

Von Andreas Rutishauser & Patric Bühler

Zusammenfassung Analysis für Elektrotechniker an der HSR

Nach der Vorlesung von Prof. Dr. Bernhard Zraggen

ZUSAMMENFASSUNG AN1E & AN2E

FUNKTIONEN

PROGRAMM DISKUSSION

- I) Definitionsmenge / Wertemenge
- II) Symmetrien, Periodizität, Transformation
Symmetrisch an Ordinate (y-Achse) → gerade;
Punktsymmetrisch → ungerade Funktion
Periodizität: z.B. $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Transformation: Verschiebung in x Richtung oder Verschiebung in y Richtung
- III) Nullstellen $f(x) = 0$
- IV) Stetigkeit, Differenzierbarkeit f', f'', f'''
Für die Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit Voraussetzung.
Zu beachten sind Lücken, Polstellen, Sprungstellen und Oszillationsstellen.
- V) A) Monotonieverhalten, Extremalstellen
Ist monoton steigend bzw. fallend, $f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0$.
Ist streng monoton steigend bzw. fallend, $f' > 0$ bzw. $f' < 0$.
B) Krümmungsverhalten, Wendestellen / Wendetangenten
→ Siehe Schaubild für Ableitungen
- VI) Grenzwertverhalten $x \rightarrow \pm\infty$ / Randstellen / Polstellen
Siehe Bernoulli Höspital

STETIGKEIT

f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

- Hebbare Unstetigkeitsstelle an der Stelle x_0 eine „Lücke“, also nicht definiert oder $x_0 \neq g$.
- Unstetigkeitsstelle 1. Art Sprungstelle, sprich $g^+ \neq g^-$
- Unstetigkeitsstelle 2. Art f ist für $x \uparrow x_0$ bzw. $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)
Mindestens g^+ oder g^- existieren nicht.

Wenn f auf $[a, b]$ stetig ist, dann ist f dort beschränkt. (abgeschlossenes Intervall, nicht umkehrbar)

BESCHRÄNKTHEIT

Kleinste, obere Schranke heisst Supremum (sup) / Grösste,
untere Schranke heisst Infimum (inf)
sup gleich Maximum, wenn $M \in A$
inf gleich Minimum, wenn $m \in A$

NULLSTELLEN

Wenn f auf $[a, b]$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$ ist, dann
existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

UMKEHRUNG

Die Funktion $W_f \rightarrow D_f$, die jedem $y \in W_f$ genau das $x \in D_f$
zuweist für welches $y = f(x)$ gilt, wird Umkehrfunktion
von f genannt (f^{-1})

RESTRIKTION

Durch Restriktion (Einschränkung) werden zum Teil nicht
Umkehrbare Funktionen umkehrbar gemacht. $f: D_f \rightarrow W_f$
sei eine Funktion und $D_{\hat{f}}$ eine echte Teilmenge von D_f , z.B.
das Intervall $[1, \infty)$

ZWISCHENWERTSATZ

Wenn f auf $[a, b]$ stetig und $f(a) \neq f(b)$ ist, dann existiert zu jeder zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Zahl ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mindestens ein $\xi \in (a, b)$ so, dass $f(\xi) = \lambda$ ist.

Eine auf $[a, b]$ monotone Funktion f ist genau dann stetig, wenn sie auf $[a, b]$ die Zwischenwert-Eigenschaft besitzt.

EXTREMALSTELLEN

f besitzt an der Stelle $x_M \in D_f$ bzw. $x_m \in D_f$ ein absolutes Maximum bzw. Minimum, wenn $f(x) \leq f(x_M) = M$ bzw. $f(x) \geq f(x_m) = m$ (für alle $x \in D_f$).

Ein relatives Maximum bzw. Minimum kann niemals ein Randpunkt oder isolierter Punkt sein. Absolutes Extremum = Randpunkt oder ein relatives Extremum.

RELATIVES EXTREMUM $f'(x) = 0$ (notwendig, jedoch nicht hinreichend, z.B. Terasse bei x^3)

SATZ VON ROLLE f ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f'(\xi) = 0$.

f ist auf $U(x_0)$ stetig und auf $\dot{U}(x_0)$ differenzierbar, $\delta > 0$

- A) $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset U(x_0)$ und $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset U(x_0)$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. Minimum.
- B) $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert.

f sei auf $U(x_0)$ stetig differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)} \neq 0$ dann folgt,

- A) Ist n gerade, so hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert, und zwar für $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein relatives Minimum und für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein relatives Maximum.
- B) Ist n ungerade, so hat f an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert, sondern f ist in einer Umgebung von x_0 streng Monoton, und zwar für $f^{(n)}(x_0) > 0$ streng monoton wachsend und für $f^{(n)}(x_0) < 0$ streng monoton fallend.

KONVEXITÄT & WENDEPUNKT

Linkskrümmung	Positive Krümmung	Konvex
Rechtskrümmung	Negative Krümmung	Konkav

f sei auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. f ist genau dann streng konvex, bzw. streng konkav auf (a, b) , falls f' auf (a, b) streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend ist.

Ist f eine auf $[a, b]$ zweimal differenzierbare Funktion, dann gilt

- A) f ist auf (a, b) konvex bzw. konkav genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ bzw. $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist.
- B) Ist $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f auf (a, b) streng konvex bzw. streng konkav.

Ist f eine auf $[a, b]$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$, dann heisst $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt der Funktion f wenn f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, wenn also $f''(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f''(x) > 0$ für $x > x_0$ ist bzw. umgekehrt.

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heisst Terrassenpunkt (Sattelpunkt).

TAYLOR PRINZIP ORDNUNG 3

f ist auf einer Umgebung $U(x_0)$ dreimal stetig differenzierbar, dann gilt

- A) Hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, so ist $f''(x_0) = 0$.
- B) Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.

SCHNITTWINKEL

Schneiden zweier Funktionsgraphen

$$\tan \delta = \frac{m_1 - m_2}{1 + (m_1 \cdot m_2)} \quad (m_1 = f'(x_0); m_2 = g'(x_0))$$

Wenn $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$, dann $g \perp f$

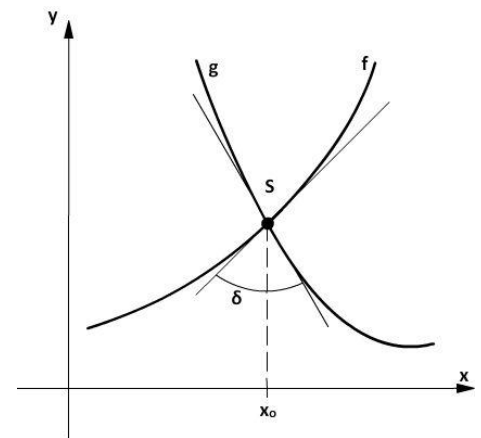


Bild 1: Schnittwinkel

GRENZWERTBERECHNUNG

KALKÜL

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{dn^2 + en + f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}(an^2 + bn + c)}{\frac{1}{n^2}(dn^2 + en + f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{d + \frac{e}{n} + \frac{f}{n^2}}$$

GRENZWERTE IN EINEM BESTIMMTEN BEREICH

Grenzwerte: $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x > M(\varepsilon)$

$$(g - \varepsilon) < f(x) < (g + \varepsilon)$$

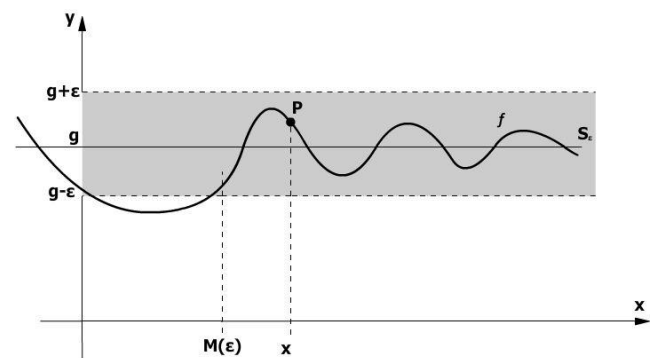


Bild 2: Asymptote

f ist auf $\dot{U}(x_0)$ definiert, f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert g , wenn zu jeder ε -Umgebung $S_\varepsilon(g)$ eine punktierte δ -Umgebung $\dot{U}_\delta(x_0)$ so existiert, dass $f(x) \in S_\varepsilon(g)$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ ist.

$$|f(x) - g| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \dot{U}_\delta(x_0) \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$f(x_0)$ spielt für die Grenzwertbetrachtung keine Rolle.

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$f(x) \rightarrow g^+ \text{ für } x \downarrow x_0$$

Linksseitiger Grenzwert:

$$f(x) \rightarrow g^- \text{ für } x \uparrow x_0$$

f ist an der Stelle x_0 konvergent gegen g , wenn $g^+ = g^- = g$ gilt.

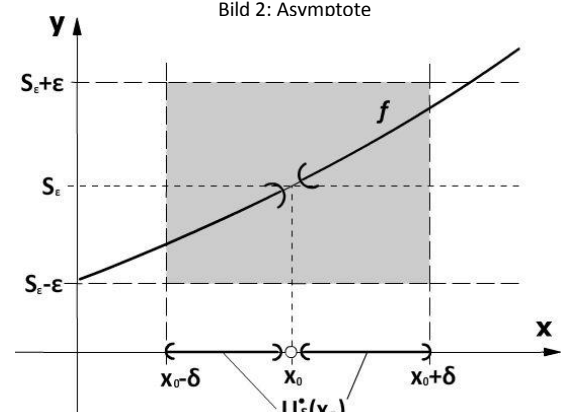


Bild 3: Grenzwert in einer Umgebung

BERNOULLI-HÔSPITAL

Ausdruck der Form $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Ergibt der Ausdruck $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ wieder einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$, dann wird das Verfahren wiederholt.

Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\frac{1}{\psi(x)^2}}$$

Ausdruck der Form $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) - \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}\right)'}$$

Ausdruck der Form $0^0, \infty^0, 1^\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)} \\ A: \ln f(x) &= \psi(x) \cdot \ln \varphi(x) \\ \text{und dann: } e^A \end{aligned}$$

Wenn die Funktion unbestimmt divergent für $x \rightarrow x_0$ ist, dann kann Bernoulli-Hôpital nicht angewandt werden.

ASYMPTOTE

Ist f eine auf einem nicht beschränkten Intervall definierte Funktion, und gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

ist, so heisst die Gerade g mit

$$y = ax + b$$

Asymptote des Graphen von f . Dieser schmiegt sich für $x \rightarrow \infty$ bzw. für $x \rightarrow -\infty$ immer mehr der Geraden g an.

$$(I) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (II) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \quad (III) \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$$

Der Graph von f besitzt genau dann die Asymptote für $x \rightarrow \infty$, wenn diese Grenzwerte existieren.

Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, so folgt aus (I): $a = 0$. Daher ist wegen (II): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

SPEZIELLE GRENZWERTE

(Seite 82) 3.4; (Seite 109) 4.2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0; \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{p}{n} = 0$	$(\alpha \in \mathbb{Q}^+; p \in \mathbb{R})$
(Seite 100) Definition 3.11; (Seite 167) 4.49	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	$(z \in \mathbb{R})$
(Seite 167) 4.48	$\lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e$	
(Seite 84);(Seite 89)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \infty$	$(p \in \mathbb{R}^+)$
(Seite 114) 4.9	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = \infty; \lim_{n \rightarrow -\infty} n^p = \begin{cases} \infty & p \text{ gerade} \\ -\infty & p \text{ ungerade} \end{cases}$	$(p \in \mathbb{N})$
(Seite 83) 3.5	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \infty & q > 1 \end{cases}$	
Geometrische Reihe (Seite 88) 3.7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & q < 1 \end{cases}$	
Harmonische Reihe	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = \infty$	
(Seite 90) 3.10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$	$(q > 1; k \in \mathbb{N})$
(Seite 95) 3.12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$	$(x \in \mathbb{R}^+)$
(Seite 112); (Seite 136) 4.25	$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n} = 1$	
(Seite 159) 4.43	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$
(Seite 167) 4.47; (Seite 167) 4.46	$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log_a(n+1)}{n} = \frac{1}{\ln(a)}; \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$	$(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
(Seite 158) Satz 4.20	$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$	
(Seite 158) Satz 4.20	$\lim_{n \rightarrow 0^+} \log_a n = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \end{cases}$	
(Seite 167) 4.50; (Seite 168) 4.51	$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{a^n - 1}{n} = \ln(a); \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$	$(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
(Seite 168) 4.52	$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{1 - e^{-n}} = 1$	
(Seite 168) 4.53	$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^\alpha}{a^{\beta n}} = 0$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; a > 1)$
(Seite 168) 4.54	$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1+n)^\alpha - 1}{n} = \alpha$	$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
(Seite 411) 8.6.1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} 0 & a < b \\ 1 & a = b \\ \infty & a > b \end{cases}$	$(a, b \in \mathbb{R}^+)$

DIFFERENTIALRECHNUNG

DIFFERENZIEREN

f heisst auf $[a, b]$ differenzierbar, wenn f auf (a, b) differenzierbar ist und in a die rechtsseitige und in b die linksseitige Ableitung existieren. Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 stetig (Umkehrung nicht möglich, Stetigkeit muss vorausgesetzt sein, damit f differenzierbar ist).

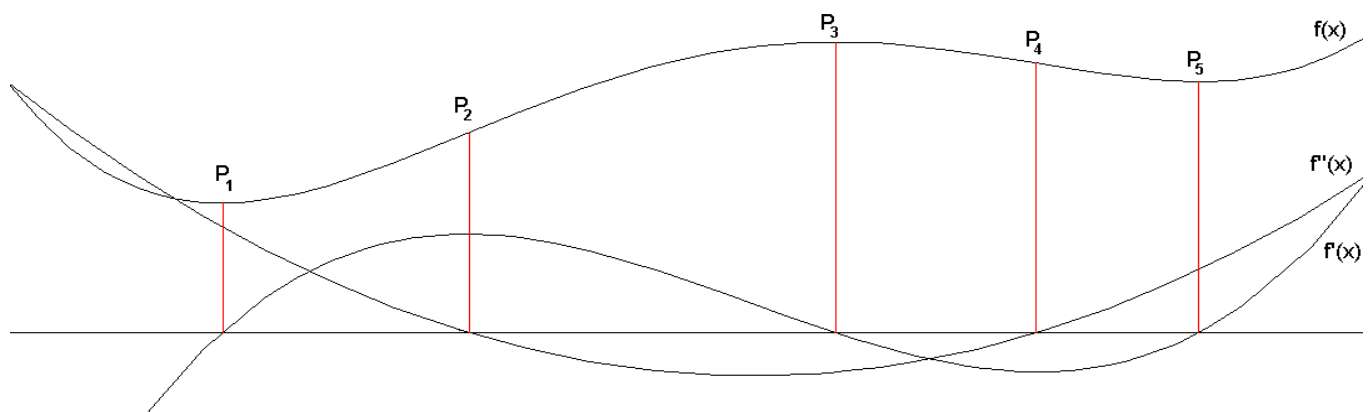
Ist $f'_r(x_0) = f'_l(x_0) = +\infty$ bzw. $-\infty$, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, bzw. besitzt den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Ist x_1 eine k -fache Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f n -ten Grades ($n \geq k$), so verschwinden die ersten $k - 1$ Ableitungen von f an der Stelle x_1 .

SATZ VON DARBOUX

f ist auf $[a, b]$ differenzierbar, $f'_r(a) \neq f'_l(b)$, dann nimmt f' jeden Wert zwischen $f'_r(a)$ und $f'_l(b)$ an.

ABLEITUNGEN QUALITATIV DARGESTELLT



Punkt	Originalfunktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$	2. Ableitung $f''(x)$	Krümmung von $f(x)$
P_1	Tiefpunkt	NULL	Positiv	Linkskrümung
P_2	Wendepunkt	Positiv	NULL	Von LK nach RK
P_3	Hochpunkt	NULL	Negativ	Rechtskrümung
P_4	Wendepunkt	Negativ	NULL	Von RK nach LK
P_5	Tiefpunkt	NULL	Positiv	Linkskrümung

MITTELWERTSATZ

f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = \tan \alpha_s = m_s$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a)) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

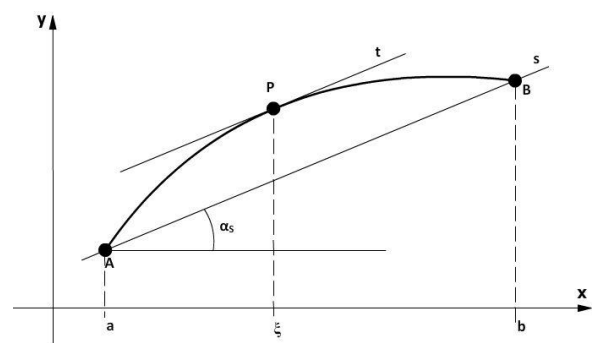


Bild 4: Mittelwertsatz

LINEARE APPROXIMATION

$$\hat{f}: x \mapsto \hat{f}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Zuwachs an der Stelle x_0 von f : $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$

$$dy = \hat{f}(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot h$$

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot dx$$

Für $h \rightarrow 0$ gilt $\frac{f(x) - \hat{f}(x)}{h} \rightarrow 0$

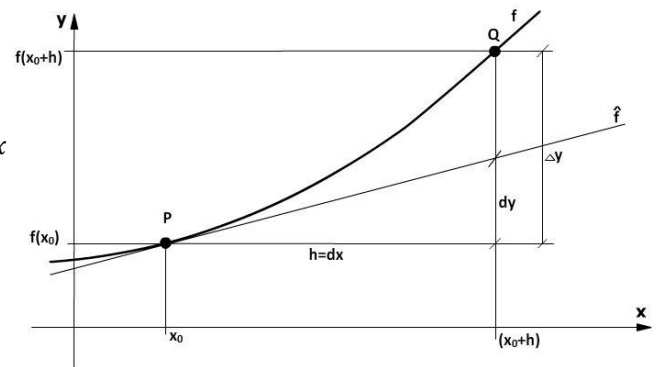


Bild 5: Lineare Approximation

DIE TAYLOR'SCHE FORMEL

Ist f an der Stelle x_0 (mindestens) n -mal differenzierbar, dann heisst die ganzrationale Funktion p_n (Schmiegeparabel) mit

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

das n -te **Taylorpolynom** von f mit Entwicklungspolynom x_0 .

$R_n = f - p_n$ (Abschätzung für R_n)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad (\vartheta \in (0,1))$$

ABLEITUNGSREGELN

Konstante Funktion	$(c)' = 0$	$(c \in \mathbb{R})$
Variabelfunktion	$(x)' = 1$	$(x \in \mathbb{R})$
Eigenpotenzregel	$(x^x)' = (1 + \ln x) \cdot x^x$	$(x \in \mathbb{R}^+)$
Potenzregel	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \neq 0)$
Sinusfunktion	$(\sin x)' = \cos x$	$(x \in \mathbb{R})$
Kosinusfunktion	$(\cos x)' = -\sin x$	$(x \in \mathbb{R})$
Tangensfunktion	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$
Kotangensfunktion	$(\cot x)' = \frac{-1}{\cos^2 x}$	$(x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z})$
Exponentialfunktion	$(e^x)' = e^x$	$(x \in \mathbb{R})$
Allgem. Exponentialfunktion	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
Logarithmusnaturalisfunktion	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
Logarithmusfunktion	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$	$(a > 0; a \neq 1; x > 0)$
Betragsfunktion	$(x)' = \frac{x}{ x } = \frac{ x }{x} = \text{sgn}(x)$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x \neq 0)$
Sinushyperbolicus	$(\sinh x)' = \cosh x$	$(x \in \mathbb{R})$
Cosinushyperbolicus	$(\cosh x)' = \sinh x$	$(x \in \mathbb{R})$
Tangenshyperbolicus	$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$(x \in \mathbb{R})$
Kotangenshyperbolicus	$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
Areasinushyperbolicus	$(\text{arsinh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(x \in \mathbb{R})$
Areacosinushyperbolicus	$(\text{arcosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(x > 1)$
Areatangenshyperbolicus	$(\text{artanh } x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$(x \in (-1,1))$
Areacotangenshyperbolicus	$(\text{arcoth } x)' = -\frac{1}{1-x^2}$	$(x > 1)$
Faktorregel	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	$(a \in \mathbb{R})$
Summenregel	$(g \pm h)' = g' \pm h'$	$(g \neq h)$
Produktregel	$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$	$(g \neq h)$
Quotientenregel	$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$; Spezialfall: $\left(\frac{1}{h}\right)' = -\frac{h'}{h^2}$	$(h > 0)$
Kettenregel	$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	

INTEGRAL

RIEMANN'SCHES INTEGRAL

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall monotone Funktion ist dort integrierbar.

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkte und an höchstens endlich vielen Stellen unstetige Funktion ist dort integrierbar.

Es seien a, b, c beliebig reelle Zahlen. Existieren die Integrale $\int_a^b f(x) \cdot dx$, $\int_b^c f(x) \cdot dx$, $\int_a^c f(x) \cdot dx$, dann ist $\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$.

Ist f periodisch mit der Periode p und über $[0, p]$ integrierbar, dann gilt $\int_0^p f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_0+p} f(x) \cdot dx$

SATZ 9.11
$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x) \cdot dx = (b - a) \cdot f(\xi)$.

$$\int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M \cdot dx$$

MITTELWERT DER FUNKTION

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx = f(\xi)$$

Nimmt f im Intervall $[a, b]$ sowohl positive als auch negative Werte an, so muss man zur Berechnung des Flächeninhalts zuerst alle Nullstellen der Funktion bestimmen.

Ist f über $[a, b]$ integrierbar, dann ist jede Integralfunktion I von f auf $[a, b]$ stetig. Eine nicht stetige, aber integrierbare Funktion hat also stetige Integralfunktionen, d.h. integrieren wirkt „glättend“.

Ist f auf $[a, b]$ stetig, dann ist jede Integralfunktion I von f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, und es ist $I' = f$.

STAMMFUNKTIONEN UND UNBESTIMMTES INTEGRAL

f sei auf $[a, b]$ definiert. Man nennt jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion F eine Stammfunktion von f wenn $F' = f$ ist.

Ist f auf $[a, b]$ stetig, dann existiert auf $[a, b]$ eine Stammfunktion F von f , und jede Integralfunktion von f ist Stammfunktion von f .

F sei eine Stammfunktion von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat jede Stammfunktion von f die Form $F + C$, wobei C eine auf $[a, b]$ konstante Funktion ist. Ist F eine Stammfunktion von f , dann erhält man mit $F + C$ alle Stammfunktionen von f .

f sei auf $[a, b]$ stetig, dann ist jedes unbestimmte Integral von f auch Stammfunktion von f und umgekehrt, d.h. ist F Stammfunktion von f , so gilt $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ und umgekehrt.

Unbestimmtes Integral $\neq$ Stammfunktion; denn eine nichtstetige Funktion kann integrierbar sein, ohne dass sie eine Stammfunktion hat.

HYPERBOLICUS FUNKTIONEN

HYPERBOLISCHE FORMELN

Sinushyperbolicus (ungerade)	$\sinh x: x \mapsto \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x$ $W_{\sinh} = \mathbb{R}$	$(x \in \mathbb{R})$
Cosinushyperbolicus (gerade)	$\cosh x: x \mapsto \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$ $W_{\cosh} = [1, \infty)$	$(x \in \mathbb{R})$
Tangenshyperbolicus (ungerade)	$\tanh x: x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$ $W_{\tanh} = (-1, 1)$	$(x \in \mathbb{R})$
Kotangenshyperbolicus (ungerade)	$\coth x: x \mapsto \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$ $W_{\coth} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

AREAHYPERBOLISCHE FORMELN

Areasinushyperbolicus (ungerade)	$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(x \in \mathbb{R})$
Areacosinushyperbolicus	$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	$(x \in [1, \infty))$
Areatangenshyperbolicus (ungerade)	$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	$(x \in (-1, 1))$
Areacotangenshyperbolicus (ungerade)	$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$	$(x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1])$

SATZ 4.23

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y) \\ (\cosh x \pm \sinh x)^n &= \cosh nx \pm \sinh nx \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

EXPONENTIALFUNKTIONEN

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \begin{cases} \sinh(x) = (e^x - e^{-x}) \\ \cosh(x) = (e^x + e^{-x}) \end{cases}$$

WINKELFORMELN

DOPPELWINKEL UND HALBWINKEL

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot u) &= 2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) \\ \cos(2 \cdot u) &= \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2 \cdot \cos^2(u) - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2(u) \\ \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(v)}{2} \end{aligned}$$

$$\sin^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1 - \cos(v)}{2}$$

ADDITIONSTHEOREME

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)} \end{aligned}$$

WEITERE THEMEN

FAKULTÄT

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$\text{Spezialfall: } 0! = 1$$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

Die Behauptung $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, wenn

- (I) $A(n)$ für $n = 1$ gilt, und
- (II) aus der Gültigkeit der Aussage für eine natürliche Zahl k die Gültigkeit der Aussage für die Zahl $k + 1$ folgt.

Es wird (I) der Induktionsanfang und (II) der Induktionsschritt genannt.

Es gibt Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen erst ab einer Zahl n_0 gelten. In diesem Fall wird als Induktionsanfang $n = n_0$ gewählt.

HERON VERFAHREN (APPROXIMATION VON WURZELN)

Für $b = \sqrt{a}$ gilt

Bsp: $b = \sqrt{10}$

$$1. \quad x_1 \text{ annehmen} \rightarrow y_1 = \frac{a}{x_1} \text{ bilden}$$

$$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = \frac{10}{3}$$

$$2. \quad x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} \rightarrow y_2 = \frac{a}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{3 + \frac{10}{3}}{2} \rightarrow y_1 = \frac{60}{19}$$

$$3. \quad x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2} \rightarrow y_3 = \frac{a}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{\frac{19}{6} + \frac{60}{19}}{2} \rightarrow y_1 = \frac{721}{114}$$

BINOMIALKOEFFIZIENTEN

Es sei $n, k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$. Unter den Binomialkoeffizienten verstehen wir die Zahlen

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \text{ und } \binom{n}{0} = 1; \binom{0}{0} = 1$$

Für alle Binomialkoeffizienten gilt

$$A) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$B) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (Symmetrie)}$$

$$C) \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

1. Nenner hat n verschiedene Nullstellen $q(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$ Bsp: $\int \frac{-2x^2+7x-1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)} \right) dx$

$$\frac{2A_1(x-2)(x-3)+2A_2(x-1)(x-3)+2A_3(x-1)(x-2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Um ein einzelnes A zu finden, die entsprechende Nullstelle x einsetzen:

$$-2(1)^2 + 7(1) - 1 = 2A_1(1-2)(1-3) + 2A_2(1-1)(1-3) + 2A_3(1-1)(1-2) \rightarrow 4 = 4A_1$$

2. Nenner hat n reelle Nullstellen $q(x) = k(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_i)^{n_i}$

Ansatz: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_i)} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{n_i}}{(x-x_i)^{n_i}}$

Bsp: $\int \frac{2x^4+3x-1}{(x-1)^3(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \right) dx$

Nur A_3 und B_2 lassen sich durch (x=1 od. -1) direkt bestimmen, die Anderen müssen mittels 3x3 Gleichungsystems aufgelöst werden.

3. Nenner enthält nicht zerlegbare Nullstellen $x^2 + bx + c$

Ansatz: umwandeln zu: $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ Bsp: $\frac{7x^2-13x+24}{x(x^2-4x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+8}$

$$7x^2 - 13x + 24 = A(x^2 - 4x + 8) + Bx^2 + Cx$$

4. Nenner von der Form $(x^2 + bx + c)^n$

Bsp: $\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+1)^2}$

FEHLERFORTPFLANZUNG

ABSOLUTER FEHLER (OBERE SCHRANKE) $|\Delta y| = |y - \bar{y}| = |f(x) - f(\bar{x})| = f(\bar{x} + dx) - f(\bar{x})$
 $|\Delta y| \approx |dy| = |f'(\bar{x})| \cdot |dx| \leq |f'(\bar{x})| \cdot \delta$

RELATIVER FEHLER $\left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right| \approx \left| \frac{dy}{\bar{y}} \right| = \left| \frac{f'(\bar{x})}{\bar{y}} \right| \cdot dx \leq \frac{f'(\bar{x})}{\bar{y}} \cdot \delta$

$\bar{x}$ = Näherungswert von x; δ = Obere Schranke für den absoluten Fehler von $\bar{x}$

BSP: Würfel, Messung Kantenlänge ($50\text{mm} \pm 0.01$); $V = x^3$; $\bar{x} = 50 \Rightarrow \bar{V} = 125'000\text{mm}^3$

ABSOLUTER FEHLER $f'(x) = 3x^2 \cdot |dx| \leq 3\bar{x}^2 \cdot \delta$ ($\delta = 0.01$)
 $|\Delta V| \approx 75$ d.h. $124'925\text{mm}^3 \leq V \leq 125'075\text{mm}^3$

RELATIVER FEHLER $\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \frac{3\bar{x}^2}{\bar{x}^3} \cdot |dx| = \frac{3}{\bar{x}} \cdot |dx| \leq \frac{3}{50} \cdot 0.01 = 0.0006 \Rightarrow 0.06\%$

SPEZIELLE UNGLEICHUNGEN, REIHEN UND SUMMEN

UNGLEICHUNGEN

Bernoulli Ungleichung:	$(1 + a)^n \geq 1 + na$	$(a \geq -1); (n \geq 1)$
Binomische Ungleichung:	$ a b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$	$(a, b \in \mathbb{R})$
Arithm. Zu Geom. Ungleichung:	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$	$(a_i > 0); (n \in \mathbb{N})$
Dreiecksungleichung:	$ a + b \leq a + b $ $ a - b \leq a + b $ $ a - b \geq a - b $	$(a, b \in \mathbb{R})$
Ungleichung zu Arithm. Und Quad. Mittel:	$\left \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$	$(n \in \mathbb{N})$
Abschätzung für Fakultät	$n! > 2^{n-1}$	$(n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$
Erste e-Funktion	$e^x \geq 1 + x$	$(x \in \mathbb{R})$
Zweite e-Funktion	$e^x \leq \frac{1}{1-x}$	$(x < 1)$
Logarithmusnaturalis	$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$	$(x \in \mathbb{R})$

SPEZIELLE ENDLICHE REIHEN

Brüche der Form $1/n \cdot (n+1)$	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$	$(n \in \mathbb{N})$
Summe aller Zahlen bis n	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$(n \in \mathbb{N})$
Summe aller Zahlen von p bis n	$\sum_{i=p}^n i = \frac{(n+1)(2p+n)}{2}$	$(n \in \mathbb{N})$

SUMMEN

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m}^n a_i \quad (1 < m < n) \\ \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \mu b_i) &= \lambda \sum_{i=1}^n a_i + \mu \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=0}^n a_i &= \sum_{i=-j}^{n-j} a_{i+j} \quad (j \in \mathbb{Z}) \\ \sum_{i=1}^n a &= n \cdot a \end{aligned}$$

ELEMENTARE TRANSFORMATIONEN: STRECKUNGEN, VERSCHIEBUNGEN

Ist eine Funktion mit der Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gegeben, so führen bestimmte algebraische Umformungen von x und y zu neuen Funktionen, deren Funktionsgraphen mit den ursprünglichen in Beziehung stehen:

y wird ersetzt durch $\frac{y}{A}$	$y = A \cdot f(x)$	Streckung des Graphen an der x Achse mit Streckfaktor A
y wird ersetzt durch $(y - B)$	$y = f(x) + B$	Verschiebung des Graphen um B in y Richtung
x wird ersetzt durch $a \cdot x$	$y = f(a \cdot x)$	Streckung des Graphen an der y Achse mit Streckfaktor $\frac{1}{a}$
x wird ersetzt durch $(x - b)$	$y = f(x - b)$	Verschiebung des Graphen um b in x Richtung

NOTIZEN (CONT.)