

1 Begriffe

Mathematische Zeichen S. 1230
Produkt- & Summenzeichen S.6, 7

1.1 Zahlen (S. 1, 331)

$\mathbb{N} =$	1, 2, 3, ...	Die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 =$	0, 1, 2, 3, ...	
$\mathbb{Z} =$	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...	Die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} =$	$\frac{p}{q}$ für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}_0$	Die Menge der Rationalen Zahlen
$\mathbb{R} =$	$\pi, \phi, \sqrt{2}, \mathbb{Q}$	Die Menge der reellen Zahlen
$\phi =$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$	Goldener Schnitt
$\pi \approx$	3.14159	Kreiszahl
$e =$	$(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.71828$	Eulerische Zahl
sqrt	$\sqrt{3} \approx 1.73205$	$\sqrt{2} \approx 1.41421$

1.2 Mengenlehre S. 1230

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$	
Schnittmenge:	
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	$A \cap B = \{0, 1, 2\}$
Vereinigungsmenge:	
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Differenzmenge:	
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	$A \setminus B = \{-2, -1\}$
Produktmenge:	
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$	
Kommutativgesetz:	
$A \cap B = A \cap B$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetz:	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.3 Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1.4 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.5 Induktion S. 5,6

$$e^n \geq n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$1. \quad (\forall A) \text{ prüfen } n_0$$

$$e^{n_0} \geq n_0 \rightarrow e^{1 \cdot 1} \geq 1$$

$$2. \quad (\forall E) \text{ Annahme: } e^n \geq n$$

$$\text{Schritt: } e^{n+1} \geq n+1$$

$$e^{n+1} = e \cdot e^n \geq n+1$$

$$\geq e \cdot n \geq 2.718 \cdot n \geq n+1$$

1.6 Spezielle Ungleichungen S.31

wobei für $a_i \geq 0$ $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:
Bernoulli Ungleichung:
 $(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, $a \neq 0$
Binomische Ungleichung:
 $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
Dreiecksungleichung:
 $|a + b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \geq |a| - |b|$
Geometrische Folge:
 a^n

1.7 Spezielle endliche Reihen S.20

arithmetisch $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
geometrisch $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ für $(q \neq 1; n \in \mathbb{N}_0)$

1.8 Mittelwerte S.20, 21

$QM \geq AM \geq GM \geq HM$	
Arithmetische Mittel	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$
Geometrisches Mittel	$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$
Harmonisches Mittel	$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$
Quadratisches Mittel	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$

1.9 Intervalle/ Strecke

Geschlossenes Intervall	$[a; b]$	$a \& b$ inkludiert
Offenes Intervall	$]a, b[$	$a \& b$ exkludiert

Maximum & Minimum nur bei geschlossenem Intervall
unter Grenze = **Infimum** = inf
obere Grenze = **Supremum** = sup

Umgebung

Eine Umgebung ist ein offenes Intervall mit dem Zentrum z
 $]a, b[$ $a \neq z - \epsilon$ & $b \neq z + \epsilon$
 ϵ ist dabei so nah wie möglich $|b - z|$ und $|z - a|$

1.10 Binomialkoeffizient/ Pascalsche Dreieck S.12

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ für } a^{n-k} b^k \text{ wobei } k = \text{Stelle; } n = \text{Potenz}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

2 Funktionen S. 49

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x eine Definitionsmenge D genau ein Element y der Wertemenge W zuordnet.

Wertemenge = Definitionsmenge Umkehrfunktion

Umkehrfunktion: S.53 Monotonie S. 51
Beschränktheit: S.52

2.1 Transformation; Reihenfolge Graph zu Funktion

1. Streckung um $1/a$ in x -Richtung $y = f(a \cdot x)$
Spiegelung an y -Achse bei $-a$
2. Verschiebung nach links(+)oder rechts(-) $y = f(x \pm b)$
3. Streckung um c in y -Richtung $y = c \cdot f(x)$
Spiegelung an x -Achse bei $-c$
4. Verschiebung nach oben (+ d) oder unten ($-d$) $y = f(x) \pm d$

2.2 Funktionsarten

Identität	$f(x) = x$	y - Wert gleich dem x Wert
Signum	$f(x) = \text{sgn}(x)$	Vorzeichenwechsel

a)

Treppenfunktion

$f(x) = [x]$

b)

Sägezahn

$f(x) = x - [x]$

c)

Dreiecksfunktion

$f(x) = |x - [x + 0.5]|$

2.3 Trigonometrie S.77, 82

Grad zu Rad: Sinussatz: Cosinussatz:	$\frac{a \cdot 2\pi}{360^\circ}$ $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\beta}{\sin \gamma} = \frac{\gamma}{\sin \alpha}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos \alpha$
---	---

$\cos^2 + \sin^2 = 1$
 $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
Zwischenwinkelformel:
 $f_1(m_1) | f_2(m_2)$
Symetrien:
 $\cos(-x) = \cos(x)$
 $\cos(k\pi - x) = \cos(k\pi + x)$
Additionstherme:
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta$

Wichtige Größen:

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	/	0

Wertebereiche:

$\sin : D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow W_f = [-1, 1]$
 $\cos : D_f = [0, \pi] \rightarrow W_f = [-1, 1]$
 $\tan : D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
 $\cot : D_f = (0, \pi) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

$\arcsin : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\arccos : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [0, \pi]$
 $\arctan : D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 $\text{arccot} : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = (0, \pi)$

2.4 Verkettung oder mittelbare Funktionen

g nach f
 $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$ $W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$
 h nach g
 $h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$ $W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

2.5 Gerade/ ungerade Funktion S.52

gerade: $f(-x) = f(x)$ Symetrisch zur y -Achse
ungerade: $f(-x) = -f(x)$ punktsymmetrisch
periodisch: $f(x) = f(x \pm p)$ wiederholend mit Periode p

2.6 Schwingungen S. 84

Sinus Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega t + \pi)$
A Amplitude ω Frequenz $\frac{2\pi}{sec}$ ϕ Phase

Superposition von Schwingungen
 $y = A \cdot \sin(\omega t + \pi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \rho_1 + \rho_2)$
 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\rho_1 - \rho_2)}$

2.7 Schnittwinkel von zwei Funktionen

- 1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
- 2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
- 3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch Ausprobieren herausfinden (Bereich von -3...3)
- 4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
- 5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
- 6. Schnittwinkel berechnen: $\tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

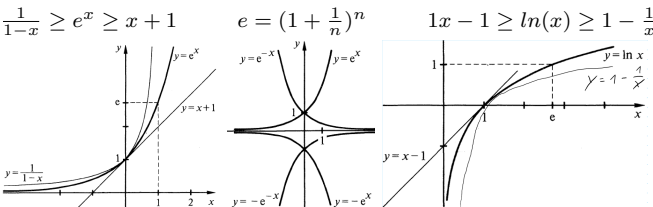
Wenn $m_1 * m_2 = -1 \Rightarrow$ Funktionen rechtwinklig zueinander

2.8 Potenz- /Logarithmusgesetze S. 8,9

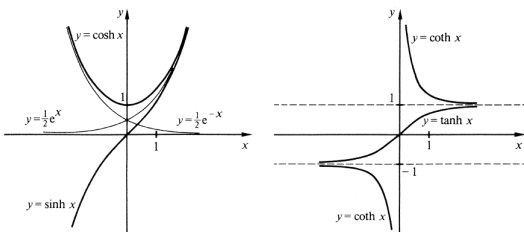
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a(c)$$
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$
$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$
$$\frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$
$$e^x \geq 1 + x \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R}$$
$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$
$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$$
$$\lg(10) = 1$$
$$e^x \leq \frac{1}{1+x} \text{ f\"ur } x < -1$$
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.9 Eulerische Funktionen



2.10 Hyberbolische Funktionen S. 89



$$e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \mathbb{R} \rightarrow [1; \infty[\cup]-\infty; 1]$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \mathbb{R}^1 \rightarrow [-\infty; \infty]$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$
$$\operatorname{arccosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad [1; \infty[\rightarrow [0; \infty[$$
$$\operatorname{arcsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Umkehrfunktion S. 93

2.11 Superpositionen

Die Superposition zweier Wellen kann die resultierende Welle verstärken oder auslöschen.
 $y = A \cdot \sin(\omega t + p)$
Geradlinige Funktionen $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(p_1 - p_2)}$

3 Partialbruchzerlegung S. 15

- 1. Wenn Nennerpotenz kleiner als Faktor $\rightarrow$ Polynomdivision
- 2. Nenner faktorisieren
- siehe 3.1, Nullstelle herausfinden und anschliessend Polynomdivision
- siehe 3.2, Nullstelle herausfinden und anschliessend Hornerchema
- $\frac{x^2-2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2-2}{(x+1)(x^2+1)}$
- 3. Nenner faktorisieren
- $\frac{x^2-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$
- 4. Nenner mit Faktor multiplizieren
- $x^2 - 2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1) = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$
- 5. Zusammenfassen
- $1x^2 + 0x - 2 = x^2(A + B) + x(B + C) + (A + C)$
- 6. Koeffizientenvergleich & Gleichungssystem lösen
- $1 = A + B \quad 0 = B + C \quad -2 = A + C$

Beispiel 2:

$$2. \frac{2x^2-6x-32}{x^3-x^2-17x+15} = \frac{2x^2-6x-32}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$
$$3. \frac{2x^2-6x-32}{(x-1)(x-3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5}$$

4/5. $2x^2 - 6x - 32 = A(x-3)(x+5) + B(x-1)(x+5) + C(x-1)(x-3) = Ax^2 + 2Ax - 15A + Bx^2 - 4Bx - 5B + Cx^2 - 4Cx + 3C = x^2(A + B + C) + x(2A + 2B - 4C) + (-15A - 5B + 3C)$

6. $2 = A + B + C \quad -6 = 2A + 4B - 4C \quad -32 = -15A - 5B + 3C$

Beispiel 3:

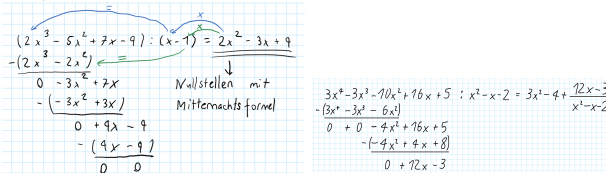
$$\frac{x^3}{x^4+1} = \frac{x^3}{(x^2+\sqrt{2}+1) \cdot (x^2-\sqrt{2}+1)} \quad (\text{Nenner ausfaktoriert})$$
$$x^3 = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \sqrt{2} + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 - \sqrt{2} + 1}$$

Spezieller Ansatz:

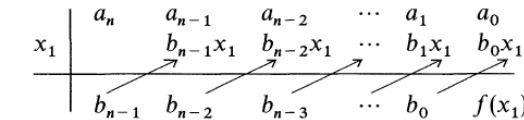
$f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$

3.1 Polynomdivision S. 15

Beispiel: $2x^3 - 5x^2 + 7x - 4 = 0$ Nullstelle bei $x_0 = 1$



3.2 Hornerchema S. 966



Beispiel: $5x^3 - 8x^2 - 27x + 18 = 0$ Nullstelle bei $x_0 = -2$

5	-8	-27	18
	-2*5=-10	36	-18
5	-10+-8=-18	9	0

$5x^2 - 10x - 8 = 0 \rightarrow$ Mitternachtsformel

4 Folgen

4.1 Einführung

Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow a(n) =: a_n$
explizite Folge: (a_n) mit $a_n = a(n)$
rekursive Folge: (a_n) mit $a_0 = f_0, a_{n+1} = a(a_n)$

4.2 Rechnen mit Unendlichkeiten

Für unbestimmte Formen gibt es keine allgemeinen Regeln; das Grenzverhalten ist abhängig von den beteiligten Funktionen und mittels speziellen Methoden (z.B. B.H.) zu überprüfen bzw. zu berechnen.

für $g \in \mathbb{R}$	für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$	unbestimmt
$\infty + \infty = \infty$	$\frac{1}{0+} = \infty$	$\frac{0}{0} = ?$
$\frac{1}{\infty} = 0$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$
$g + \infty = \infty$	$-\infty \cdot \infty = -\infty$	$0 \cdot \infty = ?$
$\frac{g}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0-} = -\infty$	$1^\infty = ?$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$\infty - \infty = ?$
$\frac{\infty}{0+} = \infty$	$\frac{g}{0+} = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$0^0 = ?$
$g - \infty = -\infty$	$g \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$
$\frac{\infty}{0-} = -\infty$	$\frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty, & g > 0 \\ +\infty, & g < 0 \end{cases}$	

4.3 Beschränktheit S. 51, 470/ Monotonie

Beschränktheit

$W_F \subset [a; b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Monotonie	$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	$\uparrow$
	$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\uparrow$
	$d \leq 0$	$0 < q \leq$	monoton fallend	$\downarrow$
	$d < 0$	$0 < q <$	streng monoton fallend	$\downarrow$

Beweis Monotonie mittels Induktion von $u_1 = 1; U_{n+1} = e^{u_n} - 1$

VA	$U_2 \geq U_1$	$e^1 - 1 \geq 1$	
VE	Annahme	$U_{n+1} \geq U_n$	
	Schritt	$U_{n+2} \geq U_{n+1}$	
		$e^{e^{U_n}-1} - 1 \geq e^{u_n} - 1$	
		$e^{e^{U_n}-1} \geq e^{u_n}$	
		$e^{U_n} - 1 \geq u_n$	monoton wachsend da $\geq$

Grenzwert:

$\lim_{U_{n+1} \rightarrow U_n+1} (U_{n+1} = e^{u_n} - 1)$

$(U_{n+1} = e^{U_{n+1}} - 1)$

nur richtig für $U_{n+1} = 0$, da monoton steigend & $U_n = 1$ ist die Funktion bestimmt divergent gegen $+\infty$

4.4 Konvergenz /Divergenz S. 472

Konvergent

Es existiert ein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon > 0$ Gesucht ist ein n_0 , ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen.

Bestimmt divergent gegen $+\infty$

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

Bestimmt divergent gegen $-\infty$

Ungleichung: $f_n < K$ wenn $n \leq n_0$ für $K < 0$

Unbestimmt Divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist.

Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph gezeichnet werden kann, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

4.5 Grenzwert bestimmen:

- 1. Naiven Ansatz ausprobieren $\rightarrow$ limit direkt bilden
- 2. Falls unbestimmte Formen entstehen:

Arithmetik:	$+, -, *, /$
Erweiterung:	erweitern mit höchster Nennerpotenz n/x^n
Erweiterung:	erweitern mit Gegenterm (3.Binom bilden)

4.6 Einschliessung

Es existieren drei Folgen: O_n, f_n und U_n

Es gilt: $O_n \geq f_n \geq u_n$

WENN O_n gegen Grenzwert g konvergiert UND U_n ebenfalls gegen g konvergiert, DANN konvergiert auch f_n gegen g

4.7 Limes Inferior und Superior

Der Limes superior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ ist der größte Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

Der Limes inferior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ der kleinste Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

4.8 Wichtige Regeln S. 57

$$a_n = q^n \quad n \rightarrow \infty \quad \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm \infty & q < -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$
$$a_n = \frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \forall k \geq 1$$
$$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^c$$
$$a_n = n \left(\frac{1}{n} - 1\right) = \ln c$$
$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \quad (2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

4.9 Wachstumsvergleich "Der Stärke siegt"

(1) $\frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$

(2) $\frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$

(2) $\frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$

4.10 Begrifflichkeiten

$F(x) = \frac{x^3+1}{2x^2}$

Nullstellen:

$x^3 + 1 = 0$ $x_1 = -1$

$(x^3 + 1)/(x + 1) = x^2 - x + 1$ Partzialbruchzerlegung

Determinante > 0 keine weiteren Nullstellen

Polstellen:

$2x^2 = 0$ $x = 0$

Asymptote: (Rest Partzialbruchzerlegung)

$(x^3 + 1)/2x^2 = 1/2x + 1/2x^2$

4.11 Links- Rechtsseitiger Grenzwert S. 55

Eine kritische Stelle kann von links und rechts angenähert werden.

Berechnung links und rechtsseitiger Grenzwert (g^-, g^+)

Wenn $g^- = g^+ = g \rightarrow$ Konvergenz

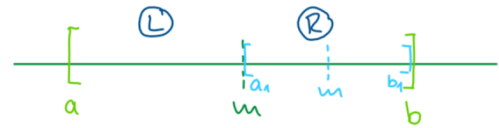
Wenn $g^- \neq g^+ \rightarrow$ unbestimmte Divergenz

4.12 Nullstellen gem. Bolzano

$f(x)$ auf Intervall $[a; b]$ stetig und $f(a)$ und $f(b)$ versch. Vorzeichen $\rightarrow$ Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ

NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

- (1) $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$ gesamtes Intervall
- (2) I_0 halbieren $\rightarrow m = \frac{a_0+b_0}{2}$
- (3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
links: $f(a) \cdot f(m) < 0$; rechts: $f(a) \cdot f(m) > 0$
- (4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1; b_1]$
- (5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
- (6) ... $\xi \in (a; b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)



5 Ableitung

5.1 Differenzialquotient S. 444

Differenzquotient: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Tangente: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$

Winkel: $\tan(\delta) = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

5.1.1 Ableitungsregeln

Euler:	$(e^x)'$	$= e^x$
	$(e^{\alpha x})'$	$= \alpha \cdot e^{\alpha x}$
	$(e^{f(x)})'$	$= e^{f(x)} \cdot f'(x)$
	$(a^x)'$	$= \ln(a) \cdot a^x$
1:	$(1)'$	$= 0$
x:	$(x)'$	$= 1$
Potenzen:	$(x^n)'$	$= nx^{n-1}$
	$(f(x)^n)'$	$= n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Potenzen -:	$(x^{-1})'$	$= -1x^{-2}$
Brüche:	$(\frac{1}{x})'$	$= -\frac{1}{x^{n+1}}$
Produkte:	$(f(x) \cdot g(x))'$	$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Wurzeln:	$(x^{1/n})'$	$= \frac{1}{n \cdot x^{1/n}}$
Wurzel Bruch:	$x^{-1/2}$	$= -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
Quotient:	$(u \cdot \frac{1}{v})'$	$= \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Trigo:	$\sin(x)'$	$= \cos(x)$
	$\sin(f(x))'$	$= \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
	$\sin^2(x)'$	$= \sin(x) \cdot \sin(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
	$\arcsin(f(x))'$	$= \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
	$\cos(x)'$	$= -\sin(x)$
	$\cos(f(x))'$	$= -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
	$(\arccos(f(x)))'$	$= -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
	$\tan(x)'$	$= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\arctan(f(x))'$	$= \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$
	$\cotan(x)'$	$= -\frac{1}{\sin^2(x)}$
Hyperbol:	$\cosh'(x)$	$= \sinh(x)$
	$\sinh'(x)$	$= \cosh(x)$
Allg. Potenz:	$(f(x)^\alpha)'$	$= \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
Allg. Expo:	$(e^{f(x)})'$	$= e^{f(x)} \cdot f'(x)$
Logarithmus:	$(\ln f(x))'$	$= \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
	$(\log_{(\alpha)}x)'$	$= \frac{1}{\ln(\alpha)} \cdot (\ln(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(\alpha)})'$
Betrag:	$ f(x) '$	$= \frac{f(x)}{ f(x) } \cdot f'(x)$
Betrag Trigo:	$ f(x) '$	$= \frac{f(x)}{ f(x) }$

5.2 Satz von Bernouli - Hopital S 57-58

- 1. Regel: Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{0}{0}$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x_0)}{f_2'(x_0)}$
- 2. Regel: Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{\infty}{\infty}$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x_0)}{f_2'(x_0)}$

Ergibt das Resultat wiederum $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ den Schritt wiederholen Umformungen

$f \cdot g$ von der Form $(0+) \cdot \infty$ $\frac{g}{(1/f)} = \frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\frac{f}{(1/g)} = \frac{0}{0}$

$f - g$ von der Form $\infty - \infty$ $\frac{(1/g)-(1/f)}{1/(fg)} = \frac{0}{0}$

f^g von der Form $(0+)^0, \infty^0, 1^\infty$ $f^g = e^{g \ln f}$

für $g \cdot \ln(f) = (0+) \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$

Durch Ausklammern von Vorzeichen und Reziprokbildung bei negativen Exponenten sind andere Vorzeichenvarianten vollständig abgedeckt:

$(0-) \cdot \infty = -(0+) \cdot \infty$ oder $(0+)^{0-} = \frac{1}{(0+)^{0+}}$ oder $1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty}$