



1 Reelle Zahlen

Zahlenmengen:	S. 1, 331	Mengenlehre:	S. 335, 1230
Summenzeichen:	S. 6	Produktzeichen:	S. 7
Beweismethoden:	S. 5	Fakultät	S. 13

1.1 Zahlenmengen (S. 1, 331)

Ganze Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
Natürliche Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
Rationale Zahlen:	$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$;
Irrationale Zahlen:	nichtperiodische Kommazahlen
Reelle Zahlen:	$\mathbb{R} = \text{z.B. } \sqrt{2}, \pi, \phi$

1.2 Supremum und Infimum

$\sup(X)$	Kleinste obere Schranke $\Rightarrow$ Maximum ist immer auch Supremum
$\inf(X)$	Grösste untere Schranke $\Rightarrow$ Minimum ist immer auch Infimum

1.3 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient (S. 12)

Der Binomische Satz kann verwendet werden, um das Pascal-Dreieck zu berechnen.

Binomischer Satz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ wenn } k < 0 \text{ oder } k > n$$

1.4 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält,
heisst eine Umgebung von a $U(a)$

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ -Umgebung von a
versteht man das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ -Umgebung von a ohne die Zahl a selbst
wird punktierte ϵ -Umgebung von a genannt $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.5 Spezielle endliche Reihen (S. 20)

Arithmetisch:	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	Geometrisch:	$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
---------------	-------------------------------------	--------------	--

1.6 Mittel (S. 20, 21)

Harmonisches Mittel (HM)	$\frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}$
Geometrisches Mittel (GM)	$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$
Arithmetisches Mittel (AM)	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

1.7 Spezielle Ungleichungen (S. 31)

Bernoulli-Ungleichung: $(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$
für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Mittelungleichung: $HM \leq GM \leq AM$

Gleichheit: $HM = GM = AM$
für $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Dreiecksungleichungen: $|a + b| \leq |a| + |b|$
 $|a - b| \leq |a| + |b|$
 $|a - b| \geq ||a| - |b||$

1.8 Vollständige Induktion

Verankerung (VA)	Beweise Formel für a_0
Vererbung (VE)	
(VE) (1) Annahme	Formel gilt für a_n
(VE) (2) Schritt	Formel gilt auch für a_{n+1}

Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

Beispiel: Vollständige Induktion

(VA) $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2) $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2 Funktionen (S. 49)

Monotonie: S. 51 Beschränktheit: S. 52 Umkehrfunktion: S. 53

2.1 Schreibweisen von Funktionen

$f : D_f \rightarrow W_f$ mit $x \mapsto f(x)$ $f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$ $y = f(x)$ mit $x \in D_f$

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Monotonie:	Siehe Bronstein S. 51
Beschränktheit:	Siehe Bronstein S. 52
Umkehrbarkeit:	Streng monotone Funktionen sind umkehrbar
Restriktion:	Nur einen Teil von D_f betrachten $\Rightarrow$ Umkehrbarkeit

2.3 Transformationen

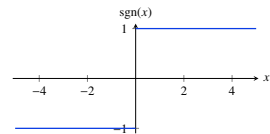
- Streckung um $\frac{1}{a}$ in x-Richtung $y = f(a \cdot x)$
Spiegelung an y-Achse bei $-a$
- Verschiebung nach links **(+b)** oder rechts **(-b)** $y = f(x \pm b)$
- Streckung um c in y-Richtung $y = c \cdot f(x)$
Spiegelung an x-Achse bei $-c$
- Verschiebung nach oben **(+d)** oder unten **(-d)** $y = f(x) \pm d$

2.4 Spezielle Funktionen

2.4.1 Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion)

$y = f(x) = \text{sgn}(x)$

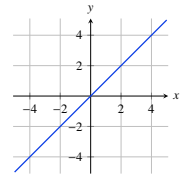
$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



2.4.2 Identität

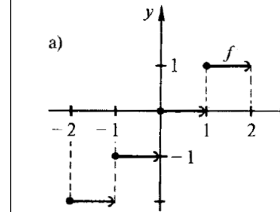
$y = f(x) = x$

y-Wert ist gleich dem x-Wert

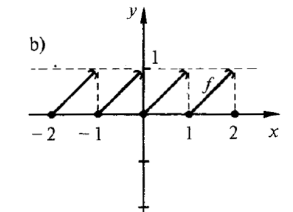


2.4.3 Floor-Funktion

Abrunden auf nächste ganze Zahl



Schreibweise: $[x]$



Schreibweise: $x - [x]$

2.5 Schwingungen (S. 84)

Sinus-Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

A Amplitude ω Frequenz $\frac{2\pi}{\text{sec}}$ ϕ Phase

2.5.1 Superposition von Schwingungen

Für Superposition müssen die Frequenzen **identisch** sein: $\omega_1 = \omega_2$

Gesamte Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_1 + \phi_2)$

Amplitude $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)}$

2.6 Verkettung oder Mittelbare Funktion

g nach f :	$h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$	$W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$
f nach g :	$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$	$W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

2.7 Gerade / ungerade / periodische Funktionen (S. 52)

Gerade:	$f(-x) = f(x)$	symmetrisch zu y-Achse
Ungerade:	$f(-x) = -f(x)$	punktsymmetrisch
Periodisch:	$f(x) = f(x \pm p)$	wiederholend mit Periode p

2.8 Ganzrationale Funtkionen (Polynome) (S. 62, 64)

Aussehen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

2.8.1 Nullstellen bestimmen

- Quadratische Funktion: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 - Faktorisierung mit Binomen / Hornerschema
- ⇒ Eine Funktion vom Grad n hat **höchstens** n verschiedene Nullstellen!

2.9 Gebrochenrationale Funktionen (S. 63, 67)

Aussehen: $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$			
m	Zählergrad	Nullstelle:	Zähler = 0
n	Nennergrad	Polstelle	Nenner = 0
$m < n$	echt gebrochen	Lücke	Beide = 0
$m = n$	gleichgradig		
$m > n$	unecht gebrochen		

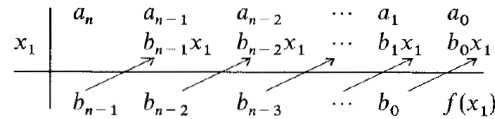
Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben. ⇒ Polynomdivision

2.10 Hornerschema (S. 966)

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad $n - 1$

2.10.1 Vorgehen Hornerschema

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren



Beispiel: Hornerschema

$x_1 = -2$	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -67 & -126 \\ & -2 & 4 & +126 \end{array}$	$f(x) = x^3 - 67x - 126$
	$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$	$f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$ $= (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$

2.11 Polynomdivision (S. 15)

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion.

Beispiel: Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (-2x^2 - x - 1) : (x - 1) = -2x - 3 + \frac{-4}{x - 1} \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ -3x - 1 \\ \underline{3x - 3} \\ -4 \end{array}$$

2.12 Partialbruchzerlegung (PBZ) (S. 15)

2.12.1 Vorgehen Partialbruchzerlegung

- | | | |
|-------|--|-----------------------|
| (1) | echt gebrochen ($m < n$)
Ja: ⇒ (2) | Nein: Polynomdivision |
| (2) | Nenner faktorisieren
pro Faktor ein Teilbruch | |
| (3) | Berechnung Zählerkonstanten | |
| (3.1) | Gleichnamig machen (kgV) | |
| (3.2) | Zählergleichung | |
| (3.3) | Einsetzen von 'guten' x -Werten | |

Beispiel: Partialbruchzerlegung

- | | |
|-------|---|
| (1) | $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$ |
| (2) | $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ |
| (3) | $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2 - x^2}$ |
| (3.1) | $\frac{A(a-x) + B(a+x)}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$ |
| (3.2) | $A(a - x) + B(a + x) = 1$ |
| (3.3) | $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
$x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$ |

2.12.2 Spezielle Ansätze PBZ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2} \\ f(x) &= \frac{1 \cdot 5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3} \\ f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 + 4x + 6} = \frac{A(x^2 + 4x + 6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 6)} \end{aligned}$$

2.13 Trigonometrie, Arcus (S. 77-86)

sin(x):	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	→	$W_f = [-1, 1]$
cos(x):	$D_f = [0, \pi]$	→	$W_f = [-1, 1]$
tan(x):	$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	→	$W_f = \mathbb{R}$
cot(x):	$D_f = (0, \pi)$	→	$W_f = \mathbb{R}$

arcsin(x):	$D_f = [-1, 1]$	→	$W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos(x):	$D_f = [-1, 1]$	→	$W_f = [0, \pi]$
arctan(x):	$D_f = \mathbb{R}$	→	$W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot(x):	$D_f = [-1, 1]$	→	$W_f = (0, \pi)$

2.13.1 Umwandlung

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$$

2.13.2 Symmetrien

Sinus	Punkt (0 0) → $\sin(-x) = -\sin(x)$ Scheitelsymm. → $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ Punkt → $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
Cosinus	y-Achse → $\cos(-x) = \cos(x)$ Scheitel → $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

2.14 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow$ Winkel gegen Uhrzeiger
Senkrechte Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

3 Folgen und Reihen (S. 19, 470)

Exponentialgesetze:	S. 8	Logarithmengesetze:	S. 9
Grenzwertsätze:	S. 471		

3.1 Spezielle Folgen und Reihen (S. 20)

Spezielle Reihen	Bronstein S.20		
Arithmetische Folge:	$a_{n+1} = a_n + d$	$d = a_{n+1} - a_n$	
Geometrische Folge:	$a_{n+1} = q \cdot a_n$	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	
Konstante Folge:	$a_{n+1} = a_n$		

3.2 Beschränktheit / Monotonie (S. 51, 470)

3.2.1 Beschränktheit

$W_f \subset [a; b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$

3.2.2 Monotonie

$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	↑
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	↑↑
$d \leq 0$	$0 < q \leq 1$	monoton fallend	↓
$d < 0$	$0 < q < 1$	streng monoton fallend	↓↓

3.3 Konvergenz / Divergenz

3.3.1 Konvergenz

Es existiert ein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon$ mit $\epsilon > 0$

Gesucht ist ein n_0 , ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen.

3.3.2 Bestimmt divergent gegen $+\infty$

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

3.3.3 Bestimmt divergent gegen $-\infty$

Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

3.3.4 Unbestimmt divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

3.4.1 Vorgehen Lösen von Grenzwerten

1. Naiven Ansatz ausprobieren ⇒ Limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:
Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik:	$+, -, *, :, \sqrt{}, \dots $
Erweiterung:	erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ $n =$ höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung:	erweitern mit Gegenthem (3. Binom bilden)
Tabelle:	Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.9 anschauen!

3.4.2 Beispiel Grenzwert n gegen Unendlich

f(n) = (-2n^2 + 4n - 5) / (8n^2 - 3n + 7) (n -> infinity) "Naiv: (-infinity + infinity + 5) / (infinity - infinity + 7) -> (-infinity + infinity) / (infinity - infinity) -> ?

Algebra, Erweitern mit 1/n^2 : f(n) = (-2 + 4/n - 5/n^2) / (8 - 3/n + 7/n^2) n -> infinity -2/8 = -1/4

3.5 Rechnen mit Unendlich

3.5.1 Bestimmte Formen

infinity + infinity = infinity -infinity - infinity = -infinity 0 * [a, b] = 0 * beschränkt = 0

g + infinity = infinity g - infinity = -infinity (g in R)

infinity * infinity = infinity -infinity * (infinity) = -infinity g * infinity = { infinity g > 0, -infinity g < 0 }

1/infinity = 0 g/infinity = 0 g in R

infinity/0+ = infinity infinity/0- = -infinity infinity/g = { infinity g > 0, -infinity g < 0 }

1/0+ = infinity 1/0- = -infinity g in R - 0

g/0+ = { infinity g > 0, -infinity g < 0 } g/0- = { -infinity g > 0, infinity g < 0 }

3.5.2 Unbestimmte Formen

0/0 = ? infinity/infinity = ? infinity * 0 = ? 0^0 = ? 0 * infinity = ? infinity - infinity = ? 0^0 = ?

1^infinity = ? Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt 1^infinity = 1

3.6 Einschliessung

Es existieren drei Folgen : On, fn und Un

Es gilt: On >= fn >= Un

WENN On gegen Grenzwert g konverviert UND Un ebenfalls gegen g konvergiert, DANN konvergiert auch fn gegen g

3.7 Wachstumsvergleich

(1) n^k / q^n -> 0 (k in N; q > 1) Potenz / Exponentiell -> 0

(2) q^n / n! -> 0 (k in N; q > 1) Exponentiell / Fakultät -> 0

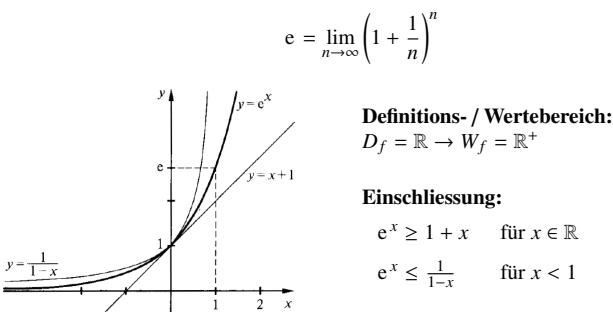
(3) ln(n) / n^k -> 0 (k in N) Logarithmisch / Potenz -> 0

3.8 Bolzano-Prinzip

Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

- 1. Monotonie beweisen
- 2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert g mittels Grenzwertgleichung finden
- 3. Beschränktheit beweisen
- 3.1 a1 ist obere / untere Schranke
- 3.2 Vermutete untere / obere Schranke mit vollständiger Induktion beweisen, z.B. a_{n+1} <= a_n wobei a_{n+1} und a_n mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

3.9 Exponentialfunktion (S. 73)



3.10 Hyperbolische Funktionen (S. 89ff)

e^x = 1/2 * (e^x - e^-x) + 1/2 * (e^x + e^-x) = sinh(x) + cosh(x)

sinh(x) = 1/2 * (e^x - e^-x) R -> R

cosh(x) = 1/2 * (e^x + e^-x) R -> [1; infinity)

tanh(x) = sinh(x) / cosh(x) = 1/2 * (e^x - e^-x) / 1/2 * (e^x + e^-x) R -> (-1; 1)

|sinh(x)| < cosh(x)

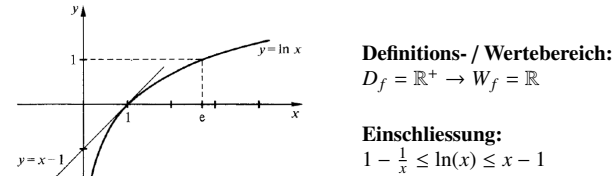
3.10.1 Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.) (S. 93)

arsinh(x) R -> R

arcosh(x) [1; infinity) -> R_0^+

artanh(x) |x| < 1 -> R

3.11 Logarithmusfunktion (S. 73)



4 Grenzwerte von Funktionen

4.1 Grenzwertsätze (S. 56-57)

Die Folgen an und bn sind konvergent!

lim_{x -> infinity} (an + bn) = lim_{x -> infinity} an + lim_{x -> infinity} bn

lim_{x -> infinity} (an - bn) = lim_{x -> infinity} an - lim_{x -> infinity} bn

lim_{x -> infinity} (an * bn) = lim_{x -> infinity} an * lim_{x -> infinity} bn

Falls bn != 0

lim_{x -> infinity} an / bn = lim_{x -> infinity} an / lim_{x -> infinity} bn

lim_{x -> infinity} |an| = lim_{x -> infinity} |an|

4.2 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik: +, -, *, :, sqrt(), |...|

Erweiterung: Erweitern mit 1/x^n n = höchste (Nenner-) Potenz

Erweiterung: Erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)

Faktorisierung: Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen

Trigo: Bronstein S. 57 1. C beachten

4.3 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert (S. 55)

Eine kritische Stelle x0 kann von links und rechts angenähert werden.

Linksseitiger Grenzwert: lim_{x -> x0^-} f(x) = g^-

Rechtsseitiger Grenzwert: lim_{x -> x0^+} f(x) = g^+

- Wenn g^- = g^+ = g => Konvergenz
- Wenn g^- != g^+ => Unbestimmte Divergenz

4.4 Konvergenz, Divergenz (S. 472)

4.4.1 Konvergenz von f(x)

x -> infinity Toleranzungleichung: |f(x) - g| < epsilon wenn x > M(epsilon)

x -> -infinity Toleranzungleichung: |f(x) - g| < epsilon wenn x < m(epsilon)

x -> x0 Toleranzungleichung: |f(x) - g| < epsilon x in U_delta(x0)

4.4.2 Bestimmte Divergenz von y = f(x)

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	y -> infinity (x -> infinity)	y > K wenn x > M(K)
II	y -> infinity (x -> -infinity)	y > K wenn x < m(K)
III	y -> -infinity (x -> -infinity)	y < k wenn x < m(k)
IV	y -> -infinity (x -> infinity)	y < k wenn x > M(k)
	f(x) -> infinity	y > K > 0 wenn x in U_delta(x0)
	f(x) -> -infinity	y < k < 0 wenn x in U_delta(x0)

4.5 Stetigkeit (S. 59-63, 127)

Definition Stetigkeit: lim_{x -> x0} f(x) = f(x0)

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel f: x -> f(x) =	Graph von f
hebbarer Unstetigkeitsstelle	lim_{x -> x0} f(x) = g und g != f(x0)	{ 1/2 * (x - 1)^2 + 1 für x != 1, 2 für x = 1 }	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	lim_{x -> x0} f(x) = g und x0 not in D_f	x^2 - 1 / x - 1	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	g^+ und g^- existieren in x0 aber g^+ != g^-	{ x - 1 für x >= 1, -1 für x < 1 }	

4.6 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

f besitzt an der Stelle x_0 Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge < x_n > gilt: lim_{x -> infinity} f(x_n) = g

4.6.1 Beispiel

f(x) = (|x + 2|) / (2x + 4) und x_0 = -2

linksseitig: x_n = x_0 - 1/n für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^- gegen infinity bestimmen

rechtsseitig: x_n = x_0 + 1/n für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^+ gegen infinity bestimmen

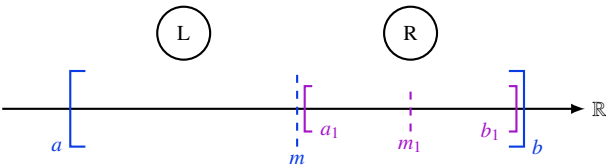
4.7 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano (S. 12)

f(x) auf Intervall [a; b] stetig; f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen => Es existiert (mindestens) eine Nullstelle xi

4.7.1 Bisektion (Intervallschachtelung)

Die Nullstelle lässt sich mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise be-rechnen:

- 1. I_0 = [a; b] = [a_0; b_0] gesamtes Intervall
- 2. I_0 halbieren -> m = (a_0 + b_0) / 2
- 3. Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
 - links: f(a) · f(m) < 0
 - rechts: f(a) · f(m) > 0
- 4. Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: I_1 = [a_1; b_1]
- 5. Schritte 2. - 4. n mal wiederholen: I_{n+1} in I_n
- 6. ...xi in (a; b) mit f(xi) = 0 (Nullstelle)



4.8 Spezielle Grenzwerte

lim_{x -> infinity} sin(x)/x = 0 lim_{x -> infinity} (1 + a/x)^x = e^a lim_{x -> 0} log_a((x+1)/x) = 1/ln(a)

lim_{x -> 1} x/(1-e^{-x}) = 1 lim_{x -> infinity} sqrt[n]{x} = 1 lim_{x -> 0} (1+x)^{1/x} = 1

lim_{x -> infinity} (ln(x))^alpha / x^beta = 0 lim_{x -> 0+} x · ln(x) = 0 lim_{x -> 0} (a^x - 1)/x = ln(a)

lim_{x -> 0} (e^x - 1)/x = 1 lim_{x -> 0} ((a+x)^alpha - 1)/x = alpha lim_{x -> 0+} z^z = 1

lim_{x -> 0+} x^{sin(x)} = 1 lim_{x -> 0+} y^beta (ln(y))^alpha = 0

lim_{x -> infinity} x^alpha / a^{beta x} = 0 (a > 1; alpha, beta > 0) lim_{x -> infinity} sum_{k=0}^n q^k = { infinity if q >= 1, 1/(1-q) if |q| < 1 }

4.9 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion r(x) = P_m(x)/Q_m(x) bestimmen gemäss:

	m < n	m = n	m > n
lim_{x -> +/- infinity} r(x)	0	a_m/b_n	infinity oder -infinity
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse y = g(x) = a_m/b_n	ganzrat. Teil der Polynomdivision

4.10 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips!

Beispiel: Grenzwert von rekursiver Folge

Folge: a_1 = 1/4; a_{n+1} = a_n^2 + 1/4

- 1. Monotonie
Beweisen mit Ansatz a_{n+1} >= a_n bzw. a_{n+1} <= a_n
- 2. Beschränktheit
Erste Schranke = Erster Wert der Reihe
Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist Supremum bzw. Infimum
- 3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup bzw. inf ist
Ansatz: a_n <= g bzw. a_n >= g mit vollständiger Induktion beweisen