

Grundlegendes

Binomialkoeffizienten

Für alle Binomialkoeffizienten gilt:

$$\text{a) } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{b) } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (Symmetrie)} \quad \text{c) } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Im Falle $n = 5$ ist $\binom{n}{k}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ definiert, und es gilt:

$$\boxed{\binom{5}{0} = 1} \quad \boxed{\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5} \quad \boxed{\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10} \quad \boxed{\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10} \quad \boxed{\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5} \quad \boxed{\binom{5}{5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Die Behauptung $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, wenn (1.): $A(n)$ für $n = 1$ gilt, und (2.): aus der Gültigkeit der Aussage für eine natürliche Zahl k die Gültigkeit der Aussage für die Zahl $k + 1$ folgt.

Ungleichungen

Ungleichung zu ArithM. und Geom.: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad a_i > 0, n \in \mathbb{N}$

Ungleichung zu ArithM. und Quad. Mittel: $\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad n \in \mathbb{N}$

Ungleichung zu ArithM. und HarmM.: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

Bernoulli Ungleichung: $(1 + a)^n \geq 1 + na \quad a \geq -1, n \geq 1$

Potenz- und Log.-Gesetze

$$\boxed{a^n b^n = (ab)^n} \quad \boxed{a^m a^n = a^{m+n}} \quad \boxed{(a^m)^n = a^{mn}} \quad \boxed{a^n / b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n} \quad \boxed{a^m / a^n = a^{m-n}} \quad \boxed{x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b}$$

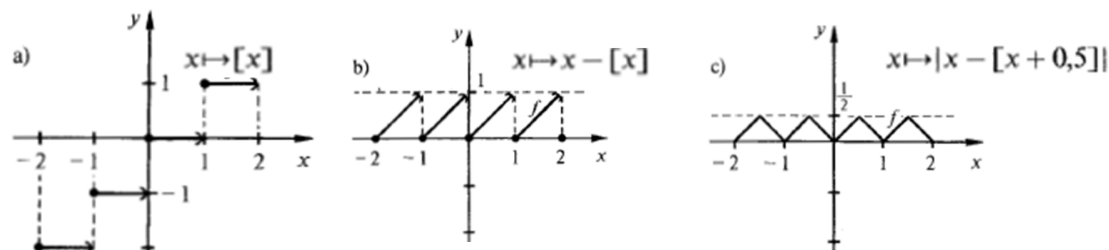
$$\boxed{\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)} \quad \boxed{\log_a(u/v) = \log_a(u) - \log_a(v)} \quad \boxed{\log_a(u^p) = p \log_a(u)}$$

Funktionen

Einige Spezielle Funktionen

Die folgende Funktion wird Signumfunktion genannt: $f: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Unter $[x]$ versteht man die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.



Umkehrfunktionen

$Y = 2x + 3 \rightarrow x$ und y vertauschen und nach y auflösen $\rightarrow y = (x-3)/2$

Definitionsbereich beachten!!!!!!!

Man spricht von einer Restriktion wenn eine Einschränkung von D_f gemacht wird, damit Umkehrbar ist.

Transformation Funktionen

y-Verschiebung: $f(x) + B$ X-Verschiebung: $f(x-B)$ (- heisst rechts, + heisst links)
 y-Streckung: $f(x) * A$ x-Streckung: $f(x*A)$ (Streckfaktor 1/A)
 Spiegelung an x- Achse (Abszisse): $-f(x)$ an y- Achse (Ordinate): Vorzeichenwechsel bei x

Beschränktheit

Eine Funktion $f: D_f \mapsto W_f$ heisst nach oben beschränkt bzw. nach unten beschränkt, wenn die Wertemenge D_f nach oben bzw. unten beschränkt ist. Entsprechend wird f beschränkt genannt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}^+$ gibt, mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in D_f$.

Monotonie

wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ streng wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ streng fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Gerade und Ungerade Funktionen

Gerade: $f(-x) = f(x)$ Ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Periodizität

$f(x+p) = f(x)$, wobei $p > 0$ ist und der „Periodenlänge“ entspricht

Hornerschema

Abspalten eines Faktors mittels Horner-Schema (vgl. Beispiel 2.22)

a) $x_1 = -2$ ist Nullstelle von f mit $f(x) = x^3 - 67x - 126$.

Das Horner-Schema liefert die Koeffizienten des in Beispiel 2.22 angegebenen Polynoms:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\
 & & -2 & 4 & +126 \\
 \hline
 & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & b_2 & b_1 & b_0 &
 \end{array}$$

Es gilt: $f(x) = x^3 - 67x - 126 = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gebrochenrationale Funktionen

Echt gebrochen wenn Nennergrad > Zählergrad und unecht gebrochen wenn Nennergrad $\leq$ Zählergrad.

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen im Nenner finden mit Horner-Schema
2. Pro Nullstelle ein Bruch
3. Zählervergleich machen mit Nullstellen eingesetzt um Faktoren A...N finden

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{-x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+5)} \\
 \frac{-x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} &= \frac{A(x-3)(x+5) + B(x-2)(x+5) + C(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)(x+5)}
 \end{aligned}$$

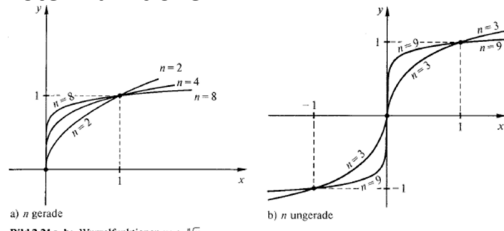
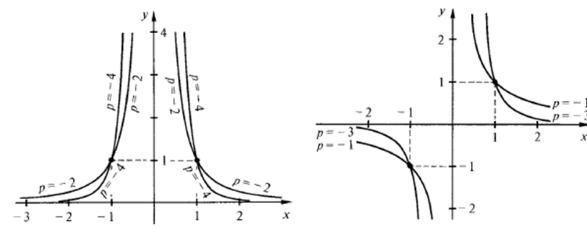
Zählervergleich:

$$x = -2: \quad -4 - 40 + 149 = A(-5)(3) \rightarrow 105 = -15A \rightarrow A = -7 \text{ usw.}$$

Nenner hat n-fache reelle Nullstellen: $(x - xi)^n$ dann gibt es n Brüche mit den Faktoren A...N

$$\frac{A}{(x-xi)} + \frac{B}{(x-xi)^2} + \dots + \frac{N}{(x-xi)^n}$$

$$\text{Nenner hat nicht zerlegbaren Teil: } \frac{7x^2 - 13x + 24}{x(x^2 - 4x + 8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 8}$$

PotenzfunktionenBild 2.21 a, b: Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ Bild 2.22: Potenzfunktionen $x \mapsto x^p$ für $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ **Sinus, Cosinus und Tangensfunktion**

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \sin(b) \cos(a)$$

$$\text{und } \tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$$

$$\text{und } \cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$$

Hyperbolischen Funktionen

Unter den hyperbolischen Funktionen oder Hyperbelfunktionen versteht man die Funktionen:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Area Funktionen

Die Areafunktionen lassen sich durch die ln-Funktion ausdrücken. Es gilt:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ für alle } x \in [1, \infty)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ für alle } x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

Grenzwerte Funktionen , Asymptote

$|f(x) - g| < \varepsilon$, wenn $x \mapsto \pm \infty$ d.h. wenn es einen Grenzwert gibt, gibt es abhängig von ε ein x_i ab dem die Funktionswerte nicht mehr aus ε fallen.

Grenzwerte bei stelle x_0 (Bsp.: $x_0 = 2$):

Linksseitiger Grenzwert $\rightarrow$ in Funktion $(2-h)$ für x einsetzen und Grenzwert berechnen wenn $h \rightarrow 0+$

Rechtsseitiger Grenzwert $\rightarrow (2+h)$ für x einsetzen und Grenzwert berechnen wenn $h \rightarrow 0+$

Asymptoten bei Rationalen Funktionen (Zählergrad = ZG, Nennergrad = NG):

ZG < NG: Waagrechte Asymptote auf x-Achse

ZG = NG: Waagrechte Asymptote parallel zur x-Achse ($g(x) = mx^i/nx^i = m/n = \text{Asymptote}$)

ZG = NG+1: Schiefe Asymptote, Geradengleichung $mx+q$ durch Polynomdivision ermitteln

ZG > NG+1: Kurvenförmige Asymptote, Gleichung durch Polynomdivision ermitteln

Stetige und unstetige Funktionen

f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f heisst auf einem Intervall stückweise stetig, wenn f dort bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.

Wenn f_1 und f_2 in x_0 stetig sind, dann sind auch die Funktionen f_1+f_2 , $f_1 \cdot f_2$, f_1/f_2 stetig in x_0 .

Unstetigkeitsstelle 1. Art oder Sprungstelle von f , wenn die einseitigen Grenzwerte g_+ und g_- an dieser Stelle existieren, aber $g_+ \neq g_-$ ist.

x_0 heisst eine Unstetigkeitsstelle 2. Art von f , wenn mindestens einer der einseitigen Grenzwerte an dieser Stelle nicht existieren.

Satz von Bolzano (Nullstellenprinzip):

Wenn f auf $[a, b]$ stetig und $f(a)f(b) < 0$ ist, dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Zahlenfolgen und Grenzwerte

Monotonie

Die Folge $\langle a_n \rangle$ heisst monoton **wachsend** bzw. streng monoton wachsend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ bzw. } a_n < a_{n+1}$$

Die Folge $\langle a_n \rangle$ heisst monoton **fallend** bzw. streng monoton fallend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ bzw. } a_n > a_{n+1}$$

Demnach kann für wachsend $a_{n+1} - a_n > 0$ gelöst werden für beweis. Dito für fallend, einfach $<!$

Beschränktheit

Die Folge $\langle a_n \rangle$ heisst nach oben bzw. unten beschränkt, wenn mindestens ein $K \in \mathbb{R}$ bzw. $k \in \mathbb{R}$ so existiert, dass $a_n \leq K$ bzw. $a_n \geq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. K bzw. k heisst eine ober bzw. untere Schranke von $\langle a_n \rangle$. Die kleinste obere bzw. grösste untere Schranke bezeichnet man als obere bzw. untere Grenze der Folge $\langle a_n \rangle$. Die Folge $\langle a_n \rangle$ heisst beschränkt, wenn sie sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist.

Grenzwert (konvergent)

Eine Folge $\langle a_n \rangle$, die einen Grenzwert a besitzt, heisst konvergent (gegen Grenzwert a).

Wenn die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton wachsend (bzw. fallend) und auch nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist, dann ist sie konvergent

Divergenz

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heisst divergent (Grenzwert $= +\infty$)

Nullfolge

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist, dann heisst $\langle a_n \rangle$ eine Nullfolge

Sandwich

$\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ seien konvergente Folgen mit gleichen Grenzwerten. Gilt dann für die Folge $\langle c_n \rangle$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq c_n \leq b_n$, so ist der Grenzwert von c_n ebenfalls gleich.

Grenzwerte und Grenzwertgleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0, q > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0, a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\ln(u))^a}{u^b} = 0, a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, x \in \mathbb{R}^+$$

Grenzwertgleichung:

$$\text{Für } x_{n+1} \text{ einfach } g \text{ einsetzen und nach } g \text{ auflösen. Bsp.: } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right) \rightarrow g = \frac{1}{2} \left(g + \frac{p}{g} \right) \rightarrow g = \sqrt{p}$$

Eulerzahl und $\ln(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

Die e-Funktion ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

$$e^x \geq 1 + x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für alle } x < 1$$

Umkehrfunktion von $e^x \rightarrow \ln(x)$

Die $\ln$ -Funktion ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend.

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

$$\text{Nützliche Formeln:} \quad e^{\ln(x)} = x \quad \ln(e^x) = x \quad \ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1$$

Differenzialrechnung

Sekanten Steigung:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = Differenzenquotient. Wenn h gegen 0 geht erhält man Steigung im Punkt x_0 .

Ableitungsregeln

Sind u und v differenzierbare Funktionen, so ist auch $f = u \cdot v$ differenzierbar, und es gilt:

$$f' = (uv)' = u'v + uv' \quad (\text{Produktregel})$$

Sind u und v differenzierbare Funktionen und hat v keine Nullstelle, so ist die Funktion u/v differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

Kettenregel: Es sei $f(x) = \sin(3\cos^2(x^5))$

$$x \mapsto x^5 \mapsto \cos(x^5) \mapsto (\cos(x^5))^2 \mapsto 3(\cos(x^5))^2 \mapsto \sin(3(\cos(x^5))^2)$$

$$f'(x) = 5x^4 * -\sin(x^5) * 2 \cos(x^5) * 3 * \cos(3(\cos(x^5))^2)$$

Exponentialregel: $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$

Logarithmus Regel: $\ln(|f(x)|) = f'(x) * \frac{1}{f(x)}$

Differenzial

Tangente: $\hat{f}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

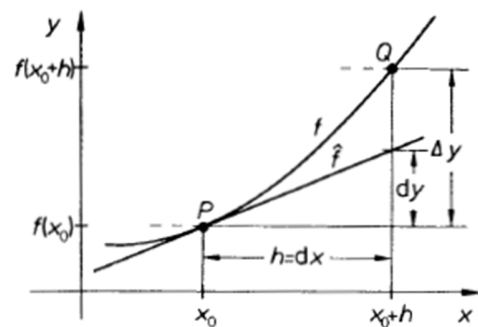
Funktionszuwachs: $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$

Differenzial: $dy = \text{"Tangetialer Zuwachs"}$
 $= f'(x_0)dx$

Rest/Lücke: $\Delta y - dy$

Fehlerfortpflanzung: absolut = $dy = f'(x_0)dx$
 relativ = $\frac{dy}{y} = \frac{f'(x_0)dx}{f(x_0)} = \%$

Genauigkeit Input: dx/x in Prozent ($1\% = 0.01$)



Mittelwertsatz

Satz von Rolle: f sei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit der Eigenschaft $f'(\xi) = 0$.

Daraus folgt der Mittelwertsatz: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \left(= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right)$

Taylor Theorie

Taylor Polynom: $P_n(x_0; h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)h^n}{n!} + R_n(x_0; h)$

$$h = x - x_0$$

Fehlerterm nach Lagrange: $R_n(x_0; h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{(n+1)}$

Berechnung von Grenzwerten mit Bernoulli H

B.H. I: wenn bei der Grenzwertberechnung $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{0}{0}$ herauskommt, dann ist der Grenzwert von

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \text{ Dies gilt auch für höhere Ableitungen.}$$

B.H. II: wenn bei der Grenzwertberechnung $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ herauskommt, dann ist der Grenzwert von

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \text{ Dies gilt auch für höhere Ableitungen.}$$

Des Weiteren sind die Typen $\infty - \infty, 0\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ so umzuformen, dass wieder B.H. eintritt:

$$0 * \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \infty - \infty \Rightarrow \frac{f_2 - f_1}{f_1 f_2} = \frac{0}{0}; f^g: \begin{cases} 1^\infty \\ 0^0 \\ \infty^0 \end{cases} = e^{g \cdot \ln(f)} = \begin{cases} e^{\infty * 0} \\ e^{0 * -\infty} \\ e^{0 * \infty} \end{cases}$$

Funktionsanalyse

Monotonie: wachsend wenn $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) > 0$, fallend wenn $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$

Extremalstellen: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt, wenn $f''(x) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

Krümmung: L-Krümmung (Konvex) wenn $f''(x) \geq 0$, R-Krümmung (Konkav) wenn $f'' \leq 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) < 0$ Wendepunkt (L-r) oder $f'''(x) > 0$ Wendepunkt (R-l)

Sattelpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Wichtige Ableitungen

F	Df	F'	Df'	F	Df	F'	Df'
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n * x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha * x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	A^1	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	A^1	$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$\mathbb{R}$
$\cot(x)$	B^2	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	B^2	$\coth(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x * \ln(a)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$(-1,1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$
$\log_a(x), a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x * \ln(a)}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Integralrechnung

Stammfunktion

Die Stammfunktion $F(x)$ abgeleitet ergibt die zu integrierende Funktion $f(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$

Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Unbestimmt: $\int f(x)dx = F(x) + C$ = die Menge aller Stammfunktionen

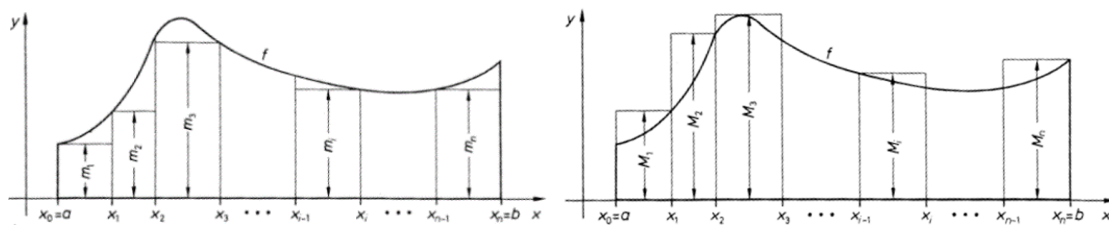
Bestimmt: $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ = eine reelle Zahl (= Riemannsche Integral)

Integralfunktion

$I(x) = \int_c^x f(\tilde{x})d\tilde{x}$, wobei c der Anker ist und verschiedene Anker führen zu Verschiebung der Funktion in y -Richtung.

Untersumme und Obersumme

$$U = U(Z) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{und} \quad O = O(Z) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$



Mittelwertsatz

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$

Integrierbar

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall monotone Funktion ist dort integrierbar.

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort integrierbar.

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkte und an höchstens endlich viele Stellen unstetige Funktion ist dort integrierbar.

Integrieren bei Betragsfunktionen

Ist eine Funktion mit Beträgen gegeben, so muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden und das Integrationsintervall dementsprechend zerlegt werden.

$$f(x) = x|x - 1|:$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -(x - 1) = 1 - x & \text{für } x < 1 \end{cases}; \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x(1 - x)dx + \int_1^2 x(x - 1)dx$$

Flächeninhalte unter Funktionsgraphen

$$f \text{ ist nicht negativ auf } [a; b] \quad A = \int_a^b f(x)dx$$

$$f \text{ ist nicht positiv auf } [a; b] \quad A = -\int_a^b f(x)dx$$

$$f \text{ wechselt das Vorzeichen auf } [a; b]: \text{ Nullstelle (m) berechnen dann ist } A = \int_a^m f(x)dx - \int_m^b f(x)dx$$

Flächeninhalt zwischen zwei Funktion $f(x) > g(x)$

$$\text{Schnittpunkte a und b berechnen: } A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Allgemein Nützliches

Winkel zwischen zwei Funktionen

Winkel zwischen zwei Funktionen am Schnittpunkt x_s : $\tan(\alpha) = \frac{f'(x_s) - g'(x_s)}{1 + f'(x_s) \cdot g'(x_s)}$

Heron-Newton-Raphson Verfahren

Wurzelberechnung für p , mit folgender Zahlenfolge: $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right) \rightarrow x_1 = \text{Beliebig}$

Bi-Sektion auf Seite 327 in Formelbuch

Spezielle Grenzwerte

$$\begin{array}{llll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \ (a > 1; \alpha, \beta > 0) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \ (x > 0) \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 & \lim_{x \rightarrow 2} \ln \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = \ln 2 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{q^x} = 0 \ (q > 1; k \in \mathbb{N}) \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha &
 \end{array}$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$

Spezielle endliche Reihen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}; \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$