$ sein

=> **Umkehrung gilt nicht!**

x_0 = kritische Stelle => Zu prüfen auf Berg, Tal oder Terrasse

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
0	< 0		'Berg' (Achtung auf Randstellen)
0	> 0		'Tal' (Achtung auf Randstellen)
0	0	< 0	wenn n gerade: "Berg"
0	0	> 0	wenn n gerade: "Tal"
0	0	$\neq 0$	wenn n ungerade: Terrasse

y-Koordinate des Punktes: x_0 in $f(x)$ einsetzen

3.4 Monotonie (S. 453)

$f'(x_0)$	
≥ 0	monoton wachsend
≤ 0	monoton fallend
> 0	streng monoton wachsend
< 0	streng monoton fallend

3.5 Wendepunkte (Terrassenpunkte)

Wendepunkt = Krümmungswechsel = Vorzeichenwechsel für $f''(x)$ bei x_0

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
	0	< 0	n ungerade: links-rechts Wendestelle
	0	> 0	n ungerade: rechts-links Wendestelle
	0	$\neq 0$	n gerade: Flachpunkt

Ausserdem liegt eine WP vor, wenn f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, also $f''(x_0) < 0$ für $x < x_0$ und für $f''(x_0) > 0$ für $x > x_0$ bzw. umgekehrt.
y-Koordinate des Punktes: x_0 in $f(x)$ einsetzen

3.6 Krümmungsverhalten

Das beschriebene Verhalten gilt **global** für die ganze Funktion $f(x)$ bzw. auf einem ganzen Intervall, nicht nur an einer Stelle x_0 !

3.6.1 Linkskrümmung (konvex)

- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall grösser als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \uparrow$ Tangentialsteigung steigt kontinuierlich
- $f'' \geq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

3.6.2 Rechtskrümmung (konkav)

- $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall kleiner als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \downarrow$ Tangentialsteigung sinkt kontinuierlich
- $f'' \leq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

3.7 Bernoulli-Hôpital (S. 57-58)

3.7.1 B.H. I

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{0}{0}$$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

3.7.2 B.H. II

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Bernoulli-Hôpital darf auch mehrfach nacheinander verwendet werden => immer erst algebraisch vereinfachen!

3.8 Unbestimmte Formen zu Bernoulli-Formen

f · g vom Typ (0+) · ∞ f/g vom Typ 0/0
1/f/g vom Typ ∞/∞

f - g vom Typ ∞ - ∞ 1/g-1/f vom Typ 0/0

f^g als (0+)^0; ∞^0; 1^∞ f^g = e^{g · ln(f)} wobei g · ln(f) von Typ (0+) · ∞ bzw. ∞ · 0

Vorzeichen klammern: (0-) · ∞ = -(0+) · ∞
(0+)^{0-} = 1/(0+)^{0+} oder 1^{-∞} = 1/∞

3.9 Optimierungsprobleme

- 1. Problem durch eine Funktion f mit ultimativer Variablen x ausdrücken ⇒ f(x)
- 2. Fermat anwenden: f'(x) = 0
- 3. Gefundene kritische Stellen auf Maximum / Minimum prüfen
- 3.1 Logik / Randalysse: x links und rechts über Rand des Intervalls hinaus gehen lassen (z.B. nach ±∞) und Berg / Tal durch Logik entscheiden
- 3.2 Monotoniewechsel bei x_0 ausnützen: Wert > x_0 und < x_0 einsetzen
- 3.3 Taylor-Theorie: Vorzeichen der zweiten Ableitung gemäss Abschnitt 3.3.3

3.10 Asymptote bestimmen

Asymptotengerade: y = mx + q m und q sind gesucht

Steigung: m = lim_{x→∞} f(x)/x

Achsenabschnitt: q = lim_{x→∞} (f(x) - mx) ⇒ berechnetes m einsetzen!

4 Integralrechnung (S. 493)

4.1 Obersumme / Untersumme

Die Fläche unter einer Funktion f(x) wird in Intervalle zerlegt.
Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und W_f beschränkt

Zerlegung Z = {x_0; x_1; ...; x_n} = {x_i | i = 0; ...; n} (n ∈ ℕ; n ≥ 2)

Breite(n) der Intervalle Δx_i = x_{i+1} - x_i Δx kann variieren!

Maschenweite max(Δx_i) = d(Z)

Äquidistante Zerlegung Z = {a + (b-a)/n · i | i = 0; ...; n}

Untersumme US Obersumme OS

US = ∑_{i=0}^{n-1} m_i · Δx_i OS = ∑_{i=0}^{n-1} M_i · Δx_i

m_i = inf{f(x) | x_i ≤ x ≤ x_{i+1}} M_i = sup{f(x) | x_i ≤ x ≤ x_{i+1}}



Unter-Integral Ober-Integral

I = lim_{d(Z)→0} US ∞ · 0 I-bar = lim_{d(Z)→0} OS ∞ · 0

I = ∫_a^b f(x) dx I-bar = ∫_a^b f(x) dx

4.2 Riemann-Summe (S. 506-507)

RS = ∑_{i=0}^{n-1} f(ξ) Δx_i d(Z) → 0 ∫_a^b f(x) dx ξ ∈ [x_i; x_{i+1}]

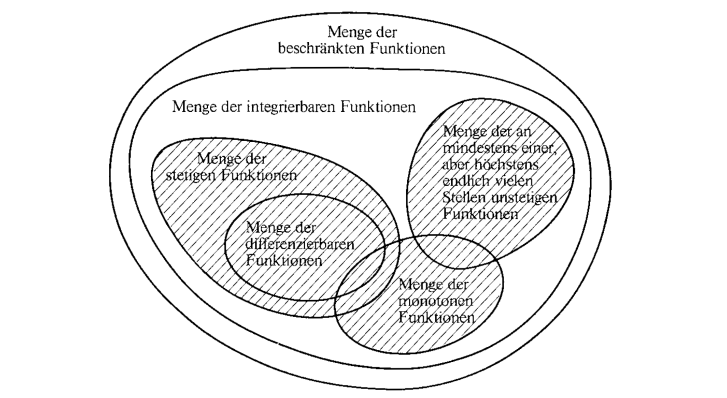
4.3 Riemann-Integral (S. 507)

Es entsteht ein Riemann-Integral, wenn gilt: I = I-bar = I wenn I = I-bar

Notation: ∫_a^b f(x) dx a, b Integrationsgrenzen
f(x) Integrand

4.4 Integrierbare Funktionen

Hinreichendes Kriterium: f : [a; b] → ℝ und W_f beschränkt



4.5 Integrationsregeln (S. 494-496)

Linearität: ∫_a^b α f(x) dx = α ∫_a^b f(x) dx

4.5.1 Rechenregeln mit Integralen (S. 508-510)

Zerlegung Summe: ∫_a^b f_1(x) + f_2(x) dx = ∫_a^b f_1(x) dx + ∫_a^b f_2(x) dx

Zerlegung Grenzen: ∫_a^c f(x) dx = ∫_a^b f(x) dx + ∫_b^c f(x) dx

Grenzen tauschen: ∫_a^b f(x) dx = - ∫_b^a f(x) dx

Gleiche Grenzen: ∫_a^a f(x) dx = 0

4.6 Wichtige Integrale S. 495 (S. 495)

∫_a^b x^2 dx = b^3/3 - a^3/3 ∫_a^b x dx = b^2/2 - a^2/2 ∫_a^b 1 dx = b - a (Rechteck)

4.7 Flächen unter Integralen

Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und W_f beschränkt

Fläche: A = ∫_a^b |f(x)| dx

Der Inhalt des Betrags muss auf Vorzeichen untersucht werden!
Negative Vorzeichen müssen über die x-Achse geklappt werden:
|x^2 - x| = -(x^2 - x) falls x > x^2

4.8 Mittelwert einer Funktion (S. 510)

Funktion aufgeteilt in n äquidistante Intervalle ⇒ Δx = (b-a)/n

Mittelwert: 1/(b-a) ∫_a^b f(x) dx

4.9 Mittelwertsatz (S. 510)

Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und W_f beschränkt und stetig
Die Fläche unter der Funktion f(x) kann an mind. einem Punkt ξ als Rechteck dargestellt werden.

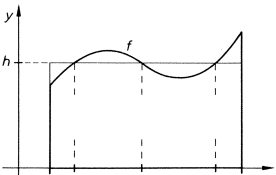
Es muss gelten: ξ ∈ (a; b)

Fläche = Mittelwert · Intervall-Länge

1/(b-a) ∫_a^b f(x) dx = f(ξ)

∫_a^b f(x) dx = (b-a) · f(ξ)

(b-a) · h = (b-a) · f(ξ)



4.10 Integralfunktion I(x)

Voraussetzung: f : [a; b] → ℝ und integrierbar
I(x) besitzt eine feste untere Grenze c = const (Anker) und eine variable obere Grenze x (Hauptvariable) x ∈ [a; b] c ∈ [a; b]

Notation: I(x) = ∫_c^x f(x̄) dx̄ x̄ ist die Integrationsvariable

4.10.1 Eigenschaften der Integralfunktion

- Die Integralfunktion hat beim Anker c eine Nullstelle: I(c) = ∫_c^c f(x̄) dx̄ = 0
- I(x) berührt / schneidet die x-Achse in [a; b] beim Anker ⇒ I(c) = 0
- Das Verschieben des Ankers bewirkt eine Parallelverschiebung von I(x)
- I(x) ist immer stetig! (Integration behebt Sprungstellen)
- I(x) ist ableitbar, wenn die Originalfunktion f(x) stetig ist
- Ableitung I'(x) = d/dx (∫_c^x f(x̄) dx̄) = f(x) "Kreislauf"

Integral I(x) differenzieren f(x)

Integral I(x) integrieren f(x)

Beispiel: Integralfunktion bestimmen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 0.75 \\ -0.5, & \text{für } 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I(x) = \begin{cases} \int_{c=0}^x 1 \, d\tilde{x} = x \\ \int_{c=0}^{0.75} 1 \, d\tilde{x} + \int_{0.75}^x (-0.5) \, d\tilde{x} = 0.75 + (-0.5)(x - 0.75) \end{cases}$$

Wichtig: Bei Funktionen mit Sprungstellen immer beim Anker beginnnen, wenn nichts spezielles verlangt ist

4.11 Stammfunktion *F*

Eine Funktion *F*(*x*) heisst Stammfunktion von *f*(*x*) wenn gilt: ***F*'(*x*) = *f*(*x*)**

- *F*(*x*) + *C* sind ebenfalls Stammfunktionen von *f*(*x*)
- *C* ∈ ℝ *C* ist eine freie Verschiebungszahl
- Stammfunktionen *F* sind Teilmenge der unbestimmten Integrale

⇒ Ableitungstabelle rückwärts lesen für Stammfunktion!

4.12 Unbestimmtes Integral

$$I(x) + C = \int f(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \quad C \in \mathbb{R}$$

Wenn *f*(*x*) stetig ist, dann entspricht das unbestimmte Integral der Stammfunktion

4.13 Hauptsatz der Integration (S. 507)

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b$$

4.14 Wachstumsvergleiche

- (1)

$\frac{n^k}{q^n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 0$

$(k \in \mathbb{N}; q > 1)$
- $\frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}}$

→ 0
- (2)

$\frac{q^n}{n!} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 0$

$(q > 1)$
- $\frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}}$

→ 0
- (3)

$\frac{\ln(n)}{n^k} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 0$

$(k \in \mathbb{N})$
- $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}}$

→ 0
- (4)

$\frac{\ln(n)}{n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 0$
- $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Linear}}$

→ 0